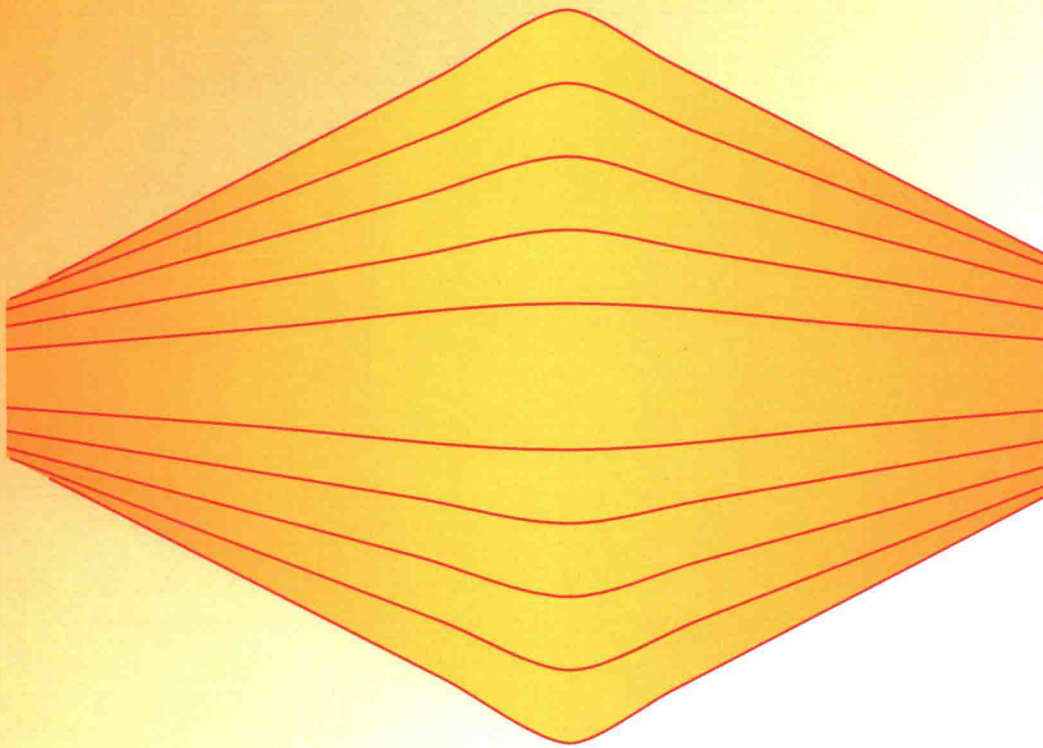
COURS ET EXERCICES D'ANALYSE

Mathématiques spéciales MP - MP* - PSI* - CAPES - Agrégation

Pierre Meunier



Cépaduès
ÉDITIONS

Cours et exercices d'analyse

Mathématiques spéciales MP - MP* - PSI*
CAPES - Agrégation

Pierre MEUNIER

Professeur de mathématiques
en Mathématiques Spéciales MP*.

CÉPADUÈS-ÉDITIONS
111, rue Nicolas-Vauquelin
31100 TOULOUSE – France
Tél. : 05 61 40 57 36 – Fax : 05 61 41 79 89
(de l'étranger) + 33 5 61 40 57 36 – Fax : + 33 5 61 41 79 89
www.cepadues.com
Courriel : cepadues@cepadues.com

Chez le même éditeur

Robustesse et commande optimale ..... *Alazard D. et al.*
Eléments d'analyse numérique ..... *Attéia M., Pradel M.*
Analyse variationnelle et optimisation ..... *Azé D., Hiriart-Urruty J.-B.*
Simulation et algorithmes stochastiques ..... *Bartoli N., Del Moral P.*
Mesure et intégration. Intégrale de Lebesgue ..... *Bouyssel M.*
Cours d'Analyse fonctionnelle et complexe ..... *Caumel Y.*
Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur avec Mathematica ..... *Carmasol A.*
Topologie des espaces vectoriels normés ..... *Colin J-J., Morvan J-M. et R.*
Modélisation probabiliste et statistique ..... *Garel B.*
Mathématiques et résolution des équations aux dérivées partielles classiques ..... *Giraud G., Dufour J.P.*
Les fonctions spéciales vues par les problèmes ..... *Groux R., Soulat Ph.*
Principes généraux et méthodes fondamentales ..... *Groux R.*
Polynômes orthogonaux et transformations intégrales ..... *Groux R.*
Les structures et les morphismes vus par les problèmes ..... *Groux R., Soulat Ph.*
Analyse : la convergence vue par les problèmes ..... *Groux R., Soulat Ph.*
Algèbre linéaire ..... *Grifone J.*
Exercices d'algèbre linéaire et bilinéaire ..... *Hiriart-Urruty J.-B., Plusquellec Y.*
Invitation à l'Algèbre ..... *Jeanneret A., Lines D.*
Probabilités et statistique appliquées ..... *Lacaze B., Mailbes C., Maubourguet M.M., Tourneret J.-Y.*
Introduction à la statistique descriptive ..... *Leboucher L., Voisin M.-J.*
Résolution numérique des équations aux dérivées partielles ..... *Le Pourhiet A.*

