赢在思维

初中数学拉分题

解题思维训练

主编：蒋忠勇 秦佳艺 陆新生

7年级

（第三版）

★ 专题整合突破提高

★ 题型贴合考试热点

★ 解题思维方法详尽

★ 答案详细重点提示

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

赢在思维

初中数学
拉分题
解题思维训练

7年级

（第三版）

主编：蒋忠勇 秦佳艺 陆新生

编委会

蒋忠勇 陆新生 秦佳艺 汤婧雯 陈文瑜
郑春雷 刘露邑 奚祉妍 瞿 霞 何胜男
曹佳琦 汪 韩 张伊凡

（排名不分先后）

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

赢在思维. 初中数学拉分题解题思维训练. 7 年级 / 蒋忠勇，秦佳艺，陆新生主编. —3 版. —上海：华东理工大学出版社，2018.5

ISBN 978-7-5628-5439-5

Ⅰ.①赢… Ⅱ.①蒋… ②秦… ③陆… Ⅲ.①中学数学课-初中-题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 077498 号

策划编辑/ 郭 艳
责任编辑/ 张丽丽 郭 艳
装帧设计/ 视界创意
出版发行/ 华东理工大学出版社有限公司
地 址：上海市梅陇路 130 号，200237
电 话：021-64250306
网 址：www.ecustpress.cn
邮 箱：zongbianban@ecustpress.cn
印 刷/ 常熟市新骅印刷有限公司
开 本/ 787mm×1092mm 1/16
印 张/ 7.75
字 数/ 215 千字
版 次/ 2018 年 5 月第 3 版
印 次/ 2018 年 5 月第 1 次
定 价/ 25.00 元

前　言

“初中数学拉分题”系列从出版到现在，经过多次重印修订，其间我们收到很多来自读者的反馈，做了多次细节方面的改进，同时我们越来越明显地体会到，在初中数学的各类练习和考试中，每道大题的最后1～2个小题，也就是“拉分题”，通常成为拉开总分差距的决定性要素.

本次改版我们力争做到以下几点.

1. 参考多地教材，强调广泛性

为了使本书更具有广泛的适用性，编者在改版工作中参考了大量版本的教材，尽量使更多的读者受益.

2. 精选例题习题，强调典型性

本书所选每一道题都蕴含了丰富的数学思想与数学方法，充分体现了拓展思维、培养数学素养的编写思想. 同学们在学习例题的过程中，除了需要掌握基础知识与技能，发展应用数学的意识与能力，还要增强学好数学的愿望与信心.

本次改版，所选例题没有重复，并且专项训练题的设置保证了学生在学习例题之后能及时复习，便于了解学习情况，巩固解题技巧，加深对题目的理解，从而达到举一反三的目的. 拓展提高训练多选自全国各地重点高中自招题. 本丛书的习题量不大，但每个题目都能使认真思考者有所收获，并且方便一线教师在教学中灵活使用.

另外，通过对中考题型的研究，本次改版涵盖了各种中考重点题型，并且有缜密的思维分析过程，使学生们能够准确判断所属题型，并运用相应解题方法清晰答题.

3. 深度剖析例题，强调思维性

本书编写的立足点并不是题海战术，而是对每一类题目的解法的透彻理解和掌握. 通过“思维点评”指导学生学会思维方法，引导学生将每种方法和思路逐步转化为自己的理解，掌握一些常用的解题思路、策略和方法，将思维融于探究之中.

相信读者们只要按编者的编写思路进行学习、巩固、拓展，必然会取得进步. 我们坚信这本书能够让你夯实基础、拓展思维、掌握技巧，成为你取得优异数学成绩的基石.

我们也恳请教育战线的前辈与同仁给予指导和推荐，同时更希望能够得到读者的建议与批评，使我们不断改进、不断进步.

目 录

专题 1 有理数

专题 2 图形认识初步

专题 3 相交线与平行线

专题 4 平面直角坐标系

专题 1 有理数

编者引言

有理数专题是以有理数基本概念为基础，对绝对值和相反数等新概念、混合运算中乘方应用进行扩展，基本要求是知道绝对值及其相反数的意义，掌握包含绝对值及字母代数式的混合运算并能灵活运用有理数的运算解决实际问题，重难点是掌握有理数运算中符号的判定，尤其是绝对值、乘方运算中的符号问题.

