



毛 纲 源 考 研 数 学 辅 导 系 列

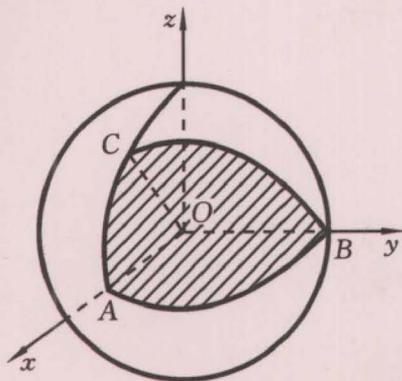
考本
研书
无在
忧手

最新

考研数学 (一)

常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源 编著



- ◇ 题型全面 紧扣大纲
帮你高效复习
- ◇ 方法新颖 技巧独特
助你考研成功

华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

毛纲源考研数学辅导系列

最新考研数学(一)
常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源 编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

最新考研数学(一)常考题型解题方法技巧归纳/毛纲源 编著. —武汉:华中科技大学出版社,2008.10(2010.5重印)

ISBN 978-7-5609-4897-3

I. 最… II. 毛… III. 高等数学-研究生-入学考试-解题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 147790 号

最新考研数学(一)常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源 编著

责任编辑:王汉江

封面设计:潘 群

责任校对:朱 霞

责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:湖北新华印务有限公司

开本:710mm×1000mm 1/16

印张:33

字数:858 000

印次:2010年5月第1版第2次印刷

定价:42.80元

ISBN 978-7-5609-4897-3/O·465

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

前 言

为使考研者能在较短时间内全面复习,提高考研应试能力和水平,作者根据最新数学考试大纲的要求,深入研究了历年来考研试题,结合作者多年来在考研辅导班的授课经验,编写了《最新考研数学(一)常考题型解题方法技巧归纳》一书.该书覆盖了考研内容的绝大部分题型,本书中的解题方法新颖、技巧独特、适于自学,相信本书的出版会受到全国广大考生的青睐.

本书有以下几个特点.

首先,本书根据考研数学大纲的要求,将历来来考研数学试题按题型分类,对各类题型的解法进行了归纳总结,使考生能做到举一反三,触类旁通.数学试题是无限的,而题型是有限的,掌握好这些题型及其解题方法与技巧,会减少解题的盲目性,从而提高解题效率,考生的应试能力自然就得到了提高.同时也便于考生掌握考研数学(一)的大部分题型及其解题思路、方法与技巧,因而,本书能起到指航引路、预测考向的作用.

本书特别强调对考研数学大纲划定的基本概念、基本定理、基本方法和基本公式的正确理解.为此每一题型在讲解例题前常对上述“四个基本”进行剖析,便于考生理解、记忆,避免常犯错误.

本书另一特点是总结了许多实用快捷的简便算法,这些简便算法新颖、独特,它们是作者多年来教学经验的总结,会大大提高考生的解题速度和准确性,使考生大大节省时间,因而有助于考生应试能力和水平的提高.

本书还注意培养提高综合应用多个知识点解决问题的能力,对综合型题型进行了较多的分析和解法,以期提高考生在这方面的能力.与此同时,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,能灵活地解决问题.

本书的讲述方法由浅入深,适于自学,尽量使选用的例题精而易懂、全而不滥.

为使考生具有扎实的数学基础知识,也为了更好地阅读本书,特向读者推荐一套可以指导你全面、系统、深入复习考研数学的参考书,这就是本人编写的理工类数学学习指导、硕士研究生备考指南丛书:《高等数学解题方法技巧归纳》(上、下册)、《线性代数解题方法技巧归纳》、《概率论与数理统计解题方法技巧归纳》.这套丛书自出版以来一直受到全国广大读者的一致好评,多次印刷,久销不衰.很多已考取的理工类硕士研究生不少都受益于这套丛书.本人在撰写本书时,多处引用了这套丛书的内容和方法,如果能把这套丛书结合起来学习必将收到事半功倍的效果.

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中错误、疏漏之处在所难免,恳请专家、读者指正.

编者

2010年4月

目 录

第 1 篇 高等数学

| | |
|---|------|
| 1.1 函数、极限、连续 | (1) |
| 1.1.1 求几类函数的表达式 | (1) |
| 题型一 求分段函数的复合函数 | (1) |
| 题型二 已知 $f[g(x)] = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 是已知函数, 求 f 或 g | (1) |
| 1.1.2 函数的奇偶性 | (2) |
| 题型一 判别(证明)几类函数的奇偶性 | (2) |
| 题型二 奇、偶函数性质的应用 | (3) |
| 1.1.3 讨论函数的有界性和周期性 | (4) |
| 题型一 判定有限开区间内连续函数的有界性 | (4) |
| 题型二 判定无穷区间内连续函数的有界性 | (4) |
| 题型三 判定分段连续函数的有界性 | (4) |
| 题型四 讨论函数的周期性 | (5) |
| 1.1.4 理解极限概念 | (7) |
| 题型一 正确理解极限定义中的“ ε 、 N ”, “ ε 、 δ ”, “ ε 、 X ”语言的含义 | (7) |
| 题型二 正确区别无穷大量与无界变量 | (7) |
| 1.1.5 求未定式极限 | (8) |
| 题型一 求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限 | (8) |
| 题型二 求 $0 \cdot \infty$ 型极限 | (10) |
| 题型三 求 $\infty - \infty$ 型极限 | (11) |
| 题型四 求幂指函数(0^0 型, ∞^0 型, 1^∞ 型)极限 | (11) |
| 1.1.6 求数列极限 | (14) |
| 题型一 求无穷多项和的极限 | (14) |
| 题型二 求由递推关系式给出的数列极限 | (15) |
| 1.1.7 求几类特殊子函数形式的函数极限 | (17) |
| 题型一 求须先考察左、右极限的函数极限 | (17) |
| 题型二 求含根式差的函数极限 | (18) |
| 题型三 求含指数函数差的函数极限 | (18) |
| 题型四 求含 $\ln f(x)$ 的函数极限, 其中 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 1$ | (19) |
| 题型五 求含有界变量因子的函数极限 | (19) |
| 1.1.8 由含未知函数的一些极限, 求含该函数的另一极限 | (20) |
| 1.1.9 已知极限式的极限, 求其待定常数 | (20) |
| 题型一 求有理函数极限式中的待定常数 | (21) |
| 题型二 确定分式函数极限式中的待定常数 | (21) |
| 1.1.10 比较和确定无穷小量的阶 | (22) |
| 题型一 比较无穷小量的阶 | (23) |
| 题型二 确定无穷小量为几阶无穷小量 | (24) |
| 1.1.11 讨论函数的连续性及其间断点的类型 | (24) |
| 题型一 判别函数的连续性 | (24) |
| 题型二 讨论分段函数的连续性 | (25) |
| 题型三 讨论含参变量的极限式所定义的函数的连续性 | (26) |

