浙大优学

一题一课

刷百题不如解透一题

顾问：罗增儒　彭翕成

QQ群“中国数学解题研究会”智慧结晶

学大教育郑州分公司教研成果

高中数学解题研究

第1辑　小题大做

齐建民◎主编

一题多解　多种解法拓宽解题思维

一题多思　多种反思掌握解题思想

一题多变　多种变式熟练解题方法

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

高中数学解题研究

第1辑:小题大做

顾　　问:罗增儒　彭翕成

主　　编:齐建民

副 主 编:宫前长

编　　委:侯有岐　赵　蒙　张　平　梅　磊
赵艺琳　韩长峰　王成功　宋建辉
邬天泉　汪亚洲　宫前长　张培强
郝世富　刘彦永　许　丽　王　威
刘紫阳　宫　旭　白成乐　陈　斌
韩文美　李　歆　杨育池　龙　宇
杨春波　童永奇　于小平　董　强
胡丽春　张增明　齐建民　康东明
汪仁林　周著会　张登峰　王　耀
白丽萍　李小峰　李莎莎　万　强
王志山　刘　翀　杨彩清　李建华
王　波

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题研究. 第1辑,小题大做/齐建民主编.
—杭州:浙江大学出版社,2016.10(2016.11重印)
ISBN 978-7-308-16235-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①齐… Ⅲ.①中学数学课—高中—题解—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第229546号

高中数学解题研究 第1辑:小题大做
主编 齐建民

策　　划 陈海权(QQ:1010892859)
责任编辑 夏晓冬
责任校对 沈炜玲
封面设计 杭州林智广告有限公司
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号 邮政编码310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷 浙江省邮电印刷股份有限公司
开　　本 889mm×1194mm 1/16
印　　张 5
字　　数 150千
版 印 次 2016年10月第1版 2016年11月第2次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-16235-7
定　　价 9.80元

与解题研究的同行们共勉：

解题能力是数学教师的一个专业制高点，研究解题是专业攀登的一座发展里程碑。

成为解题专家不仅要自己知道“怎样解题”，而且能指导学生也“学会解题”。

谁也无法教会我们解所有的数学题，重要的是，通过有限道题的学习去领悟那种能解无限道题的数学素养。

数学上负数比零更小，解题中没有想法比想错了更糟。

数学上实数和虚数都是真实的数，奋斗中成功与失败都是生命的歌。

罗增儒

2016.7于西安

古之达人
推而通之
小中见大
一为千万

祝《小题大做》出版

俞成

2016.7.16

刷百题不如解透一题(以小搏大)

美国著名数学家哈尔莫斯曾说过:问题是数学的心脏。对学生来说,各类考试题无疑是我们最熟悉的一种“问题”。如何提升学生的解题能力,是每个老师思考的重要课题。经过大量理论和教学实践证明,一题多解是提高解题能力的有效途径,作为《高中数学解题研究》的第1辑,《小题大做》正是我们在此方面的一次尝试。

“以小搏大”是《小题大做》的写作初衷。我们从2014—2016年这三年的高考题中精选了36道小题(选填题),这些题目构思精巧,条件与结论简洁明了,解法多样,引人多思,是锻炼学生思维能力、提高综合运用数学知识能力的绝佳载体,我们希望通过对一道题目的多角度解决、思考、变式,借题发挥,探索规律和方法,达到“做一题,通一类,会一片”的目的。本书有三个特点:

(1)一题多解

在呈现不同解法的同时,重在暴露思维过程:为什么会想到这样解,每一个解法的“念头”是什么,不同的解法都用到了哪些知识。

(2)一题多思

对多种解法进行反思,提炼共性,区分个性,揭示不同解法之间的关联,解题的关键步骤是什么,从这道题的解法提炼出一类题的解法套路。

(3)一题多变

精选了相关内容或相关方法的足量练习,意在巩固与提高,题目新颖,难度以中档题为主,让学生面临新情境,不思考做不了,跳一跳够得着。

本书的作者均是一线教师,他们有着丰富的教学经验与娴熟的写作技巧,了解学生的阅读习惯,在写作时避免简单的解法罗列,不做解题方法的搬运工!即使是众所周知的解法,也重新组织语言,用一种解题叙事的方式娓娓道来,不仅让你看清怎样“解”,更重要的是呈现怎样“想”。我们努力使本书超越“36道题的N种解法大全”的资料层次,使之成为既谈“怎样解题”又谈“怎样学习解题”的解题教科书。

本书的写作团队来自学大教育郑州分公司及中国数学解题研究会QQ群(47224687),前者是国内知名教育机构,个性化教育的领跑者;后者是国内颇具影响力的数学教育研究社群,一直致力于数学教育的普及与推广。本书既是“群”策“群”力的结晶,又是强强合作的产物,在此感谢所有参与本书写作的QQ群友宫前长、张平、梅磊、张培强等老师,感谢大家一直以来对解题研究会的支持!感谢学大教育郑州分公司的高中数学团队于小平、王莹莹、刘秋华、王自备、李海慧、尹磊、何念、李佳等老师,在繁忙的工作之余这些老师参与了从选题到审稿、校对等一系列工作,他们的专业水准与严谨的工作作风为本书增色不少。