有理数计算中的难点集中在符号问题上，有理数的运算类型多变，方法多种多样，本专题的编排顺序是含绝对值和字母代数式的运算与化简，含绝对值的方程解法，较为复杂的乘方运算等.

经典拉分题 解析

题 1

(绝对值概念)已知 x、y 是有理数，且 $|3x-4|+|5y+7|=0$，求 x^2+y 的值.

满分解答

由题意得$\begin{cases}3x-4=0,\\5y+7=0,\end{cases}$

解得 $x=\frac{4}{3}$，$y=-\frac{7}{5}$，

所以 $x^2+y=\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{7}{5}\right)=\frac{17}{45}$.

技巧贴士

本题考查绝对值的意义，一个数的绝对值一定是非负数——正数或零. 两个非负数相加和为零，只能是 $0+0$，从而求出 x、y 的值.

题 2

(绝对值概念)已知 $a<c<0$，$b>0$，且 $|a|>|b|>|c|$，化简 $|a|+|b|-|c|+|a+b|+|b+c|+|a+c|$.

满分解答

因为 $a<c<0$，$b>0$，且 $|a|>|b|>|c|$，

所以 $a+b<0$，$b+c>0$，$a+c<0$，

原式 $=-a+b-(-c)+[-(a+b)]+(b+c)+[-(a+c)]$

$=-a+b+c-a-b+b+c-a-c$

$=-3a+b+c$.

技巧贴士

要化简含绝对值的式子，首先要确定绝对值符号里面的数或式子是正数还是负数. 正数的绝对值是它本身，因此直接去掉绝对值符号；负数的绝对值是它的相反数，因此去掉绝对值符号后前面添负号. 其中，$|a+b|$化简去掉绝对值号后是$-(a+b)$，$(a+b)$是一个整体，不要出现$|a+b|=-a+b$的错误. 此题中，另一个易错点是判断每一个绝对值符号内数的正负，考查了有理数的加法法则.

题 3

(分类讨论)已知 a、b、c、d 都是整数，且$|a+b|+|b+c|+|c+d|+|d+a|=2$，求$|a+d|$的值.

满分解答

由绝对值的意义可知$|x|\geqslant 0$，

由$|a+b|+|b+c|+|c+d|+|d+a|=2$，且 a、b、c、d 都是整数可知只有两种情况：

(1) 两个加数为 0，两个加数为 1；(2)三个加数为 0，一个加数为 2.

也就是说，四个加数中至少有两个为 0.

不妨设以下情况(其他情况类似)：若$|a+b|=0$，$|b+c|=0$，则可得 $a=c$，

那么原式$=0+0+|c+d|+|a+d|=|a+d|+|a+d|=2|a+d|=2$，

所以$|a+d|=1$.

即情况(2)是不可能的，所以$|a+d|$的值为 0 或 1.

技巧贴士

a、b、c、d 都是整数为突破口. 此题中，两个加数为 1，两个加数为 0，可以分不同情况讨论，但讨论结果是一样的，同学们不妨试一下.

一般而言，当已知条件中出现几个含绝对值的式子的和为定值时，需要多考虑绝对值的几何意义——数轴上表示一个数的点到原点的距离. 也就是说，一个数的绝对值一定是非负数. 在有理数这一专题，偶次方幂也有这个特性，即一个数的偶次幂一定是非负数. 因此，题目可做这样的变形：如将题 1 中$|3x-4|+|5y+7|=0$改为$|3x-4|+(5y+7)^2=0$或者$(3x-4)^4+(5y+7)^{2n}=0$，变形后，还是能得到$0+0=0$，答案都是一样的.

本题中，由四个非负数相加为 2 这个条件还不能一下子得出$|a+d|$的值，因此需要分情况讨论，再根据不同的情况作答，像这样的方法就是分类讨论法，在数学中有广泛的应用.

题 4

(分类讨论)a、b、c 为不等于零的有理数，求$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|c|}{c}\cdot\frac{|abc|}{abc}$的值.

满分解答

当 $a>0$ 时，$\frac{|a|}{a}=1$，当 $a<0$ 时，$\frac{|a|}{a}=-1$，

因此可依次分类讨论 a、b、c 的符号.