| | | |
|--------|---|------|
| 题型四 | 判别函数间断点的类型 | (27) |
| 1.1.12 | 连续函数性质的两点应用 | (28) |
| 题型一 | 利用连续函数性质证明中值等式命题 | (28) |
| 题型二 | 证明方程实根的存在性 | (29) |
| 习题 1.1 | | (30) |
| 1.2 | 一元函数微分学 | (32) |
| 1.2.1 | 导数定义的三点应用 | (32) |
| 题型一 | 判断函数在某点的可导性 | (32) |
| 题型二 | 利用导数定义求某些函数的极限 | (35) |
| 题型三 | 利用导数定义讨论函数性质 | (36) |
| 1.2.2 | 讨论分段函数的可导性及其导函数的连续性 | (37) |
| 题型一 | 讨论分段函数的可导性 | (37) |
| 题型二 | 讨论分段函数的导函数的连续性 | (38) |
| 题型三 | 讨论某类特殊的分段函数在其分段点的连续性、可导性及其 导函数的连续性 | (38) |
| 1.2.3 | 讨论含绝对值函数的可导性 | (38) |
| 题型一 | 讨论绝对值函数 $ f(x) $ 的可导性 | (38) |
| 题型二 | 讨论函数 $f(x)= \varphi(x) g(x)$ 的可导性 | (39) |
| 1.2.4 | 求一元函数的导数和微分 | (40) |
| 题型一 | 求复合函数的一阶与二阶导数 | (40) |
| 题型二 | 求反函数的导数 | (40) |
| 题型三 | 求隐函数的导数 | (41) |
| 题型四 | 求分段函数的一阶、二阶导数 | (42) |
| 题型五 | 求幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的导数 | (42) |
| 题型六 | 求由参数方程所确定的函数的导数 | (42) |
| 题型七 | 求某些简单函数的高阶导数 | (43) |
| 题型八 | 求一元函数的微分 | (45) |
| 1.2.5 | 利用函数的连续性、可导性确定其待定常数 | (47) |
| 题型一 | 利用函数的连续性确定其待定常数 | (47) |
| 题型二 | 根据函数的可导性确定待定常数 | (47) |
| 1.2.6 | 利用微分中值定理的条件及其结论解题 | (48) |
| 1.2.7 | 利用罗尔定理证明中值等式 | (50) |
| 题型一 | 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $cf'(\xi) = bg'(\xi)$, 其中 c, b 为常数 | (50) |
| 题型二 | 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $g(\xi)f'(\xi) + h(\xi)f(\xi) = Q(\xi)$ | (51) |
| 题型三 | 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g(\xi) = 0$ | (51) |
| 题型四 | 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0 (g(x) \neq 0)$ | (51) |
| 题型五 | 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$ | (52) |
| 题型六 | 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0 (n$ 为正整数) | (52) |
| 题型七 | 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $G(\xi) = 0$ | (52) |
| 题型八 | 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - b\xi] = 0$ | (53) |
| 题型九 | 已知函数在端点和在别处的取值情况, 证明有关的中值等式 | (54) |
| 题型十 | 证明题设中有定积分等式的中值等式 | (54) |
| 题型十一 | 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $F^{(k)}(\xi) = 0 (k \geq 2)$ | (56) |
| 1.2.8 | 拉格朗日中值定理的应用 | (56) |
| 题型一 | 证明与函数改变量(增量)有关的中值(不)等式 | (56) |
| 题型二 | 证明函数与其导数的关系 | (57) |
| 题型三 | 求解与函数差值有关的问题 | (58) |
| 题型四 | 证明多个中值所满足的中值等式 | (59) |