Arithmétique Modulaire et Cryptologie ..... ***Meunier P.***
Algèbre et probabilités ..... ***Meunier P.***
Algèbre et informatique Applications aux codes linéaires correcteurs d'erreurs ..... ***Meunier P.***
Cours d'Algèbre et d'Algorithmique Applications à la cryptologie du RSA et du logarithme discret ..... ***Meunier P.***
Cours et exercices d'analyse ..... ***Meunier P.***

Probabilités et statistiques pour ingénieurs et commerciaux ..... *Pellaumail J., Perret A., Basle L.*
Que savez-vous de l'outil mathématique ? Six fascicules ..... *Plusquellec Y., Agullo M., Boudet R., Fabre J., Guérin R.*
La démarche statistique ..... *Prum B.*
Analyse fonctionnelle ..... *Samuelides M., Touzillier L.*
Problèmes d'analyses fonctionnelle et harmonique ..... *Samuelides M., Touzillier L.*
Analyse harmonique ..... *Samuelides M., Touzillier L.*
Introduction à la Topologie ..... *Sondaz D., Morvan R.*
Limites, applications continues ..... *Sondaz D., Morvan R.*
Calcul différentiel ..... *Todjihounde L.*
Topologie élémentaire ..... *Todjihounde L.*

Collection Bien Débuter en mathématiques ..... *Morvan J.-M., Directeur de Collection*
Collection Bien Maîtriser les mathématiques ..... *Morvan J.-M., Directeur de Collection*

© CEPAD 2014

ISBN : 978.2.36493.094.0

Le code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique en se généralisant provoquerait une baisse brutale des achats de livres, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, du présent ouvrage est interdite sans autorisation de l'Éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC – 3, rue d'Hautefeuille – 75006 Paris).

Dépôt légal : mars 2014

Dans la poésie des mathématiques il y a toujours une lutte secrète entre l'infini de l'insaisissable et le fini des expressions dans lesquelles cet infini se renferme sans, pour autant, jamais se limiter.
(Adaptation d'une citation de Jules Barbey d'Aurevilly).

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

TABLES DES MATIÈRES

INTRODUCTION 9
Chapitre 1 : SUITES - SERIES - FAMILLES SOMMABLES 11
1.1 Rappels de cours 11
A - LES SUITES 19
1.2 Suites numériques sous-additives (resp. à croissance lente) 19
1.2.1 Suites sous-additives de réels 19
1.2.2 Suites réelles à croissance lente. 22
1.3 Etude de la suite (e^{in}) 26
1.4 Suites réelles équiréparties 27
1.5 Suites réelles du type $u_{n+1}=f(u_n)$ 31
1.6 Etude de quelques suites fréquemment rencontrées 34
1.6.1 L'algorithme Babylonien 34
1.6.2 La constante d'Euler : 35
1.6.3 L'exponentielle complexe 37
1.6.4 Un classique 38
1.6.5 Une suite définissant la fonction Γ en tout z de $\mathbb{C}$, z non entier ≤ 0 . 39
1.6.6 Encore un classique : 40
B - SERIES NUMERIQUES. 41
1.7 Inégalités de Gronwall, de Carlemann et de Hardy. 41
1.7.1 Inégalités de Gronwall. 41
1.7.2 Inégalité de Carlemann. 43
1.7.3 Inégalité de Hardy. 45
1.8 Quelques exemples de séries à termes positifs fréquemment rencontrés 46
1.8.1 Séries associées aux sommes partielles ou aux restes 46
1.8.2 Le critère de condensation de Cauchy 48
1.8.3 Exemples significatifs d'approche concernant la nature d'une série à termes ≥ 0 49
1.9 Séries à termes quelconques : généralités 51
1.9.1 Comparaison avec une intégrale. 51
1.9.2 Etude de la série binomiale de paramètre α réel. 54
1.9.3 Utilisation de groupements par paquets 56
1.10 Convergence au sens de Poisson des séries numériques 57
C - Familles sommables 63
1.10.1 Commençons donc par des exemples de familles sommables 63
1.10.2 Des applications des théorèmes de Fubini et de sommation par paquets. 66