(1) 当 a、b、c 同时为正数时，原式$=1+1+1+1=4$；

(2) 当 a、b、c 同为负数时，原式$=-1-1-1+1=-2$；

(3) 当 a、b、c 两正一负时，若 c 为负，原式$=1+1-1+1=2$，若 c 为正，原式$=-1+1+1-1=0$；

(4) 当 a、b、c 一正二负时，若 c 为正，原式$=-1-1+1+1=0$，若 c 为负，原式$=-1+1-1-1=-2$；

综上所得，原式等于 4 或 2 或 0 或-2.

技巧贴士

我们知道，$|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\-x, x<0\end{cases}$，当绝对值符号内是含字母的式子时，去掉绝对值符号后就有两种可能，因此要分类讨论. 此题不适合用特殊值法，很容易出现漏解的情况，在用分类讨论的思想解题时，要注意所分类的种数不重复不遗漏.

题 5

(分类讨论)化简$|x-2|+1-2(x-2)$.

满分解答

(1) 当 $x-2\geqslant 0$，即 $x\geqslant 2$ 时，

原式$=x-2+1-2x+4=-x+3$；

(2) 当 $x-2<0$，即 $x<2$ 时，

原式$=-(x-2)+1-2x+4=-3x+7$.

技巧贴士

此题的解法充分体现了"分类讨论法"的运用. 题目要求化简，即去掉绝对值符号和括号，去括号法则我们已经很熟悉，而去绝对值符号是难点. 如何来分类呢？分类依据就是绝对值符号内式子的正负.

题 6

(零点问题)解方程$|x-1|+|x+2|=5$.

满分解答

分别令 $x-1=0$，$x+2=0$，解得 $x=1$，$x=-2$，

则 $x=1$ 和 $x=-2$ 将讨论分成不重复且不遗漏的如下 3 种情况：

(1) 当 $x<-2$ 时，原方程变形为$-(x-1)+[-(x+2)]=5$，解得 $x=-3$，符合 $x<-2$；

(2) 当$-2\leqslant x<1$ 时，原方程变形为$-(x-1)+(x+2)=5$，此方程无解；

(3) 当 $x\geqslant 1$ 时，原方程变形为$(x-1)+(x+2)=5$，解得 $x=2$，符合 $x\geqslant 1$.

综上所述，原方程的解为 $x=-3$ 或 $x=2$.

技巧贴士

解含绝对值的方程，关键是对绝对值符号的处理．一种方法就是上述解法中的去掉绝对值符号，将原方程变形为不含绝对值符号的方程，而去绝对值符号的关键还是确定出绝对值符号内的正负．如果无法确定绝对值符号内的正负，就只好分类讨论了．分别令 $x-1=0$，$x+2=0$，解得 $x=1$，$x=-2$，这里我们称 1 和 -2 就分别为 $|x-1|$ 和 $|x+2|$ 的零点值，当 $x<-2$ 时，可以判断 $x-1<0$，$x+2<0$，绝对值符合就可以去掉了．同理可以讨论当 x 介于 -2 和 1 之间，x 大于 1 这两种情况时，去绝对值符号后化简的结果．

以上几道例题，无论是求值还是化简还是解方程，实质上都是考查求绝对值的方法，我们知道 $|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0.\end{cases}$ 例如，整数 0.5 的绝对值是它本身 0.5，-2 的绝对值是它的相反数，表示为 $|-2|=-(-2)=2$．同样的，如果要求一个含字母的式子的绝对值，我们要先考虑绝对值符号内式子的正负．

如求 $|3-\pi|$ 的绝对值．因为 $3-\pi<0$，所以 $|3-\pi|=-(3-\pi)=-3+\pi=\pi-3$，相当于去掉绝对值符号，进行化简．

又如，若已知 $a>0$，$b<0$，且 $|a|<|b|$，求 $|a+b|$．由条件可得到 $a+b<0$，所以 $|a+b|=-(a+b)=-a-b$．相当于去掉了绝对值符号，进行了化简．而题 2 正是考查这一知识点．

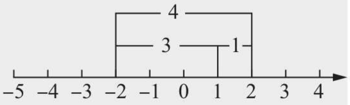
但是，求含字母式子的绝对值时，根据已知条件无法确定绝对值符号内式子的正负，这时，就需要分类讨论了，如题 4、题 5 和题 6．