| | | |
|----------|--|------|
| 题型五 | 求中值的极限位置 | (59) |
| 1. 2. 9 | 利用柯西中值定理证明中值等式 | (60) |
| 题型一 | 证明两函数差值(增量)比的中值等式 | (60) |
| 题型二 | 证明两函数导数比的中值等式 | (60) |
| 1. 2. 10 | 泰勒定理的两点应用 | (61) |
| 题型一 | 证明与高阶导数有关的中值(不)等式 | (61) |
| 题型二 | 计算按常规方法不好求的未定式极限 | (63) |
| 1. 2. 11 | 利用导数证明函数不等式 | (64) |
| 题型一 | 证明含有或可化为函数改变量部分的不等式 | (64) |
| 题型二 | 已知 $F(a) \geq 0$ (或 $F(b) \geq 0$), 证明 $x > a$ (或 $x < b$) 时 $F(x) > 0$ | (64) |
| 题型三 | 证明含常数加项的不等式 | (65) |
| 题型四 | 证明含两个变量(常数)的函数(数值)不等式 | (66) |
| 题型五 | 证明两点函数值组成的(中值)不等式 | (66) |
| 1. 2. 12 | 讨论函数的性态 | (67) |
| 题型一 | 证明函数在区间 I 上是一个常数 | (67) |
| 题型二 | 证明(判别)函数的单调性 | (67) |
| 题型三 | 利用极限式讨论函数是否取得极值 | (67) |
| 题型四 | 利用二阶微分方程讨论函数是否取极值, 其曲线是否有拐点 | (69) |
| 题型五 | 利用导数不等式, 讨论函数是否取极值, 其曲线是否有拐点 | (69) |
| 题型六 | 求曲线凹凸区间与拐点 | (70) |
| 题型七 | 求函数的单调区间、极值、最值 | (71) |
| 题型八 | 求曲线的渐近线 | (73) |
| 1. 2. 13 | 利用函数性态讨论方程的根 | (74) |
| 题型一 | 讨论不含参数的方程实根的存在性及其个数 | (74) |
| 题型二 | 讨论含参数的方程实根的存在性及其个数 | (75) |
| 1. 2. 14 | 函数性态与函数图形 | (76) |
| 题型一 | 利用函数性态作函数图形 | (76) |
| 题型二 | 利用函数的图形, 确定其导函数的图形 | (77) |
| 题型三 | 利用导函数的图形, 确定原来函数的性态 | (77) |
| 1. 2. 15 | 一元函数微分学的应用 | (78) |
| 题型一 | 求平面曲线的切线方程和法线方程 | (78) |
| 题型二 | 求解与切线在坐标轴上的截距有关的问题 | (79) |
| 题型三 | 求解与两曲线相切的有关问题 | (80) |
| 题型四 | 求解与平面曲线的曲率有关的问题 | (80) |
| 习题 1. 2 | | (81) |
| 1. 3 | 一元函数积分学 | (84) |
| 1. 3. 1 | 原函数与不定积分的关系 | (84) |
| 题型一 | 已知某函数, 求其原函数 | (84) |
| 题型二 | 已知某函数的一个原函数, 求该函数 | (84) |
| 1. 3. 2 | 计算不定积分 | (85) |
| 题型一 | 计算被积函数仅为一类或为两类不同函数的不定积分 | (85) |
| 题型二 | 计算简单无理函数的不定积分 | (86) |
| 题型三 | 求 $\int \frac{1}{(ax+b)^k} f\left[\frac{1}{(ax+b)^{k-1}}\right] dx$, 其中 $k \neq 1$ 为正实数 | (89) |
| 题型四 | 求 $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ | (89) |
| 题型五 | 求被积函数的分母相差为常数的两函数乘积的不定积分 | (91) |
| 题型六 | 求三角函数的不定积分 | (91) |

| | | |
|--------------|--|-------|
| 题型七 | 求被积函数含反三角函数为因子函数的积分 | (92) |
| 1.3.3 | 利用定积分性质计算定积分 | (92) |
| 题型一 | 利用其几何意义计算定积分 | (92) |
| 题型二 | 计算对称区间上的定积分 | (93) |
| 题型三 | 计算周期函数的定积分 | (94) |
| 题型四 | 利用定积分的常用计算公式计算定积分 | (95) |
| 题型五 | 计算被积函数含函数导数的积分 | (96) |
| 题型六 | 比较和估计定积分的大小 | (96) |
| 题型七 | 求解含积分值为常数的函数方程 | (97) |
| 题型八 | 计算几类须分子区间积分的定积分 | (98) |
| 题型九 | 计算含参数的定积分 | (99) |
| 题型十 | 计算需换元计算的定积分 | (100) |
| 题型十一 | 求连续函数的定积分的极限 | (101) |
| 1.3.4 | 求解与变限积分有关的问题 | (101) |
| 题型一 | 计算含变限积分的极限 | (101) |
| 题型二 | 求变限积分的导数 | (103) |
| 题型三 | 求变限积分的定积分 | (105) |
| 题型四 | 讨论变限积分函数的性态 | (106) |
| 1.3.5 | 证明定积分等式 | (106) |
| 题型一 | 证明定积分的变换公式 | (106) |
| 题型二 | 证明定积分中值等式 | (108) |
| 1.3.6 | 证明积分不等式 | (109) |
| 题型一 | 证明积分限相等时不等式两端成为零的积分不等式 | (109) |
| 题型二 | 证明函数及其导函数所满足的积分不等式 | (110) |
| 题型三 | 证明 $\int_a^b f(x) dx$ (或 $\left \int_a^b f(x) dx \right) \leq k$ (或 $\geq k$), k 为常数 | (110) |
| 题型四 | 证明题设中有二阶导数大(或小)于等于零的定积分不等式 | (111) |
| 1.3.7 | 计算反常积分 | (111) |
| 题型一 | 计算无穷区间上的反常积分 | (111) |
| 题型二 | 判别 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 与 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ ($a > 0$) 的敛散性 | (113) |
| 题型三 | 计算无界函数的反常积分 | (114) |
| 题型四 | 判别 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ 与 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ 的敛散性 | (115) |
| 1.3.8 | 定积分的应用 | (116) |
| 题型一 | 已知曲线方程,求其所围平面图形的面积 | (116) |
| 题型二 | 已知曲线所围平面图形的面积(或其旋转体体积)反求该曲线 | (117) |
| 题型三 | 计算平面曲线的弧长 | (117) |
| 题型四 | 计算平行截面面积已知的立体体积 | (118) |
| 题型五 | 求旋转体体积 | (118) |
| 题型六 | 求旋转体的侧(表)面积 | (120) |
| 题型七 | 求解几何应用与最值问题相结合的应用题 | (121) |
| 题型八 | 计算变力所做的功 | (122) |
| 题型九 | 计算液体的侧压力 | (123) |
| 题型十 | 计算细杆对质点的引力 | (123) |
| 题型十一 | 计算函数在区间上的平均值 | (124) |
| 习题 1.3 | | (124) |
| 1.4 | 向量代数和空间解析几何 | (127) |
| 1.4.1 | 向量代数及其简单应用 | (127) |

