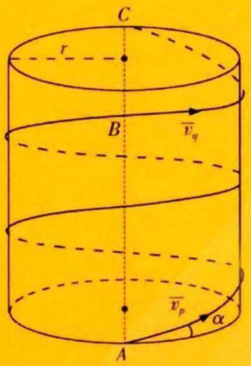
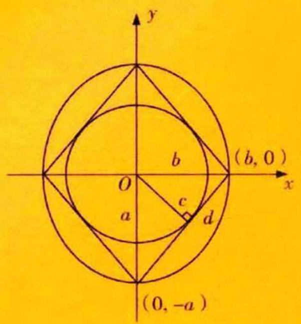
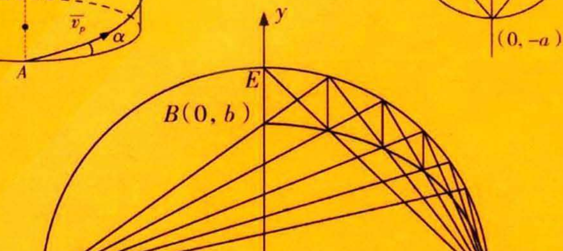
数理公式定理新创意

SHULI GONGSHI DINGLI XINCHUANGYI

黄海英◎著







华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

数理公式定理新创意

黄海英　著

华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

数理公式定理新创意/黄海英著. —广州：华南理工大学出版社，2016.11

ISBN 978-7-5623-5087-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①黄… Ⅲ.①理科（教育）－公式－中学－课外读物 ②理科（教育）－定律－中学－课外读物 Ⅳ.①G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 224394 号

数理公式定理新创意

黄海英　著

出 版 人：卢家明

出版发行：华南理工大学出版社

（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）

http://www.scutpress.com.cn　E-mail: scutc13@scut.edu.cn

营销部电话：020-87113487　87111048（传真）

责任编辑：刘　锋　袁　泽

印 刷 者：虎彩印艺有限公司

开　　本：850mm×1168mm　1/32　**印张：**5　**字数：**135 千

版　　次：2016 年 11 月第 1 版　2016 年 11 月第 1 次印刷

定　　价：38.00 元

前　言

本书主要内容分为论文研究篇(数理公式定理研究篇)和题解分析篇。

"论文研究篇"主要由标有"△""* "等符号的专题组成,是包括八篇核心论文的篇章,也是作者于20世纪80年代初期最早撰写而经修改完成的,如几篇数学重要分支高阶数列系列论文等。题材不一定全是独自发明的,但有关它们的思想思路之启示,新公式、定理的推导证明,方法、形式等实质性内容,如椭圆几何新作法的"等值定理""高阶数列恒等万能通项定理""高阶数列系列新公式与统一公式及论证""刚体重心不倒原理"以及两个"等积定理"等概念,却完全是新颖的,属于作者独创、发明的①。

"题解分析篇"主要是作者在20世纪70年代末期的卅余年来,尤其近廿余年以来在各种情况下自己设计并分析解答的题材,以及对一些较为经典的、难度较大的传统模拟高考参考、选做题目和一些大学理论力学等杂题,经过加深、加多的提问之修改而作和解答(数理自设题选及解答)的题材。

本书部分内容适合于掌握了大学《微积分》概念等基础知识和《工程力学》理论的广大数学、物理教师,"自然科学基础研究"学者,理工专业研究生、本科生,土木工程人员及金融经济工作者等阅读;部分内容只要具备了中等数学程度的高中生和数理研究爱好者就能看懂。

---

① "椭圆等值定理"之"几何新作法""速算法""刚体重心不倒原理"属发明的新方法、新原理,两个"等积定理"属新发现。

由于作者水平有限,书中难免有误,请各位读者提出宝贵的意见。

(说明:本书凡注有"△"(或"* ")为核心论文及难(或较难)之内容。)

笔者(电话:15915190209 或 13825111013;
微信号:15915190209;
邮箱:515557352@qq.com)
2013 年 2 月 5 日于清远连州

序

从20世纪80年代初到现在，一个先在国防军工单位，之后又转到银行基层工作的原自学考上国防工业大学机械设计与制造专业的大学毕业生，“板凳干坐十年冷”，几十年如一日地业余研究数学物理课题，并且到了痴迷的程度，这是一种什么精神？这是一种什么毅力？

我记得，作者黄海英从20世纪80年代初带着自己的研究成果（论文）来到广州，到华南工学院（现华南理工大学）、华南师范大学等找有关专家探讨并联系发表论文。然而，也正是本书之精华——核心论文中的研究思路、定理证明、公式推导所在篇章，在当时一次次地投稿，又一次次地石沉大海或被冷语退回（曾带稿登门）。但黄海英始终没有被逆境吓倒，始终没有放弃对数学、物理课题的研究。功夫不负有心人，《一个“椭圆等值定理”的被发现及其证明——推出一种椭圆几何新作法及其应用（续篇二）》和《也谈高（二）阶等差数列的几个公式——介绍一种新公式及其推导方法（一）》两篇论文被收入《跨世纪中国改革开放的理论与实践》论文集及续书；《基层营业所库存现金持有量浅探》一文在《广东城乡金融》2000年第10期发表，并被收入《中国财税金融干部优秀论文选》等书；《适应金融体制改革 加强安全防范工作》还被收入《农村金融论文集》《2001中国金融文集》《当代中国发展论坛》《中国科研、学术成果调查报告》等由中央文献出版社出版和由人民日报社出版的大型书典中。其中《基层营业所库存现金持有量浅探》和《适应金融体制改革 加强安全防范工作》还获得“优秀论文二等奖”。我坚信，如果作者在大学或研究院所工作，