另外，本题也可以利用绝对值的意义来解．

我们知道 $|x|$ 的几何意义是在数轴上数 x 对应的点与原点的距离，即 $|x|=|x-0|$，也就是说 $|x|$ 表示在数轴上数 x 与数 0 对应点之间的距离；这个结论可以推广为：$|x-y|$ 表示在数轴上数 x、y 对应点之间的距离，如 $|-2-3|$ 表示 -2 和 3 的距离，为 5．在解题中，我们常常运用几何意义，用数形结合的思想方法来考虑．

① 解方程 $|x|=2$，容易看出，在数轴上与原点距离为 2 的点对应的数为 ± 2，即该方程的解为 $x=\pm 2$．

② 在方程 $|x-1|=2$ 中，x 的值就是数轴上到 1 的距离为 2 的点对应的数，显然 $x=3$ 或 $x=-1$．



③ 在方程 $|x-1|+|x+2|=5$ 中，显然该方程表示数轴上与 1 和 -2 的距离之和为 5 的点对应的 x 值，在数轴上 1 和 -2 的距离为 3，满足方程的 x 的对应点在 1 的右边或 -2 的左边．若 x 的对应点在 1 的右边，由图示可知 $x=2$；同理，若 x 的对应点在 -2 的左边可得 $x=-3$．

所以原方程的解是 $x=2$ 或 $x=-3$．

因此，在解含绝对值的方程时，一般有两种方法：数形结合法和分类讨论法．

题 7

（混合运算）求 $2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{99}+2^{100}$ 的值．

满分解答

设 $x=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{99}+2^{100}$　①

则有 $2x=2(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{99}+2^{100})$，即 $2x=2^2+2^3+\cdots+2^{100}+2^{101}$ ②，②－①得，$2x-x=2^2+2^3+\cdots+2^{100}+2^{101}-(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{99}+2^{100})$，则 $x=2^{101}-2$，所以，$2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{99}+2^{100}$ 的值为 $2^{101}-2$.

技巧贴士

此题直接求非常困难，因为 2^{100}、2^{99} 等都是非常大的数. 因此，我们可以用方程的方法来做，将 $2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{99}+2^{100}$ 看做一个整体，引入未知数 x，只要解出 x 的值，就求出了 $2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{99}+2^{100}$ 的和.

题 8

(混合运算)根据乘方意义可知：

$2^3\times2^4=(2\times2\times2)\times(2\times2\times2\times2)=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=2^7$，类似的 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^5$.

$(2\times3)^3=(2\times3)\times(2\times3)\times(2\times3)=2\times3\times2\times3\times2\times3=(2\times2\times2)\times(3\times3\times3)=2^3\times3^3$.

(1) 猜想：$a^m\cdot a^n=$________，$(ab)^n=$________.

(2) 利用(1)得到的结论，计算 $1.5^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^6\times0.75^3$.

满分解答

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$(ab)^n=a^n\cdot b^n$.

(2)
$$\begin{aligned}1.5^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^6\times0.75^3&=\left(\frac{3}{2}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^6\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\\&=\left(\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right)^3\\&=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

技巧贴士

由乘方的意义可以得到以下推理：

(1) $a^m\cdot a^n=\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{m\text{个}a\text{相乘}}\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{n\text{个}a\text{相乘}}=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{(m\text{个}+n\text{个})a\text{相乘}}=a^{m+n}$

(2) $(ab)^n=\underbrace{(ab)\times(ab)\times(ab)\times\cdots\times(ab)}_{n\text{个}ab\text{相乘}}=\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{n\text{个}a\text{相乘}}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot b\cdot\cdots\cdot b)}_{n\text{个}b\text{相乘}}=a^n\cdot b^n$

这两条结论称为“同底数幂的运算法则”和“积的乘方运算法则”，如(2)中的计算方法，在很多的乘方运算中，利用这两个法则可以简化运算. 又如计算$(-5)^3\times\left(\frac{1}{5}\right)^4$，我们不需要将每一个乘方都计算出来再相乘，可以利用(1)中的第一个结论，先将$\left(\frac{1}{5}\right)^4$拆成$\left(\frac{1}{5}\right)^3\times\left(\frac{1}{5}\right)^1$，再与$(-5)^3$相乘得$(-5)^3\times\left(\frac{1}{5}\right)^3\times\left(\frac{1}{5}\right)^1$，再根据(1)中的第二个结论$(-5)^3\times\left(\frac{1}{5}\right)^3\times\left(\frac{1}{5}\right)^1=\left(-5\times\frac{1}{5}\right)^3\times\frac{1}{5}=-\frac{1}{5}$.