| | | |
|--------------|---------------------------------|-------|
| 题型一 | 用坐标表达式进行向量运算 | (127) |
| 题型二 | 计算向量的数量积、向量积、混合积 | (128) |
| 题型三 | 利用向量运算证明(确定)向量关系 | (129) |
| 1.4.2 | 求平面方程 | (130) |
| 题型一 | 求过某已知点的平面方程 | (130) |
| 题型二 | 求过已知直线的平面方程 | (131) |
| 题型三 | 根据平面在坐标轴上的相对位置,求其方程 | (131) |
| 题型四 | 求过两平面交线的平面方程 | (132) |
| 1.4.3 | 求直线方程 | (132) |
| 题型一 | 求过已知点的直线方程 | (133) |
| 题型二 | 求过已知点且与已知直线相交的直线方程 | (133) |
| 题型三 | 求与两直线相交的直线方程 | (134) |
| 题型四 | 求直线在平面上的投影直线方程 | (135) |
| 1.4.4 | 讨论直线与平面的位置关系 | (135) |
| 题型一 | 讨论平面间的位置关系 | (135) |
| 题型二 | 讨论直线与直线的位置关系 | (137) |
| 题型三 | 讨论直线与平面的位置关系 | (138) |
| 1.4.5 | 求二次曲面方程和空间曲线在坐标面上的投影方程 | (138) |
| 题型一 | 求坐标面上曲线绕坐标轴旋转所得的旋转曲面方程 | (139) |
| 题型二 | 求空间曲线绕坐标轴旋转所得的曲面方程 | (139) |
| 题型三 | 求母线平行于坐标轴的柱面方程 | (140) |
| 题型四 | 求空间曲线在坐标面上的投影方程 | (141) |
| 1.4.6 | 求解空间解析几何与线性代数、微积分相结合的综合题 | (141) |
| 习题 1.4 | | (143) |
| 1.5 | 多元函数微分法及其应用 | (145) |
| 1.5.1 | 正确理解二元函数连续、可偏导及可微之间的关系 | (145) |
| 题型一 | 依定义判别二元函数在某点是否连续、可偏导及可微 | (145) |
| 题型二 | 判别二元函数连续、可偏导、可微之间的关系 | (146) |
| 1.5.2 | 计算多元函数的偏导数和全微分 | (147) |
| 题型一 | 利用隐函数存在定理确定隐函数 | (147) |
| 题型二 | 求抽象复合函数的偏导数 | (147) |
| 题型三 | 计算隐函数的导数 | (150) |
| 题型四 | 作变量代换将偏导数满足的方程变形 | (151) |
| 题型五 | 求方向导数和梯度 | (152) |
| 题型六 | 求二元函数的全微分 | (154) |
| 1.5.3 | 多元函数微分学的应用 | (155) |
| 题型一 | 已知空间曲线的参数方程,求其切线或法平面方程 | (155) |
| 题型二 | 已知空间曲线为两曲面的交线,求其切线或法平面方程 | (156) |
| 题型三 | 已知空间曲面方程,求其切平面或法线方程 | (157) |
| 题型四 | 求二元函数的极值和最值 | (158) |
| 题型五 | 求二(多)元函数的条件极值 | (160) |
| 习题 1.5 | | (162) |
| 1.6 | 多元函数积分学 | (164) |
| 1.6.1 | 利用区域的对称性化简多元函数的积分 | (164) |
| 题型一 | 计算积分区域具有对称性,被积函数具有奇偶性的重积分 | (164) |
| 题型二 | 计算积分区域关于直线 $y=x$ 对称的二重积分 | (166) |
| 题型三 | 计算积分区域具有轮换对称性的三重积分 | (167) |
| 题型四 | 计算积分曲线(面)具有对称性的第一类曲线(面)积分 | (167) |

| | | |
|--------------|-----------------------------|-------|
| 题型五 | 计算平面积分曲线关于 $y=x$ 对称的第一类曲线积分 | (168) |
| 题型六 | 计算空间积分曲线具有轮换对称性的第一类曲线积分 | (168) |
| 题型七 | 计算积分曲线具有对称性的第二类曲线积分 | (169) |
| 题型八 | 计算积分曲面具有对称性的第二类曲面积分 | (170) |
| 1.6.2 | 交换积分次序及转换二次积分 | (171) |
| 题型一 | 交换二次积分的积分次序 | (171) |
| 题型二 | 转换二次积分 | (172) |
| 1.6.3 | 计算二重积分 | (174) |
| 题型一 | 计算被积函数分区域给出的二重积分 | (174) |
| 题型二 | 计算圆域或部分圆域上的二重积分 | (175) |
| 1.6.4 | 计算三重积分 | (176) |
| 题型一 | 计算积分区域的边界方程均为一次的三重积分 | (176) |
| 题型二 | 计算积分区域为旋转体的三重积分 | (177) |
| 题型三 | 计算积分区域由球面或球面与锥面所围成的三重积分 | (177) |
| 题型四 | 计算被积函数至少缺两个变量的三重积分 | (178) |
| 题型五 | 计算易求出其截面区域上的二重积分的三重积分 | (180) |
| 1.6.5 | 计算曲线积分 | (180) |
| 题型一 | 计算第一类平面曲线积分 | (180) |
| 题型二 | 求解平面上与路径无关的第二类曲线积分有关问题 | (181) |
| 题型三 | 计算平面上与路径有关的第二类曲线积分 | (185) |
| 题型四 | 计算空间第二类曲线积分 | (187) |
| 1.6.6 | 计算曲面积分 | (189) |
| 题型一 | 计算第一类曲面积分 | (189) |
| 题型二 | 计算第二类曲面积分 | (191) |
| 题型三 | 已知第二类曲面积分的值,求被积式中的未知函数 | (197) |
| 1.6.7 | 多元函数积分学的应用 | (198) |
| 题型一 | 计算空间曲线的弧长 | (198) |
| 题型二 | 求曲面面积 | (198) |
| 题型三 | 计算立体体积 | (200) |
| 题型四 | 求质量、重心及转动惯量 | (201) |
| 题型五 | 计算变力沿曲线所做的功 | (203) |
| 题型六 | 计算物体对质点的引力 | (205) |
| 题型七 | 计算向量场的散度与流量(通量) | (206) |
| 题型八 | 计算向量场的旋度与环流量 | (207) |
| 习题 1.6 | | (209) |
| 1.7 | 级数 | (211) |
| 1.7.1 | 利用定义及其性质判别级数的敛散性 | (211) |
| 题型一 | 判别一般项由相邻两项代数数和组成的级数的敛散性 | (211) |
| 题型二 | 利用级数的性质判别级数的敛散性 | (211) |
| 1.7.2 | 判别三类常数项级数的敛散性 | (212) |
| 题型一 | 判别正项级数的敛散性 | (212) |
| 题型二 | 判别交错级数的敛散性 | (215) |
| 题型三 | 判别任意项级数的敛散性 | (216) |
| 1.7.3 | 证明常数项级数的敛散性 | (218) |
| 题型一 | 证明一般项为相邻两项代数数和的级数的敛散性 | (218) |
| 题型二 | 已知一级数收敛,证明相关级数收敛 | (218) |
| 题型三 | 已知一般项有极限,证明该级数的敛散性 | (219) |
| 题型四 | 证明(判别)一般项为(含)定积分的级数的敛散性 | (220) |