《高中数学解题研究》的前身是《解题研究》,“中国数学解题学第一人”罗增儒教授、著名数学科普作家彭翕成老师自创刊始担任顾问,两位专家对刊物发展给予了很多指导,在此向两位老师致以诚挚的感谢!有兴趣的读者可以去 www.jietiyanjiu.com 下载往期电子版。

《小题大做》的写作中还得到了郑良、韦兴洲、蔡玉书、蒋寿义、许永忠、陈泽桐诸位的协助,感谢他们在审稿方面所做的工作。由于水平有限,时间仓促,难免会出现一些纰漏甚至错误,请读者批评指正。欢迎加入《高中数学解题研究》读者交流 QQ 群:281322406 与我们一起进行“高中数学解题研究”。2017 年上半年将会陆续出版《第 2 辑:大题细做》、《第 3 辑:数学文化高考专题》。

齐建民
(学大教育郑州分公司教研总监)

Contents

目录

第一章　函数与导数

第二章　立体几何

第三章　解析几何

第四章　平面向量、三角函数

第五章　数列与不等式

第一章　函数与导数

抽象化有形,明白解函数

[陕西省汉中市405学校　侯有岐　白丽萍]

例(2016 全国 Ⅱ 12)

已知函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$,若函数 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$,则 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)$ 等于(　　)

A. 0　　B. m　　C. $2m$　　D. $4m$

一题 多解

条件中 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 为抽象函数,题中仅给出了它满足的性质 $f(-x)=2-f(x)$,显然我们不可能求出这些交点的坐标,这说明交点坐标应该满足某种“规律”,这种规律必然和这两个函数的性质有关系,和坐标有关的性质让我们容易想到对称性:易知 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 这个函数关于点(0,1)成中心对称,那么 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是不是也关于点(0,1)成中心对称呢?基于选择题的特点,那么解题方向不外乎两个:一是判断 $f(x)$ 的对称性,利用两个函数的对称性求解;二是构造一个具体的函数 $f(x)$ 来求解.

☞ **解法1**:利用函数的对称性

已知 $f(-x)=2-f(x)$,即 $f(-x)+f(x)=2$,可知点 $(x,f(x))$ 与点 $(-x,f(-x))$ 连线段的中点是(0,1),故函数 $f(x)$ 的图象关于点(0,1)成中心对称,而 $y=\dfrac{x+1}{x}=1+\dfrac{1}{x}$ 也关于点(0,1)对称,所以两者图象的交点也关于点(0,1)对称,所以对于每一组对称点 $x_i+x_i'=0,y_i+y_i'=2$,所以 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=\sum\limits_{i=1}^{m}x_i+\sum\limits_{i=1}^{m}y_i=0+2\cdot\dfrac{m}{2}=m$,故选B.

☞ **解法2**:构造特殊函数

由 $f(-x)=2-f(x)$,我们构造一个符合条件的具体函数,$f(x)=x+1$ 显然满足此条件. 此时 $f(x)$ 与 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 的交点分别为(1,2)和(−1,0),所以 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=\sum\limits_{i=1}^{m}x_i+\sum\limits_{i=1}^{m}y_i=0+2\cdot\dfrac{m}{2}=m$,所以选B.(本解法由陕西省汉中市405学校 白丽萍提供)

一题 多思

上述解法1和解法2的本质是一样的,只是解法1具有一般性,而解法2具有特殊性. 这里我们可以总结一下关于函数对称性的一般化结论:

定理1. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且满足条件:$f(a+x)=f(b-x)$,则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称.

推论1. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且满足条件:$f(a+x)=f(a-x)$,则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

推论2. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且满足条件:$f(x)=f(2a-x)$,则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

总结:x 的系数一个为1,一个为−1,相加除以2,可得对称轴方程.

推论3. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且满足条件:$f(a+x)=f(a-x)$,又若方程 $f(x)=0$ 有 n 个根,则此 n 个根的和为 na.

定理2. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且满足条件:$f(a+x)+f(b-x)=c$(a,b,c 为常数),则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{c}{2}\right)$ 对称.

推论 1. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且满足条件：$f(a+x)+f(b-x)=0$ 成立，则 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2},0\right)$ 对称.

推论 2. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且满足条件：$f(a+x)+f(a-x)=0$（a 为常数），则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 对称.

总结：x 的系数一个为 1，一个为 -1，$f(x)$ 整理成两边，其中一个的系数为 1，另一个为 -1，存在对称中心.

定理 3. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=f(b-x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{b-a}{2}$ 对称（直线由 $a+x=b-x$ 可得）.