1.10.3 Familles sommables et arithmétique 68
1.10.4 Famille sommable associée à une suite de carré sommable : inégalité de Hilbert. 70
1.10.5 Des exemples laissés aux soins du lecteur. 71
Chapitre 2 : SUITES et SERIES DE FONCTIONS 73
2.1 Rappels de cours 74
2.2 Des cas importants où la convergence simple implique la convergence uniforme 77
2.2.1 Le théorème de Dini 77
2.2.2 Un théorème d'Ascoli 79
2.2.3 Des théorèmes "moins connus" 81
2.3 Approximation uniforme d'une fonction réelle continue sur un segment [a, b] 83
2.4 Théorème de densité trigonométrique de Weierstrass 85
2.5 Approximations uniformes via les noyaux de Poisson ou de Dirac 90
2.5.1 Utilisation du noyau de Poisson : procédé de sommation d'Abel 90
2.5.2 Noyaux de Dirac et suites régularisantes associées 93
2.6 En pratique, comment peut-on s'y prendre pour démontrer la convergence uniforme ? 98
2.7 Une série de fonctions liée à l'équation de la chaleur 105
2.8 Techniques d'estimation Taubériennes des sommes de séries de fonctions 113
Chapitre 3 : LES SERIES ENTIERES. 123
3.1 Rappels de cours 124
3.2 Des développements en SE "essentiels" 126
3.3 Approches pratiques assurant l'existence d'un développement en SE. 127
3.3.1 D'abord, pour commencer, un exemple : 127
3.3.2 Cas des fonctions absolument monotones. 128
3.3.3 Approche dite de "l'équation différentielle" 130
3.3.4 Cas où la fonction à développer f est du type $f = \frac{1}{g}$ 134
3.3.5 Cas où f est une fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle : 137
3.4 Inégalités de Cauchy 139
3.4.1 Les inégalités de Cauchy 139
3.4.2 Applications 139
3.5 Analyticité des fonctions sommes de SE Applications 143
3.5.1 Elle fait l'objet de l'énoncé suivant : 143
3.5.2 Application : la série génératrice des polynômes d'Hermite 144

3.6 Comportement de la somme d'une SE réelle aux bornes de son intervalle de convergence 145
3.6.1 Le théorème de la convergence radiale d'Abel-Dirichlet. 145
3.6.1.1 C'est un théorème qui a pour objet "d'étendre" le champ de la convergence uniforme pour une SE de variable réelle. 145
3.6.1.2 Remarques et applications : 146
3.6.1.3 Exemple d'application : Calcul pour $\theta \in]0, 2\pi[$ de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ 147
3.6.2 Cas où la suite (a_n) est positive et où $\sum_{n\geq 0} a_n R^n = +\infty$ 149
3.6.2.1 L'étude du comportement de f au voisinage de x = R est souvent réglée à l'aide de l'énoncé suivant. 149
3.6.2.2 Des exemples d'application 150
3.6.2.3 D'autres techniques très efficaces dans le cas où $\sum_{n\geq 0} a_n R^n = +\infty$ 153
3.7 Séries entières et dénombrements. 157
3.8 Séries entières et équations différentielles 166
3.9 Séries entières lacunaires 170
3.9.1 Définition : 170
3.9.2 Un résultat valable pour toutes ses SE lacunaires du type $\sum_{n\geq 0} x^{p_n}$ 170
3.9.3 Deux exemples de SE lacunaires 172
3.9.3.1 Cas de $\psi(x)$: 172
3.9.3.2 Cas de $\varphi(x)$: 173
3.10 Un résultat important concernant les SE $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ de rayon de convergence égal à 1 où $a_n \geq 0$ pour tout n 174
Chapitre 4 : CALCUL INTEGRAL 183
4.1 Rappels de cours 183
A - Rappels de cours de mathématiques supérieures 184
B - Rappels de cours de deuxième année 185
4.2 Exercices d'initiation au calcul intégral 190
A - Autour du théorème de la convergence dominée 190
B - Des énoncés de calcul intégral très utiles en analyse 195
4.3 Calculs d'intégrales classiques 225
4.3.1 Calcul de l'intégrale de Dirichlet 225