乘方运算，是有理数这章新引入的一种运算，是继“加、减、乘、除”四则运算后的第五种运算，八年级则会接触第六则运算“开方”. 乘方运算：当指数较大时，运算的结果往往比较复杂. 我们可以根据乘方的意义进行简便运算. 思考的出发点：几个幂相乘，要么将几个幂化成同底数的幂，要么化成同指数的幂，就可以根据乘方的意义利用题 9 中(1)问得到的结论进行运算，减小计算量. 几个同底数的幂做加法，当每个加数都比较大时，可以考虑整体思想，根据每个加数之间的联系，利用方程的思想来解答.

第一期　绝对值应用

1 【绝对值概念】已知$|5-a|+(b+3)^2=0$,求$a+b$的值.

2 【绝对值概念】若a、b、c为整数,且$|a-b|^{2012}+|c-a|^{2013}=1$,试计算$(c-a)^{2012}+|a-b|+|b-c|^{2013}$的值.

3 【绝对值概念】若$|a+2|+(b-4)^2=0$,求a^b的值.

4 【绝对值概念】已知有理数a、b、c在数轴上的位置如图所示,化简$|a+b|-|b+1|-|a-c|-|c-1|$.

第 4 题

5 【绝对值概念】一个非负数的绝对值等于它本身，负数的绝对值等于它的相反数，所以 $|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$，根据以上阅读完成下列各题：

（1）$|3.14-\pi|=$________；

（2）计算 $\left|\frac{1}{2}-1\right|+\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{10}-\frac{1}{9}\right|$；

（3）猜想 $\left|\frac{1}{2}-1\right|+\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right|=$__________.

6 【绝对值概念】已知 $|ab-2|=-|a-2|$，则 $\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\cdots+\frac{1}{(a+2013)(b+2013)}$ 等于多少？

第二期　分类讨论与数形结合、混合计算

1 【零点问题】解方程：$|x-3|+|x+2|=9$.

2 【零点问题】解方程：$|x-3|-3|x+1|=x-9$.

3 【零点问题】解方程：$2(|x+1|-3)=x+2$.

4 【分类讨论】已知有理数 a、b、c、d 满足$\frac{|abcd|}{abcd}=-1$，试求$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|d|}{d}$的值.

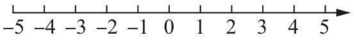
5 【数形结合】结合数轴的知识回答下列问题：

(1) 数轴上表示 4 和 1 的两点之间的距离是________,表示 -3 和 2 两点之间的距离是________;

(2) 一般地,数轴上表示数 m 和数 n 的两点之间的距离等于 $|m-n|$,如果表示数 a 和 -2 的两点之间的距离是 3,那么 $a=$________;

(3) 若数轴上表示数 a 的点位于 -4 与 2 之间,求 $|a+4|+|a-2|$ 的值;

(4) 当 a 取何值时,$|a+5|+|a-1|+|a-4|$ 的值最小,最小值是多少？请说明理由.



第 5 题

6 【混合运算】求和:$1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{99}+3^{100}$.

7 【混合运算】求值,结果用幂的形式表示.

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{99}}+\frac{1}{2^{100}}$;　　(2) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{99}{2^{99}}+\frac{100}{2^{100}}$.

8 【混合运算】计算:$8^3\times(-2)^4\times\left(\frac{1}{4}\right)^6$.

拓展提高训练　综合应用

1 【归纳概括】观察等式 $(2\times3)^3=6^3=216=8\times27=2^3\times3^3$，$\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{2^4}{5^4}$.

(1) 请归纳规律 $(a\cdot b)^n=$________，$\left(\frac{a}{b}\right)^n=$________；

(2) 计算 $4^{25}\times0.25^{25}$，$\frac{39^4}{13^3}$的值.

2 【混合运算】3 个 9 组成的数有以下几个：999，99^9，9^{99}，$(9^9)^9$，9^{9^9}，这 5 个数中哪一个最大？

3 【绝对值概念】若 $|a|=4$，$|b|=3$，且 $|a+b|=a+b$，求 $a-b$ 的值.

4 【数形结合】图中显示的填数“魔方”只填了一部分，将下列 9 个数：$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，1，2，4，8，16，32，64 填入方框中，使得所有列、行及对角线上数的积相等，求 x 的值.

32		
		x
	64	

第 4 题