推论 1. 函数 $y=f(x-a)$ 与函数 $y=f(a-x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

推论 2. 函数 $y=f(a+x)$ 与函数 $y=f(a-x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称.

定理 4. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=c-f(b-x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{b-a}{2},\frac{c}{2}\right)$ 对称.

推论. 函数 $y=f(a+x)$ 与函数 $y=-f(b-x)$ 图象关于点 $\left(\frac{b-a}{2},0\right)$ 对称.

本题的两种解法，体现了解决抽象函数问题的两个重要解题策略.

一、函数性质法：先研究清楚函数的奇偶性、对称性和周期性等性质，这样函数就不再抽象了，而是变得相对具体，我们就可以画出符合性质的草图来解题.

二、特殊值法：根据对题目给出的抽象的函数性质的理解，我们找到一个符合题意的具体函数或给变量赋值，把抽象函数问题化为具体的数学问题，从而问题得解.

一题 多变

1.（2016 四川理）若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的奇函数，当 $0<x<1$ 时，$f(x)=4^x$，则 $f\left(-\frac{5}{2}\right)+f(1)=$ ________.

2.（2016 天津理）已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 若实数 a 满足：$f(2^{|a-1|})>f(-\sqrt{2})$，则 a 的取值范围是________.

3.（原创）定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+6)=f(x)$，当 $-3\leqslant x<-1$ 时，$f(x)=-(x+2)^2$；当 $-1\leqslant x<3$ 时，$f(x)=x$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2016)$ 等于（　　）

A. 335　　B. 336　　C. 1678　　D. 2016

4.（2016 全国 Ⅱ 文）已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，若函数 $y=|x^2-2x-3|$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_m,y_m)，则 $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i$ 等于（　　）

A. 0　　B. m　　C. $2m$　　D. $4m$

5.（2013 湖南文）已知 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，且 $f(-1)+g(1)=2$，$f(1)+g(-1)=4$，则 $g(1)$ 等于（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

6.（2014 皖北八校联考）定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，$f(x-2)=f(x+2)$，且 $x\in(-2,0)$ 时，$f(x)=2^x+\frac{1}{2}$，则 $f(2013)$ 等于（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ±1

答案：**1.** -2　**2.** $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$　**3.** B　**4.** B　**5.** B　**6.** A

分段函数分类论，正难则反对针锋

[北京市第二中学　赵　蒙]

例(2016 北京理 14)

已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x,x\leqslant a,\\-2x,x>a.\end{cases}$

(1) 若 $a=0$，则 $f(x)$ 的最大值为________；

(2) 若 $f(x)$ 无最大值，则实数 a 的取值范围是________.

一题多解

本题是含参数的分段函数，参数在定义域中，结论是参数的取值范围与最值. 分段函数的取值范围问题有两种基本思路：一是分类讨论，分段处理最值问题；二是整体考虑，正难则反. 同时，也可以动态平移直线，直观凸显最值.

解法 1：分段处理，分类讨论

记 $g(x)=x^3-3x$，$h(x)=-2x$，同时作出函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图象，如图 1-1 所示，则 $h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，下面分析 $g(x)$ 的单调性. 因为 $g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，当 x 变化时，$g'(x)$ 和 $g(x)$ 变化如下：

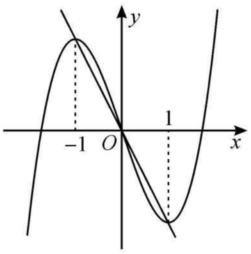
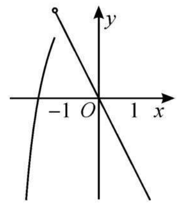
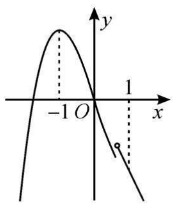
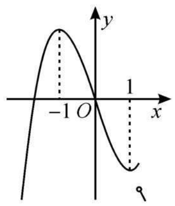


图 1-1

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

下面分析 $f(x)$ 的单调性，注意到 $f(x)=\begin{cases}g(x),x\leqslant a,\\h(x),x>a,\end{cases}$

结合前面 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的单调性，我们可以按下述三种情况讨论：

$a<-1$	$-1\leqslant a<1$	$a\geqslant 1$
 图 1-2	 图 1-3	 图 1-4

(1) 若 $a<-1$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的最大值为 $f(a)$，由 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，$f(a)=g(a)<g(-1)=2$，而 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上无最大值，取值范围是 $(-\infty,-2a)$，由于 $-2a>2$，此时函数 $f(x)$ 无最大值，符合题意.

(2) 若 $-1\leqslant a<1$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的最大值为 $f(-1)=2$，且当 $x>a$ 时，$f(x)=h(x)<h(a)\leqslant h(-1)=2$，则当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得最大值，不符合题意.