| | | |
|--------|--|-------|
| 题型五 | 证明一般项用递推关系式给出的级数的敛散性 | (220) |
| 题型六 | 已知函数高阶可导,证明由该函数值组成的级数的敛散性 | (220) |
| 1.7.4 | 幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法 | (221) |
| 1.7.5 | 求级数的和 | (223) |
| 题型一 | 求 $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)x^n$ 的和函数, $P(n)$ 为 n 的多项式 | (223) |
| 题型二 | 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{Q(n)} x^n$ 的和函数, $Q(n)$ 为 n 的多项式 | (225) |
| 题型三 | 求含阶乘因子的幂级数的和函数 | (227) |
| 题型四 | 求数值级数的和 | (228) |
| 1.7.6 | 将简单函数间接展开成幂级数 | (231) |
| 题型一 | 求反三角函数的幂级数展开式 | (231) |
| 题型二 | 将对数函数展成幂级数 | (232) |
| 题型三 | 将有理分式函数展成幂级数 | (233) |
| 题型四 | 将三角函数展成幂级数 | (233) |
| 1.7.7 | 傅里叶级数 | (233) |
| 题型一 | 将周期函数展为傅里叶级数 | (233) |
| 题型二 | 求傅里叶系数 | (238) |
| 题型三 | 求傅里叶级数的和函数在某点的值 | (238) |
| 习题 1.7 | | (238) |
| 1.8 | 常微分方程 | (241) |
| 1.8.1 | 求解一阶线性微分方程 | (241) |
| 题型一 | 求解可分离变量的微分方程 | (241) |
| 题型二 | 求解齐次方程 | (241) |
| 题型三 | 求解一阶线性方程 | (242) |
| 题型四 | 求解几类可化为一阶线性方程的方程 | (242) |
| 题型五 | 求解方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ | (244) |
| 题型六 | 求解由变量的增量关系给出的一阶方程 | (245) |
| 题型七 | 求满足某种性质的一阶微分方程的特解 | (245) |
| 1.8.2 | 求解线性微分方程 | (247) |
| 题型一 | 利用线性微分方程解的结构和性质求解有关问题 | (247) |
| 题型二 | 求解可降阶的二阶微分方程 | (248) |
| 题型三 | 求解高阶常系数齐次线性方程 | (249) |
| 题型四 | 求解二阶常系数非齐次线性方程 | (250) |
| 题型五 | 求解欧拉方程 | (253) |
| 题型六 | 求解含变限积分的方程 | (254) |
| 1.8.3 | 已知特解反求其常系数线性方程 | (254) |
| 题型一 | 已知特解反求其齐次方程 | (254) |
| 题型二 | 已知特解反求其非齐次方程 | (255) |
| 1.8.4 | 用微分方程求解几何和物理中的简单应用题 | (256) |
| 习题 1.8 | | (260) |

第 2 篇 线性代数

| | | |
|-------|------------------------|-------|
| 2.1 | 计算行列式 | (262) |
| 2.1.1 | 计算数字型行列式 | (262) |
| 题型一 | 计算非零元素主要在一条或两条对角线上的行列式 | (262) |
| 题型二 | 计算非零元素在三条线上的行列式 | (263) |
| 题型三 | 计算行(列)和相等的行列式 | (264) |

| | | |
|--------------|--|-------|
| 题型四 | 计算范德蒙行列式 | (265) |
| 题型五 | 求代数余子式线性组合的值 | (265) |
| 题型六 | 求行列式中含某因子的所有项 | (266) |
| 2.1.2 | 计算抽象矩阵的行列式 | (267) |
| 题型一 | 求由行(列)向量表示的矩阵的行列式的值 | (267) |
| 题型二 | 计算与伴随矩阵有关的矩阵行列式 | (268) |
| 题型三 | 计算含零子块的四分块矩阵的行列式 | (269) |
| 题型四 | 证明方阵的行列式等于零,或不等于零 | (269) |
| 2.1.3 | 克莱姆法则的应用 | (270) |
| 习题 2.1 | | (272) |
| 2.2 | 矩阵 | (273) |
| 2.2.1 | 证明矩阵的可逆性 | (273) |
| 题型一 | 已知一矩阵等式证明有关矩阵可逆,并求其逆矩阵 | (273) |
| 题型二 | 证明矩阵 A 可逆,且 $A^{-1} = B$ | (274) |
| 题型三 | 证明和(差)矩阵可逆 | (275) |
| 题型四 | 求矩阵的逆矩阵,该矩阵含一(些)矩阵的逆矩阵 | (275) |
| 题型五 | 证明方阵为不可逆矩阵 | (276) |
| 2.2.2 | 矩阵元素给定,求其逆矩阵的方法 | (276) |
| 2.2.3 | 求解与伴随矩阵有关的问题 | (277) |
| 题型一 | 计算与伴随矩阵有关的矩阵行列式 | (277) |
| 题型二 | 求与伴随矩阵有关的矩阵的逆矩阵 | (278) |
| 题型三 | 求与伴随矩阵有关的矩阵的秩 | (279) |
| 题型四 | 求伴随矩阵 | (279) |
| 2.2.4 | 计算 n 阶矩阵的高次幂 | (279) |
| 题型一 | 计算能分解为一列向量与一行向量相乘的矩阵的高次幂 | (279) |
| 题型二 | 计算能相似对角化的矩阵的高次幂 | (280) |
| 题型三 | 计算能分解为两可交换矩阵之和的矩阵的高次幂 | (281) |
| 题型四 | 计算其平方等于原矩阵或单位矩阵倍数的矩阵高次幂 | (281) |
| 2.2.5 | 求矩阵的秩 | (282) |
| 题型一 | 求元素具体给定的矩阵的秩 | (282) |
| 题型二 | 求抽象矩阵的秩 | (283) |
| 题型三 | 已知矩阵的秩,求其待定常数 | (285) |
| 2.2.6 | 分块矩阵乘法运算的应用举例 | (285) |
| 2.2.7 | 求解矩阵方程 | (286) |
| 题型一 | 求解含单位矩阵加项的矩阵方程 | (287) |
| 题型二 | 求解只含一个未知矩阵的矩阵方程 | (288) |
| 题型三 | 求解含多个未知矩阵的矩阵方程 | (288) |
| 题型四 | 求与已知矩阵可交换的所有矩阵 | (291) |
| 题型五 | 已知一矩阵方程,求方程中某矩阵的行列式 | (291) |
| 2.2.8 | 初等变换与初等矩阵的关系的应用 | (292) |
| 题型一 | 用初等矩阵表示相应的初等变换 | (292) |
| 题型二 | 利用初等矩阵的逆矩阵的性质计算矩阵 | (293) |
| 习题 2.2 | | (293) |
| 2.3 | 向量 | (296) |
| 2.3.1 | 判别向量组线性相关与线性无关 | (296) |
| 题型一 | 用线性相关性定义做选择题、填空题 | (296) |
| 题型二 | 判别分量已知的向量组的线性相关性 | (297) |
| 题型三 | 证明几类向量组的线性相关性 | (298) |