4.3.2 Les intégrales de Fresnel 227
4.3.3 Calcul de l'intégrale de Gauss 227
4.3.4 Calcul des intégrales de Poisson 229
4.3.5 Des calculs intégraux utilisant le cours et ce qui précède 232
4.4 Le produit de convolution intégral. 237
4.5 Fonctions définies par des intégrales 247
4.5.1 Transformée de Fourier de la densité du khi-deux a une dimension . 248
4.5.2 Transformée de Fourier de la fonction de Gauss : 252
4.5.3 Identité de Poisson. 254
4.5.4 Encore quelques calculs de fonctions définies par une intégrale 260
4.6 La transformation intégrale de Fourier. 262
4.6.1 Définition et exemples 262
4.6.2 La formule d'inversion de Fourier. 263
4.6.3 Applications de la formule d'inversion aux fonctions de la classe de Schwartz 266
4.6.4 Application de la transformée de Fourier au produit de convolution 268
4.6.5 Transformée de Fourier et formule sommatoire de Poisson 269
4.6.6 Formules de Parseval et de Plancherel : applications. 271
INDEX ALPHABETIQUE 277

INTRODUCTION

L'analyse est le compartiment des mathématiques où se réalise le "passage du fini à l'infini", d'abord par l'étude des suites, puis par celle des séries et enfin par celle de l'intégration via le langage "universel" de la topologie.
Cela est souvent dit et répété dans cet ouvrage, le passage du "fini à l'infini" s'effectue dans de bonnes conditions car le corps des réels $\mathbb{R}$ est complet ; autrement dit lorsqu'une suite, numérique ou de fonctions, vérifie une certaine contrainte dans le champ du fini, appelée critère de Cauchy, elle permet la création d'un nouvel élément mathématique, qui lui est attaché, par "passage à la limite" ; lorsqu'on a compris ce processus, on a tout compris en analyse.
Voilà dans quel état d'esprit ce recueil a été rédigé à destination des élèves de mathématiques spéciales MP, MP* et PSI*, mais aussi des candidats au CAPES et à l'Agrégation.

L'auteur :
Pierre Meunier.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

Chapitre 1

SUITES - SERIES - FAMILLES SOMMABLES.

Ce premier chapitre aborde les fondements de l'Analyse où il convient de donner un sens à une "somme infinie" de nombres réels ou complexes ; bien évidemment, une telle gageure trouve un aboutissement grâce à la structure topologique du corps des réels puisque celui-ci est complet.
En d'autres termes, une suite (resp. une série) converge, si et seulement si elle vérifie une certaine contrainte à distance finie, connue sous le nom de critère de Cauchy, à partir de laquelle il est ainsi possible d'affirmer qu'une "chose existe" sans qu'il soit nécessaire de l'exhiber.
Le critère de Cauchy est donc d'une importance cruciale dans l'étude des suites et séries ; c'est la raison pour laquelle les approches théoriques et pratiques le concernant sont soulignées avec insistance dans ce chapitre qui est organisé selon les rubriques suivantes :

1) Rappels de cours.
2) Suites numériques sous-additives.
3) Etude de la suite $\left(e^{in}\right)$.
4) Suites équiréparties.
5) Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
6) Inégalités de Gronwall, Carleman et Hardy.
7) Séries à termes positifs.
8) Séries à termes quelconques.
9) Convergence au sens de Poisson : théorème de Tauber.
10) Familles sommables : exemples et utilisations arithmétiques.

1.1 Rappels de cours.

$\underline{R_1}$

Si (a_n) est une suite de réels croissante les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) (a_n) est une suite convergente dans $\mathbb{R}$.

(i,i) (a_n) est une suite majorée ie : il existe M réel tel que $a_n \leq M$ pour tout entier n ; dans ces conditions on peut écrire :

$$\lim_{\infty}(a_n) = \mathrm{Sup}\{a_n,\ n \geq 0\}.$$

R_2
Soit (u_n) une suite de nombres complexes ; alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :
(i) la suite (u_n) est convergente dans $\mathbb{C}$
(i,i) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \geq p,\ \forall m \geq p)(|u_n - u_m| \leq \varepsilon)$ ce qui signifie que la suite (u_n) vérifie le critère de Cauchy.

R_3
(i) Soit (u_n) une suite bornée de nombres complexes ; cette suite est convergente dans $\mathbb{C}$ si et seulement si elle n'a qu'une valeur d'adhérence.
(i,i) Si (x_n) est une suite de réels et si dans $\overline{\mathbb{R}}$ sa limite inférieure coïncide avec sa limite supérieure cette suite est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.

R_4 Théorème des moyennes de Césaro
(i) Soit (u_n) une suite de $\mathbb{C}$ convergeant vers un nombre z ; si (ε_n) est une suite de réels positifs tels que la série $\sum_{n\geq 0} \varepsilon_n$ diverge, alors la suite (v_n) de $\mathbb{C}$ définie par :

$$v_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_k}{\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k}$$ converge elle aussi vers z

(i,i) Si (u_n) est à valeurs réelles la conclusion (i) reste encore vraie même si $z \in \{-\infty, +\infty\}$

R_6
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs ; si on suppose que $\lim_{\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ existe et vaut α, alors la suite $\left(u_n^{\frac{1}{n}}\right)$ est convergente elle aussi vers α.