(3) 若 $a\geqslant 1$，由 $g(x)$ 的单调性可得，$f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的最大值为 $f(-1)$ 或 $f(a)$，令 $M=\max\{f(-1),f(a)\}$，则有 $M\geqslant f(-1)=2$，而当 $x>a$ 时，$f(x)=h(x)<h(a)\leqslant h(1)=-2$，则 $f(x)$ 有最大值 M，不符合题意.

综上，若 $f(x)$ 无最大值，则实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)$.

解法 2：整体考虑，正难则反

仍记 $g(x)=x^3-3x$，$h(x)=-2x$，由解法 1 知 $h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，且当 x 变化时，$g'(x)$ 和 $g(x)$ 变化如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由于 $h(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递减，无最大值，

若 $f(x)$ 有最大值，也只可能在 $x=-1$ 或 $x=a$ 处取得，同时作出函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图象，如图 1-5 所示，容易求得它们的交点分别是 $(-1,2)$，$(0,0)$ 和 $(1,-2)$．注意到 $g(-1)=h(-1)=2$，由图象可见，若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得最大值，实数 a 的取值范围是 $[-1,2]$，若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得最大值，实数 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$．综上，若 $f(x)$ 有最大值，则实数 a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$，从而，若 $f(x)$ 无最大值，则实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)$．故填 $(-\infty,-1)$．

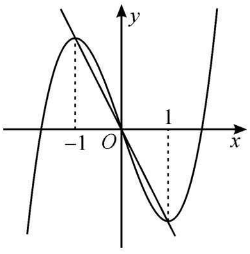


图 1-5

☞ **解法 3**：平移直线 $x=a$，直接秒杀

根据题意，将函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x, x\leqslant a,\\-2x, x>a\end{cases}$ 采用分离的方式，标记 $g(x)=x^3-3x$，$h(x)=-2x$，同时在同一平面直角坐标系中作出函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图象，将直线 $x=a$ 在图象中沿着 x 轴左右平移，观察直线 $x=a$ 与函数 $g(x)$，$h(x)$ 的图象的交点（曲线点实，直线点虚）变化，如图 1-6 所示，当直线 $x=a$ 在直线 $x=-1$ 左边时满足条件“$f(x)$ 无最大值”，容易得到实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)$．故填 $(-\infty,-1)$．（本解法由甘肃天水市第一中学 宫前长提供）

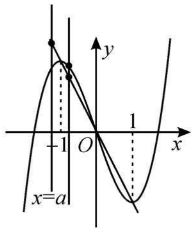


图 1-6

一题 多思

首先，处理研究分段函数的最值问题，通常要考虑函数在各段的变化方式和取值范围．解法 1 分段处理，解法 2 整体考虑，解法 3 却巧用垂直于 x 轴的直线平移直接秒杀．

其次，本题的三种解法体现了三种重要的解题策略．

一、分类讨论：研究分段函数 $f(x)$ 的单调性，大多借助分类讨论 $f(x)$ 在各个分段上的最值．如解法 1 是根据 $g(x)$ 的单调性，对 a 进行分类讨论．

二、整体思想：从函数的整体性质（单调性、奇偶性和周期性）出发，研究函数的最值问题．当一个问题从正面不好入手时，也可从反面思考．如解法 2 就采取正难则反的想法解题．

三、数形结合：解法 3 是利用数形结合的思想直观的得到结果．这就是分段函数的最值问题的解题套路．

一题 多变

1.（2013 北京文）函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x, x\geqslant 1,\\2^x, x<1\end{cases}$ 的值域为________．

2.（2015 湖南理）已知分段函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, x\leqslant a,\\x^2, x>a,\end{cases}$ 若存在实数 b，使函数 $g(x)=f(x)-b$ 有两个零点，则 a 的取值范围是________．

3. 已知 $f(x)=m(x-2m)(x+m+3)$，$g(x)=2^x-2$．若同时满足下列条件：

① 对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)<0$ 或 $g(x)<0$；

② 存在 $x\in(-\infty,-4)$，$f(x)g(x)<0$，

则 m 的取值范围是________．

4.（2014 上海理）设 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, x\leqslant 0,\\x+\dfrac{1}{x}+a, x>0.\end{cases}$ 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，则 a 的取值范围为（　　）

A. $[-1,2]$　　B. $[-1,0]$

C. $[1,2]$　　D. $[0,2]$

5.（2016 山东理）已知分段函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, x\leqslant m,\\x^2-2mx+4m, x>m,\end{cases}$ 其中 $m>0$，若存在实数 b，使得关于 x 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根，则 m 的取值范围是________．

答案：**1.** $(-\infty,2)$　**2.** $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　**3.** $(-4,-2)$　**4.** D　**5.** $(3,+\infty)$

等价变形巧分离，极限特值妙求参

［学大教育内蒙古分公司　张　平］

例（2015 新课标 Ⅰ 理 12）

设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\left[-\frac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$　　B. $\left[-\frac{3}{2\mathrm{e}},\frac{3}{4}\right)$

C. $\left[\frac{3}{2\mathrm{e}},\frac{3}{4}\right)$　　D. $\left[\frac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$

一题 多解

本题的难点在于，条件中存在两个未知量，一个是待求的 a，它的大范围是 $a<1$，还有一个未知量是"整数 x_0"，这个 x_0 是正是负，我们都不清楚，所以我们可以采取的策略是缩小 a 与 x_0 的范围，先解决问题的一部分，通过步步逼近来使问题获解.