| | | |
|--------|---|-------|
| 题型四 | 已知向量组的线性相关性,求其待定常数 | (302) |
| 2.3.2 | 判定向量能否由向量组线性表示 | (302) |
| 题型一 | 判定分量已知的向量能否由向量组线性表示 | (302) |
| 题型二 | 判断一抽象向量能否由向量组线性表示 | (304) |
| 题型三 | 判别一向量组能否由另一向量组线性表示 | (305) |
| 2.3.3 | 两向量组等价的常用证法 | (305) |
| 2.3.4 | 向量组的秩与极大线性无关组 | (308) |
| 题型一 | 求分量给出的向量组的秩及其极大线性无关组 | (309) |
| 题型二 | 将向量用极大线性无关组线性表示 | (310) |
| 题型三 | 证明抽象向量组的秩有关问题 | (310) |
| 题型四 | 证某向量组为一极大无关组 | (311) |
| 2.3.5 | 向量空间 | (312) |
| 题型一 | 求解空间的基、标准正交基(规范正交基) | (312) |
| 题型二 | 求过渡矩阵 | (314) |
| 题型三 | 求向量在某组基下的坐标 | (314) |
| 习题 2.3 | | (316) |
| 2.4 | 线性方程组 | (318) |
| 2.4.1 | 判定线性方程组解的情况 | (318) |
| 题型一 | 判定齐次线性方程组解的情况 | (318) |
| 题型二 | 判定非齐次线性方程组解的情况 | (320) |
| 2.4.2 | 由其解反向求方程组或其参数 | (321) |
| 题型一 | 已知 $AX=0$ 的解的情况,反求 A 中参数 | (322) |
| 题型二 | 已知 $AX=b$ 的解的情况,反求方程组中参数 | (322) |
| 题型三 | 已知其基础解系,求该方程组的系数矩阵 | (323) |
| 2.4.3 | 证明一组向量为基础解系 | (324) |
| 2.4.4 | 基础解系和特解的简便求法 | (325) |
| 2.4.5 | 求解含参数的线性方程组 | (326) |
| 题型一 | 求解方程个数与未知数个数相等的含参数的线性方程组 | (327) |
| 题型二 | 求解方程个数与未知数个数不等的含参数的线性方程组 | (329) |
| 题型三 | 求解参数仅出现在常数项的线性方程组 | (330) |
| 题型四 | 求含参数的方程组满足一定条件的通解 | (330) |
| 2.4.6 | 求抽象线性方程组的通解 | (331) |
| 题型一 | A 没有具体给出,求 $AX=0$ 的通解 | (331) |
| 题型二 | 已知 $AX=b$ 的特解,求其通解 | (332) |
| 题型三 | 利用线性方程组的向量形式求(证明)其解 | (333) |
| 2.4.7 | 求两线性方程组的非零公共解 | (334) |
| 题型一 | 求两齐次线性方程组的非零公共解 | (334) |
| 题型二 | 证明两齐次线性方程组有非零公共解 | (335) |
| 题型三 | 讨论两方程组同解的有关问题 | (335) |
| 习题 2.4 | | (337) |
| 2.5 | 矩阵的特征值、特征向量 | (340) |
| 2.5.1 | 求矩阵的特征值、特征向量 | (340) |
| 题型一 | 求元素给出的矩阵的特征值、特征向量 | (340) |
| 题型二 | 证明(判别)抽象矩阵的特征值、特征向量 | (342) |
| 2.5.2 | 由特征值和(或)特征向量反求其矩阵 | (343) |
| 题型一 | 由特征值和(或)特征向量反求矩阵的待定常数 | (343) |
| 题型二 | 已知特征值、特征向量,反求其矩阵 | (344) |
| 题型三 | 计算 $A^n\beta$,其中 β 为列向量, A 为方阵 | (346) |

| | | |
|--------|--|-------|
| 2.5.3 | 求相关联矩阵的特征值、特征向量 | (346) |
| 2.5.4 | 判别同阶方阵是否相似 | (348) |
| 题型一 | 判别方阵是否可对角化 | (348) |
| 题型二 | 判别两同阶方阵是否相似 | (350) |
| 2.5.5 | 相似矩阵性质的简单应用 | (351) |
| 2.5.6 | 与两矩阵相似有关的计算 | (352) |
| 题型一 | 矩阵 A 可相似对角化, 求 A 中待定常数及可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值 | (352) |
| 题型二 | A 为实对称矩阵, 求 A 中待定常数及正交矩阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值 | (353) |
| 题型三 | 已知矩阵 A 和可逆矩阵 P 满足一等式, 求矩阵 B , 使 $P^{-1}AP = B$ | (354) |
| 习题 2.5 | | (355) |
| 2.6 | 二次型 | (357) |
| 2.6.1 | 化二次型为标准形 | (357) |
| 题型一 | 化二次型为标准形 | (357) |
| 题型二 | 已知二次型为标准形, 确定该二次型 | (360) |
| 2.6.2 | 判别或证明实二次型(实对称矩阵)的正定性 | (361) |
| 题型一 | 判别具体给定的二次型的正定性 | (361) |
| 题型二 | 判别或证明抽象的二次型(实对称矩阵)的正定性 | (361) |
| 题型三 | 确定待定常数使二次型或其矩阵正定 | (363) |
| 题型四 | 证明与正定矩阵相关联矩阵的正定性 | (364) |
| 2.6.3 | 合同矩阵 | (364) |
| 题型一 | 判别两实对称矩阵合同 | (364) |
| 题型二 | 讨论矩阵等价、相似及合同的关系 | (365) |
| 习题 2.6 | | (366) |