R_7

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et (f_n) une suite d'applications continues par morceaux, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et intégrables sur I (ie $\int_I |f_n| < +\infty$) ; si l'on suppose :

(i) qu'il existe f, application de I dans $\mathbb{C}$ continue par morceaux telle que pour tout $x \in I$, $f(x) = \lim_{\infty}(f_n(x))$

(i,i) qu'il existe φ, application de I dans $[0, +\infty[$, continue par morceaux, intégrable sur I telle que $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n entier. Alors :

a) la fonction f est intégrable sur I

b) la suite (u_n) de $\mathbb{C}$ définie par : $u_n = \int_I f_n$ est convergente dans $\mathbb{C}$ vers $\int_I f$. (théorème de la convergence dominée de Lebesgue)

R_8

Soit (a_n) une suite de nombres réels ou complexes ; alors les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) la suite (u_n) est convergente dans $\mathbb{C}$

(i,i) la série $\sum_{n=0}^{\infty}(u_{n+1} - u_n)$ est convergente dans $\mathbb{C}$.

R_9

Une série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{C}$ est convergente ssi elle vérifie le critère de Cauchy ie : $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists\, p \in \mathbb{N})(\forall n \geq p,\ \forall k \in \mathbb{N})\left(\left|\sum_{i=n}^{n+k} a_i\right| \leq \varepsilon\right)$.

En particulier toute série absolument convergente (ie telle que $\sum_{n\geq 0}|a_n| < +\infty$) est convergente.

$\underline{R_{10}}$

Soit (a_n) une suite de réels ≥ 0 ; alors les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge dans $\mathbb{R}$

(i,i) Il existe $M > 0$ tel que $\sum_{k=0}^{n} a_k \leq M$ pour tout n entier (on spécifie (i,i) en écrivant $\sum_{n\geq 0} a_n < +\infty$).

$\underline{R_{11}}$

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs.

(i) Si on suppose $a_n \leq b_n$ pour tout entier n alors :

$$\sum_{n\geq 0} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n < +\infty$$

$$\sum_{n\geq 0} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 0} b_n < +\infty$$

(i,i) si on suppose $a_n \sim b_n$ à l'infini les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sont de même nature et pour n tendant vers l'infini :

$\sum_{k=0}^{n} a_k$ est équivalent à $\sum_{k=0}^{n} b_k$ en cas de divergence

$\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ est équivalent à $\sum_{k=n}^{\infty} b_k$ en cas de convergence.

R_{12} (Technique de sommation - encadrement).
Soit f une application de $[0, +\infty[$ dans lui-même continue et décroissante ; alors les énoncés suivants sont équivalents :

(i) la série $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ est convergente.

(i,i) f est intégrable sur $[0, +\infty[$ (ie $\int_0^{\infty} f < +\infty$).

Lorsqu'il y a convergence, pour tout n entier, on peut écrire :

$$\int_n^{\infty} f \leq \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \leq f(n) + \int_n^{\infty} f$$

R_{13}

(i) Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série de nombres complexes et α la limite supérieure de $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)$ lorsque n tend vers l'infini. Alors :

$$\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty \text{ ie } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ est absolument convergente.}$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$$

Dans le cas où $\alpha > 1$ il existe même une sous-suite de la suite (a_n) qui tend vers $+\infty$.

(i,i) si $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ admet une limite $\beta\left(\beta \in \overline{\mathbb{R}}_+\right)$ on peut écrire :

$$\beta < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} |a_n| < +\infty$$

$$\beta > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} |a_n| = +\infty$$

(Critères de Cauchy et de d'Alembert).

$\underline{R_{14}}$
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Alors il existe $C > 0$ tel que : $a_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$ et $\sum_{n\geq 0} a_n < +\infty$ ssi $\alpha > 1$ (règle de Raabe et Duhamel).

$\underline{R_{15}}$
Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries numériques absolument convergentes et (c_n) la suite définie par :

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ est absolument convergente (ie $\sum_{n\geq 0} |c_n| < +\infty$) et on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

(règle de convolution ou produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes).

$\underline{R_{16}}$ Théorème spécial des séries alternées.
Soit (a_n) une suite décroissante vers 0 de réels positifs ; alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ est convergente et pour tout entier naturel n le reste $\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k$ est du signe de $(-1)^n$ et tel que : $\left|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k\right| \leq a_n$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com