☞ **解法 1**：充要条件法

若 $a\leqslant 0$，则对任意负整数 m，有 $f(m)=\mathrm{e}^m(2m-1)-a(m-1)<0$，不符合题中唯一要求，故必有 $0<a<1$. 由于 $f'(x)=\mathrm{e}^x(2x+1)-a$，易知当 $x\leqslant -1$ 时 $f'(x)\leqslant -\mathrm{e}^{-1}-a<0$，当 $x\geqslant 1$ 时 $f'(x)\geqslant 3\mathrm{e}-a>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

注意到 $f(1)=\mathrm{e}>0$，所以在 $(1,+\infty)$ 内不存在正整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$.

又 $f(0)=-1+a<0$，这样我们就找到了，那个唯一的整数 x_0 就是 0. 则满足题意的充要条件是 $f(-1)\geqslant 0$，即 $a\geqslant\frac{3}{2\mathrm{e}}$，故 a 的取值范围是 $\left[\frac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$.

☞ **解法 2**：洛必达法则

由洛必达法则可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x(2x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\mathrm{e}^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{-\mathrm{e}^{-x}}=0$.

若 $a\leqslant 0$，则当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，这与题设"存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$"不符，故应有 $a>0$.

求导得 $f'(x)=\mathrm{e}^x(2x+1)-a$. 当 $x\geqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 3\mathrm{e}-a>0$，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增. 又 $f(1)=\mathrm{e}>0$，故 $f(x)\geqslant 0(x\geqslant 1)$；$f(0)=a-1<0$，故存在 $x_0=0$ 使得 $f(x_0)<0$；当 $x\leqslant -1$ 时，有 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调递减. 又当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，故为了确保 x_0 的唯一性，只需 $f(-1)\geqslant 0$ 即可，得 $a\geqslant\frac{3}{2\mathrm{e}}$.

综上，a 的取值范围是 $\frac{3}{2\mathrm{e}}\leqslant a<1$，选 D.（本解法由郑州外国语学校 杨春波和其学生王天奇同学提供）

☞ **解法 3**：特殊值探路

注意到 $f(0)=a-1<0$，故 $x_0=0$. 又 x_0 唯一，故 $\begin{cases}f(1)\geqslant 0,\\ f(-1)\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant\frac{3}{2\mathrm{e}}$，所以 $\frac{3}{2\mathrm{e}}\leqslant a<1$　（＊）.

这是 a 需满足的必要条件.

求导得 $f'(x)=\mathrm{e}^x(2x+1)-a$. 当 $x\leqslant -1$ 时，$f'(x)<-a<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调递减，有 $f(x)\geqslant f(-1)\geqslant 0$；当 $x\geqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 3\mathrm{e}-a>0$，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，有 $f(x)\geqslant f(1)>0$. 可见（＊）式也是充分的.

于是，a 的取值范围就是 $\frac{3}{2\mathrm{e}}\leqslant a<1$，选 D.（本解法由郑州外国语学校 杨春波提供）

☞ **解法 4**：分离参数法

$f(x)<0\Leftrightarrow(x-1)a>\mathrm{e}^x(2x-1)$.

当 $x>1$ 时，有 $a>\frac{\mathrm{e}^x(2x-1)}{x-1}>1$，这与题设矛盾，舍去；

当 $x<1$ 时，有 $a<\frac{\mathrm{e}^x(2x-1)}{x-1}$.

记 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x(2x-1)}{x-1}$，

则 $g'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(2x+1)(x-1)-\mathrm{e}^x(2x-1)}{(x-1)^2}$

$=\frac{xe^x(2x-3)}{(x-1)^2}(x<1)$，当 $x<0$ 时，$g'(x)>0$；当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，作出其大致图象如图 1-7 所示.

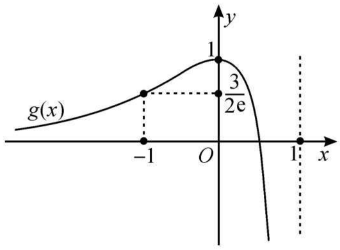


图 1-7

由题意知，存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$，即 $a<g(x_0)$，由图易知 a 的取值范围是 $\frac{3}{2e}=g(-1)\leqslant a<1$，选 D.

☞ **解法 5**：几何直观法

设 $g(x)=e^x(2x-1)$，$h(x)=ax-a$，由题意知，存在唯一的整数 x_0 使得 $g(x_0)<h(x_0)$，$g'(x)=e^x(2x+1)$，当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>-\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增. 作出 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的大致图象如图 1-8 所示.