第 3 篇 概率论与数理统计

| | | |
|-------|------------------------|-------|
| 3.1 | 随机事件和概率 | (369) |
| 3.1.1 | 随机事件间的关系及运算 | (369) |
| 题型一 | 描绘随机试验的样本空间 | (369) |
| 题型二 | 用式子表示事件关系及其运算 | (369) |
| 题型三 | 利用事件运算的性质或图示法简化事件算式 | (370) |
| 题型四 | 求满足一定条件的事件关系 | (370) |
| 3.1.2 | 直接计算随机事件的概率 | (371) |
| 题型一 | 计算古典型概率 | (371) |
| 题型二 | 计算几何型概率 | (372) |
| 题型三 | 计算伯努利模型中事件的概率 | (374) |
| 3.1.3 | 间接计算随机事件的概率 | (374) |
| 题型一 | 计算和、差、积事件的概率 | (374) |
| 题型二 | 求与包含关系有关的事件的概率 | (376) |
| 题型三 | 计算与互斥事件有关的事件的概率 | (377) |
| 题型四 | 求与条件概率有关的事件的概率 | (377) |
| 题型五 | 求与他事件有关的单个事件的概率 | (377) |
| 题型六 | 判别或证明事件概率不等式 | (378) |
| 3.1.4 | 几个计算概率公式的实际应用 | (378) |
| 题型一 | 用加法公式求解实际应用题 | (378) |
| 题型二 | 用条件概率与概率的乘法公式求解实际应用题 | (379) |
| 题型三 | 用全概公式和逆概(贝叶斯)公式求解实际应用题 | (379) |

| | | |
|--------------|---|-------|
| 题型四 | 利用抽签原理计算事件概率 | (382) |
| 3.1.5 | 判别事件的独立性 | (383) |
| 题型一 | 判别(证明)两事件相互独立 | (383) |
| 题型二 | 判别(证明) $n(n>2)$ 个事件相互独立 | (384) |
| 习题 3.1 | | (385) |
| 3.2 | 一维随机变量及其分布 | (388) |
| 3.2.1 | 分布列、概率密度及分布函数性质的应用 | (388) |
| 题型一 | 判别分布列、概率密度及分布函数 | (389) |
| 题型二 | 证明某实函数为某随机变量的分布函数 | (390) |
| 题型三 | 利用分布的性质,确定待定常数或所满足的条件 | (390) |
| 题型四 | 求随机变量落在某点或某区间上的概率 | (391) |
| 3.2.2 | 求分布列(概率分布)、概率密度及分布函数 | (391) |
| 题型一 | 求概率分布(分布律)及其分布函数 | (391) |
| 题型二 | 求连续型随机变量的分布函数或其取值 | (393) |
| 题型三 | 求概率密度 | (394) |
| 3.2.3 | 利用常见分布计算有关事件的概率 | (394) |
| 题型一 | 利用二项分布计算伯努利概型中事件的概率 | (394) |
| 题型二 | 利用超几何分布计算事件的概率 | (396) |
| 题型三 | 利用几何分布计算事件的概率 | (397) |
| 题型四 | 利用泊松分布计算事件的概率 | (397) |
| 题型五 | 利用均匀分布计算事件的概率 | (398) |
| 题型六 | 利用指数分布计算事件的概率 | (399) |
| 题型七 | 利用正态分布计算事件的概率 | (400) |
| 3.2.4 | 随机变量函数的分布 | (403) |
| 题型一 | 已知一离散型随机变量的分布,求其函数(另一离散型随机变量)的分布 | (403) |
| 题型二 | 已知一连续型随机变量的分布,求其函数(另一连续型随机变量)的分布 | (404) |
| 题型三 | 已知一连续型随机变量的分布,求其函数(离散型随机变量)的分布 | (406) |
| 题型四 | 讨论随机变量函数分布的性质 | (407) |
| 习题 3.2 | | (408) |
| 3.3 | 二维随机变量的联合概率分布 | (410) |
| 3.3.1 | 求二维随机变量的分布 | (410) |
| 题型一 | 求二维离散型随机变量的联合分布律 | (410) |
| 题型二 | 求二维随机变量的边缘分布 | (413) |
| 题型三 | 由联合分布、边缘分布求条件分布 | (415) |
| 题型四 | 由条件分布反求联合分布、边缘分布 | (418) |
| 题型五 | 已知分区域定义的联合密度,求其分布函数 | (419) |
| 3.3.2 | 随机变量的独立性 | (420) |
| 题型一 | 判别两随机变量的独立性 | (420) |
| 题型二 | 利用独立性确定联合分布中的待定常数 | (424) |
| 3.3.3 | 计算二维随机变量取值的概率 | (425) |
| 题型一 | 计算两离散型随机变量运算后取值的概率 | (425) |
| 题型二 | 求二维连续型随机变量落入平面区域内的概率 | (426) |
| 题型三 | 求与 $\max(X,Y)$ 或(和) $\min(X,Y)$ 有关的概率 | (427) |
| 题型四 | 求系数为随机变量的二次方程有根、无根的概率 | (427) |
| 3.3.4 | 求二维随机变量函数的分布 | (428) |
| 题型一 | 已知 (X,Y) 的联合分布律,求 $Z=g(X,Y)$ 的分布律 | (428) |
| 题型二 | 求两连续型随机变量的简单函数的分布 | (429) |
| 题型三 | 已知 X,Y 的分布,求 $\max(X,Y)$ 或(和) $\min(X,Y)$ 的分布 | (433) |