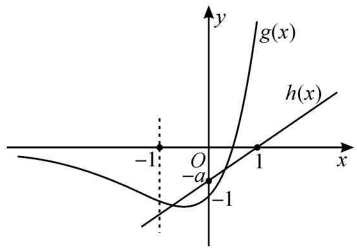


图 1-8

因为 $g(0)=-1<-a=h(0)$，故只需 $g(-1)\geqslant h(-1)$ 即可，解得 $a\geqslant\frac{3}{2e}$，则 a 的取值范围是 $\frac{3}{2e}\leqslant a<1$，选 D.（本解法由郑州外国语学校 杨春波提供）

☞ **解法 6**：排除法

取 $a=0$，则 $f(x)=e^x(2x-1)$，由于 $f(0)=-1$，$f(-1)=-\frac{3}{e}$，从而存在两个整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$，故排除 A，B；

取 $a=\frac{3}{4}$，则 $f(x)=e^x(2x-1)-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$，$f'(x)=e^x(2x+1)-\frac{3}{4}$，所以当 $x\leqslant-1$ 时 $f'(x)<0$，当 $x\geqslant1$ 时 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $f(1)=e>0$，$f(-1)=-\frac{3}{e}+\frac{3}{2}>0$，所以在 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内不存在非零整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$.

又因为 $f(0)=-\frac{1}{4}$，故存在唯一的整数 $x_0=0$ 使得 $f(x_0)<0$，从而排除 C.

一题 多思

本题的解法 1 采用充要条件直接转化进行求解，方便快捷；解法 2 是含参直接处理，难度颇大，利用极限（趋势）分析，需要敏锐的直觉（发现 $a\leqslant0$ 不合题意）；解法 3 是对解法 2 的改进，先由必要条件（一些特殊值）得 $\frac{3}{2e}\leqslant a<1$，缩小了考查范围，再在必要范围里寻找充分条件，所得即为充要条件；解法 4 是参变量完全分离，即作变通处理——参变量部分分离，参变量部分分离可以灵活分配左右两端的式子结构，达到以简驭繁的解题功效；而解法 5 则避免了参数的过度干扰，显得直截了当；解法 6 采用排除法，也是选择题常用的好方法，如何快速地选取特殊值排除错误选项也是一种能力！

含参数的函数问题是高考中的难点，常出现在压轴位置，我们可归纳出下列解题策略.

一、直接法：为了得到含参函数的单调性与最值，往往需要对参数进行分类讨论，这种分类有时需要我们对函数式的结构进行认真观察，发现其突破口，如解法 1；

二、参变量分离法：结合题意，根据参数分离后所得函数的图象，讨论参数的取值范围，分离又有完全分离与不完全分离两种.

一题 多变

（由郑州外国语学校 杨春波提供）

1.（2015 秋广东校级月考）设函数 $f(x)=(x-2)\ln x-ax+1$，若存在唯一的整数 x_0，使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\frac{1+\ln3}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},\frac{1+\ln3}{3}\right]$

C. $\left(\frac{1+\ln3}{3},1\right)$　　D. $\left[\frac{1+\ln3}{3},1\right)$

2.（2016 春·吴忠校级月考）设函数 $f(x)=xe^x-ax+a$，若存在唯一的整数 x_0，使得 $f(x_0)<$

0,则实数 a 的取值范围是________.

3.(2016 太原一模) 若函数 $f(x)=x^2+\frac{2}{x}-a\ln x(a>0)$ 有唯一零点 x_0,且 $m<x_0<n(m,n$ 为相邻整数),则 $m+n$ 的值为(　　)

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 7

4.(原创) 已知函数 $f(x)=a\ln x$,若在其定义域内存在唯一整数 x_0,使得 $x_0f(x_0)<1$,则实数 a 的取值范围是________.

答案:**1.** B　**2.** $\frac{2}{3e^2}\leqslant a<\frac{1}{2e}$ 或 $2e^2<a\leqslant\frac{3e^3}{2}$　**3.** C　**4.** $a\geqslant\frac{1}{2\ln 2}$

导数诚可贵,构造价更高

[湖北武汉黄陂六中　梅　磊]

例(2015 全国 Ⅱ 理 12)

设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的导函数,$f(-1)=0$,当 $x>0$ 时,$xf'(x)-f(x)<0$,则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

B. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

D. $(0,1)\cup(1,+\infty)$

一题　多解

本题给出了一个抽象函数及其满足的若干条件,要求解一个不等式.要知道不等式与等式是紧密相关的,要解不等式 $f(x)>0$,必然与等式 $f(x)=0$ 有关,这样顺藤摸瓜地思考.很明显,我们需要对这个函数的性质再继续挖掘,一定要能直接或间接判断函数的单调性才行.下面的解题方向有两个:构造一个抽象函数或构造一个具体函数.

☞ **解法 1:**构造抽象函数法

观察 $xf'(x)-f(x)<0$ 这个式子的特征,不难想到商的求导公式,尝试设 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$.因为 $f(x)$ 是奇函数,故 $F(x)$ 是偶函数,$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$,易知当 $x>0$ 时,$F'(x)<0$,所以函数 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.又 $f(-1)=0$,则 $f(1)=0$,于是 $F(-1)=F(1)=0$,$f(x)=xF(x)$,解不等式 $f(x)>0$,即找到 x 与 $F(x)$ 的符号相同的区间,易知当 $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ 时,$f(x)>0$.选 A.

☞ **解法 2:**构造具体函数法

题目中没有给出具体的函数,但可以根据已知条件构造一个具体函数,越简单越好,因此考虑简单的多项式函数.设 $f(x)$ 是多项式函数,因为 $f(x)$ 是奇函数,所以它只含 x 的奇次项.又 $f(1)=-f(-1)=0$,所以 $f(x)$ 能被 x^2-1 整除.因此可取 $f(x)=x-x^3$,检验知 $f(x)$ 满足题设条件.解不等式 $f(x)>0$,得 $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$.选 A.

一题　多思

解法 1、解法 2 都是采用构造函数法.解法 1 是构造抽象函数,解法具有一般性,解法 2 是构造具体函数,解法有局限性.

抽象函数的导数问题在高考中常考常新,可谓变化多端.在函数构造中,联系导数的四则运算和复合运算法则,使分散的多个函数的导数关系转化为集中的单个函数的导数关系,向着有利于判断函数单调性方向发展.在构造中有的可以直接构造,有的需要进行变形构造,不管哪种构造,都需要结合问题的外形结构特征与求导法则的结构特征进行合理构造,正所谓“求导诚可贵,构造价更高”.

常见的构造函数方法有如下几种.

1　利用和差函数求导法则构造函数

(1) 对于不等式 $f'(x)+g'(x)>0$(或 <0),构造函数 $F(x)=f(x)+g(x)$;

(2) 对于不等式 $f'(x)-g'(x)>0$(或 <0),构造函数 $F(x)=f(x)-g(x)$;

特别地,对于不等式 $f'(x)>k$(或 $<k$)$(k\neq 0)$,构造函数 $F(x)=f(x)-kx$.

2　利用积商函数求导法则构造函数

(3) 对于不等式 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$(或 <0)，构造函数 $F(x)=f(x)g(x)$；

(4) 对于不等式 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0$(或 <0)，构造函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$；

上述(3)(4)都是利用积商函数求导法则的一般情况，但在考试中，$g(x)$ 往往是具体函数，所以还有一些常见的利用积商函数求导法则的特殊情况，如下列(5)～(16).

(5) 对于不等式 $xf'(x)+f(x)>0$(或 <0)，构造函数 $F(x)=xf(x)$；

(6) 对于不等式 $xf'(x)-f(x)>0$(或 <0)，构造函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}(x\neq 0)$；

(7) 对于不等式 $xf'(x)+nf(x)>0$(或 <0)，构造函数 $F(x)=x^nf(x)$；

(8) 对于不等式 $xf'(x)-nf(x)>0$(或 <0)，构造函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x^n}(x\neq 0)$；

(9) 对于不等式 $f'(x)+f(x)>0$(或 <0)，构造函数 $F(x)=e^xf(x)$；

(10) 对于不等式 $f'(x)-f(x)>0$(或 <0)，构造函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$；

(11) 对于不等式 $f'(x)+kf(x)>0$(或 <0)，构造函数 $F(x)=e^{kx}f(x)$；

(12) 对于不等式 $f'(x)-kf(x)>0$(或 <0)，构造函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^{kx}}$；

(13) 对于不等式 $f(x)+f'(x)\tan x>0$(或 <0)，构造函数 $F(x)=\sin xf(x)$；

(14) 对于不等式 $f(x)-f'(x)\tan x>0$(或 <0)，构造函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}(\sin x\neq 0)$；

(15) 对于不等式 $f'(x)-f(x)\tan x>0$(或 <0)，构造函数 $F(x)=\cos xf(x)$；

(16) 对于不等式 $f'(x)+f(x)\tan x>0$(或 <0)，构造函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}(\cos x\neq 0)$.