| | |
|--|-------|
| 习题 3.3 | (435) |
| 3.4 随机变量的数字特征 | (438) |
| 3.4.1 求一维随机变量的数字特征 | (438) |
| 题型一 求随机变量的数学期望与方差 | (438) |
| 题型二 求随机变量函数的数学期望 | (441) |
| 题型三 计算随机变量的矩 | (443) |
| 3.4.2 求二维随机变量的数字特征 | (444) |
| 题型一 求 (X,Y) 的函数 $g(X,Y)$ 的数学期望和方差 | (444) |
| 题型二 计算协方差和相关系数 | (445) |
| 3.4.3 计算两类分布的数字特征 | (449) |
| 题型一 计算正态分布的数字特征 | (449) |
| 题型二 计算 $Z=\max(X,Y)$ 或 (和) $W=\min(X,Y)$ 的数字特征 | (450) |
| 3.4.4 讨论随机变量相关性与独立性的关系 | (452) |
| 题型一 确定两随机变量相关与不相关 | (452) |
| 题型二 讨论相关性与独立性的关系 | (453) |
| 3.4.5 已知数字特征,求分布中的待定常数 | (454) |
| 3.4.6 求解两类综合应用题 | (456) |
| 题型一 求解与数字特征有关的实际应用题 | (456) |
| 题型二 求解概率论与其他数学分支的综合应用题 | (457) |
| 习题 3.4 | (459) |
| 3.5 大数定律和中心极限定理 | (461) |
| 3.5.1 用切比雪夫不等式估计事件的概率 | (461) |
| 3.5.2 大数定律成立的条件和结论 | (463) |
| 题型一 利用三个大数定律成立的条件解题 | (465) |
| 题型二 求随机变量序列依概率的收敛值 | (466) |
| 3.5.3 两个中心极限定理的简单应用 | (468) |
| 题型一 利用棣莫弗-拉普拉斯定理近似计算事件概率 | (468) |
| 题型二 已知随机变量取值的概率,估计取值范围 | (469) |
| 题型三 应用列维-林德伯格中心极限定理的条件、结论解题 | (469) |
| 题型四 近似计算 n 个随机变量之和取值的概率 | (470) |
| 题型五 已知 n 个随机变量之和取值的概率,求个数 n | (471) |
| 习题 3.5 | (472) |
| 3.6 数理统计初步 | (474) |
| 3.6.1 求统计量的分布 | (474) |
| 题型一 求统计量的分布及其分布参数 | (475) |
| 题型二 求统计量取值的概率 | (478) |
| 题型三 求统计量的数字特征 | (479) |
| 题型四 求经验分布函数 | (480) |
| 3.6.2 参数估计 | (481) |
| 题型一 求总体分布中未知参数的矩估计量(值) | (481) |
| 题型二 求未知参数的极(最)大似然估计量(值) | (482) |
| 题型三 判别估计量的无偏性、有效性和一致性(相合性) | (485) |
| 题型四 求正态总体参数的置信区间及其有关参数 | (489) |
| 3.6.3 假设检验 | (494) |
| 题型一 计算简单情形下的两类错误概率 | (494) |
| 题型二 对单个正态总体参数进行假设检验 | (495) |
| 题型三 对两个正态总体参数进行假设检验 | (497) |
| 题型四 用检验方法及其结论做填空题与选择题 | (498) |
| 习题 3.6 | (499) |
| 习题答案与提示 | (502) |

第 1 篇 高等数学

1.1 函数、极限、连续

1.1.1 求几类函数的表达式

题型一 求分段函数的复合函数

常用代入法或分段代入法求之.

设 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq \varphi_1(x), \\ f_2(x), & x > \varphi_2(x); \end{cases} g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \leq \psi_1(x), \\ g_2(x), & x > \psi_2(x). \end{cases}$ 为求 $f[g(x)]$, 先将 $g(x)$ 代入

$f(x)$ 表达式中的所有 x , 得到

$$f[g(x)] = \begin{cases} f_1[g(x)], & g(x) \leq \varphi_1[g(x)], \\ f_2[g(x)], & g(x) > \varphi_2[g(x)]. \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

②

再将 $g(x)$ 的分段表达式 $g_1(x)$ 分别代入式 ①、式 ② 中右端的 $g(x)$, 并将所得不等式与 $g_1(x)$ 的自变量的变化范围 $x \leq \psi_1(x)$ 求交, 对 $g(x)$ 的另一分段表达式 $g_2(x)$ 也同样处理, 于是得到

$$f[g(x)] = \begin{cases} f_1[g_1(x)], & g_1(x) \leq \varphi_1[g_1(x)], & x \leq \psi_1(x), & \textcircled{3} \\ f_2[g_1(x)], & g_1(x) > \varphi_2[g_1(x)], & x \leq \psi_1(x), & \textcircled{4} \\ f_1[g_2(x)], & g_2(x) \leq \varphi_1[g_2(x)], & x > \psi_2(x), & \textcircled{5} \\ f_2[g_2(x)], & g_2(x) > \varphi_2[g_2(x)], & x > \psi_2(x). & \textcircled{6} \end{cases}$$

分别求解式 ③、式 ④、式 ⑤、式 ⑥ 中的不等式组 (其中有些不等式组可能无解), 即得复合函数 $f[g(x)]$ 各段自变量的取值范围.

例 1 [2001 年 1, 2]* 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解一 用代入法求之, 得到

$$f[f(x)] = \begin{cases} 1, & |1| \leq 1, & |x| \leq 1, & \textcircled{1} \\ 1, & |f(x)| \leq 1, & & \textcircled{2} \\ 0, & |f(x)| > 1 & = & \begin{cases} 0, & |1| > 1, & |x| \leq 1, & \textcircled{2} \\ 1, & |0| \leq 1, & |x| > 1, & \textcircled{3} \\ 0, & |0| > 1, & |x| > 1. & \textcircled{4} \end{cases} \end{cases}$$

其中上式最右端的不等式组 ② 与 ④ 无解, 因而得到

$$f[f(x)] = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1 \end{cases} = 1 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

解二 由于对任意实数 x , 均有 $|f(x)| \leq 1$, 根据 $f(x)$ 的定义有 $f[f(x)] = 1$.

题型二 已知 $f[g(x)] = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 是已知函数, 求 f 或 g

* 例 1 [2001 年 1, 2] 表示例 1 是 2001 年数学一和数学二的考题, 下同.