一题　多变

1.(2004 湖南理 12) 设 $f(x)$，$g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数和偶函数. 当 $x<0$ 时，$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$，且 $g(-3)=0$，则不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集是(　　)

A. $(-3,0)\cup(3,+\infty)$

B. $(-3,0)\cup(0,3)$

C. $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

D. $(-\infty,-3)\cup(0,3)$

2.(2007 陕西理 11) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的非负可导函数，且满足 $xf'(x)+f(x)\leqslant 0$，对于任意正数 a、b，若 $a<b$，则必有(　　)

A. $af(a)\leqslant f(b)$　　B. $bf(b)\leqslant f(a)$

C. $af(b)\leqslant bf(a)$　　D. $bf(a)\leqslant af(b)$

3.(2009 天津文 10) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的导函数为 $f'(x)$，$2f(x)+xf'(x)>x^2$，则下面的不等式在 $\mathbf{R}$ 上恒成立的是(　　)

A. $f(x)>0$　　B. $f(x)<0$

C. $f(x)>x$　　D. $f(x)<x$

4.(2011 辽宁文 11 理 11) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-1)=2$，对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f'(x)>2$，则不等式 $f(x)>2x+4$ 的解集是(　　)

A. $(-1,1)$　　B. $(-1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

5.(2015 福建理 10) 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=-1$，其导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x)>k>1$，则下列结论中一定错误的是(　　)

A. $f\left(\dfrac{1}{k}\right)<\dfrac{1}{k}$　　B. $f\left(\dfrac{1}{k}\right)>\dfrac{1}{k-1}$

C. $f\left(\dfrac{1}{k-1}\right)<\dfrac{1}{k-1}$　　D. $f\left(\dfrac{1}{k-1}\right)>\dfrac{1}{k-1}$

答案：**1.** D　**2.** C　**3.** A　**4.** B　**5.** C

合理化归，拾级而上

[郑州外国语学校　赵艺琳]

例（2015 四川 9）

如果函数 $f(x)=\frac{1}{2}(m-2)x^2+(n-8)x+1(m\geqslant 0,n\geqslant 0)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上单调递减，那么 mn 的最大值为（　　）

A. 16　　B. 18　　C. 25　　D. $\frac{81}{2}$

一题　多解

二次型函数的单调性问题，首先讨论二次项系数是否为 0. 若为 0，则按照一次型函数处理；若不为 0，则考虑对称轴与区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 的位置关系. 也可对 $f(x)$ 求导，要求导函数 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上恒成立即可. 最终得到关于 m,n 的不等式组（约束条件），求 mn 的最大值，转化为线性规划问题.

☞ **解法 1**：分类讨论

若 $m=2$，则 $f(x)=(n-8)x+1$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上单调递减，有 $0\leqslant n<8$；

若 $m>2$，则 $f(x)=\frac{1}{2}(m-2)x^2+(n-8)x+1$ 为开口向上的二次函数，对称轴为 $x=\frac{8-n}{m-2}$，有 $\frac{8-n}{m-2}\geqslant 2$；

若 $0\leqslant m<2$，则 $f(x)=\frac{1}{2}(m-2)x^2+(n-8)x+1$ 为开口向下的二次函数，对称轴为 $x=\frac{n-8}{2-m}$，有 $\frac{8-n}{m-2}\leqslant\frac{1}{2}$.

将以上三种情况所得不等式整理即 m,n 需要满足的约束条件：

$$\begin{cases}m=2,\\0\leqslant n<8\end{cases}\text{或}\begin{cases}m>2,n\geqslant 0,\\2m+n-12\leqslant 0\end{cases}\text{或}\begin{cases}0\leqslant m<2,n\geqslant 0,\\m+2n-18\leqslant 0,\end{cases}$$

作出可行域，如图 1-9 中阴影部分，令 $k=mn$，则 $n=\frac{k}{m}$，表示一簇反比例函数的图象. 由计算可知，当反比例函数 $n=\frac{k}{m}$ 与直线 $2m+n-12=0$ 相切时，k 最大. 此时切点为 $(3,6)$，k 的最大值为 18.

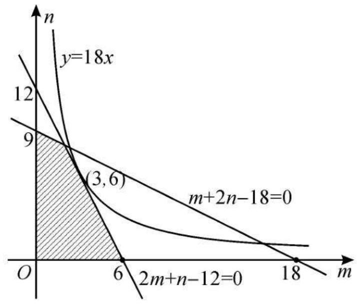


图 1-9

☞ **解法 2**：转化为恒成立问题

由题意得 $f'(x)=(m-2)x+(n-8)\leqslant 0$ 对任意的 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 恒成立，所以只需 $\begin{cases}f'\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant 0,\\f'(2)\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2m+n-12\leqslant 0,\\m+2n-18\leqslant 0.\end{cases}$ 又 $m\geqslant 0,n\geqslant 0$，故可作出可行域如图 1-9 所示. 以下同解法 1.

☞ **解法 3**：线性规划法

同前得到 m,n 需要满足的约束条件为 $\begin{cases}2m+n-12\leqslant 0,\\m+2n-18\leqslant 0,\\m\geqslant 0,n\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $0\leqslant n\leqslant 12-2m$，$mn\leqslant m(12-2m)$，设 $f(m)=m(12-2m)=2m(6-m)\leqslant 2\left(\frac{m+6-m}{2}\right)^2=18$，当且仅当 $m=6-m$，$m=3$，$n=6$ 时，等号成立. 经检验 $\begin{cases}m=3,\\n=6\end{cases}$ 满足约束条件，故 mn 的最大值为 18.