他的很多论文应该早已发表,并将会有更多的研究成果。

本书是作者几十年来的研究成果(包括公开发表过的和尚未发表过的核心论文),有作者的研究思路、公式推导、定理证明,还有例题设计和解题过程。

本书的出版使作者把研究成果留给后人的愿望得以实现,为数学、物理知识的探究增添了新篇章及新读物。我深信本书的出版,将会进一步激励年轻一代的数学、物理研究爱好者不懈探索,更将激励我们的草根研究。

苏海成
原华南理工大学力学实验中心高级工程师
2013 年春

目　录

※论文研究篇※

数学及物理等理科专题的研究论文,应该能提出具体的新论点。然后根据论点,以符合逻辑及用推理的思维方法,进行严格的推导论证,最终才能够得到正确的、具有新颖性的结论。概括归纳起来即:提出论点(论据)→通过论证(推理)→得出正确结论。这是撰写科学(包括自然科学和社会科学)论文的至关重要的“三步曲”。通俗点说,只要具备了这样有论点的问题,通过说理的方式方法一步一步地去证明、议论,就一定会得到一个合理的正确结果。这样得出的结论,才会有它的新创意,才能表现出它的创新点及创新思想,也只有这样,才能够将我们得出的正确结论这一学术成果有机地应用到具体的科学技术项目上,并可对该项目提出更高的技术要点和新要求,最终得到问题的解决。

本篇的以下内容,尤其是等值定理、恒等万能通项定理、刚体重心不倒原理(及等积定理)等所在的几篇核心论文,均有该特点并能说明上述问题。

* 论某些情形下椭圆的存在性(一)

在平面直角坐标系中,在某些假设的、特定的先决条件下,椭圆曲线(轨迹)是否存在?为什么?若存在,是否具有一般性?其方程又如何?下面,就让我们首先来看两例,通过这两例来论证上述几个问题的结论。

例 1 若椭圆短轴的顶点,是与其同心的、圆心在原点的单位圆与椭圆之内切点,且此椭圆焦点的横坐标,又恰为过单位圆在两坐标轴的两交点的割线与该椭圆之交点的横坐标,求此椭圆方程。

分析:设椭圆如图 1 所设的情况(由于它的对称性,故只作出 F_1 即可),若成立,则该椭圆方程必然存在。因椭圆短轴之顶点恰外切于单位圆(所谓单位圆,即其圆半径为 1 个单位的圆),由此,可知隐含的关系量即椭圆之半短轴 $b=1$。又结合椭圆的性质,可知 $a^2=b^2+c^2=1+c^2$,所以,最终的问题应归结为:求出椭圆的半焦距 c 与半长轴 a 之关系式 $c=c(a)$,则可从上式求出其符合题意的 a 根,从而椭圆方程亦可求。到此为止,问题即可得到解决。因此,应首先求出单位圆与两坐标轴交点的割线与下半部椭圆的交点横坐标,即先求解出如下联立方程组。

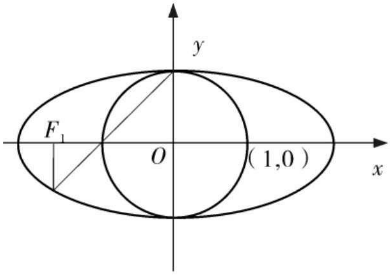


图 1

$$\text{解:}\begin{cases} y=x+1\cdots① \\ y=-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=-\dfrac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}{}^{*}\cdots② \\ a^2=b^2+c^2=1+c^2\cdots③\text{(补充方程)} \end{cases}$$

由方程式①②得:$a^2x^2+2a^2x+a^2=a^2-x^2$

$$(a^2+1)x^2+2a^2x=0$$

$$x[(a^2+1)x+2a^2]=0,$$

解得 $x_1=0$(舍去),$x_2=-\dfrac{2a^2}{a^2+1}$。

因椭圆之各元素 a、b、c 均为正实数,所以

$c=|OF_1|=|x_2|=\dfrac{2a^2}{a^2+1}\cdots$④

将④代入③得:$\dfrac{(a^2+1)^2+4a^4}{(a^2+1)^2}=a^2$,

即 $a^6+2a^4+a^2=a^4+2a^2+1+4a^4$,

移项得 $a^6-3a^4-a^2-1=0$(还可由"点到直线的距离"公式得到)。

这是一个关于 a 的一元六次(高次)方程。显然,类似特殊的双二次方程来讲,可降次为一个双三次方程:$(a^2)^3-3(a^2)^2-(a^2)-1=0$。令 $a^2=A$,则原式可变为 $A^3-3A^2-A-1=0$。

这是一个标准的一元三次方程的一般形式:$x^3+a'x^2+b'x+c'=0$

即 $a'=-3$,$b'=-1$,$c'=-1$。

令 $A=B-\dfrac{a'}{3}=B+1$,

则 $(B+1)^3-3(B+1)^2-(B+1)-1=0$

$B^3+3B^2+3B+1-3B^2-6B-3-B-2=0$

$B^3-4B-4=0$ 即 $B^3+pB+q=0$

故 $p=-4$,$q=-4$,其(唯一)实根为:

$$B_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$=\sqrt[3]{2+\sqrt{4-\frac{64}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4-\frac{64}{27}}}=\sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{44}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{\frac{44}{27}}}$$

代回所令,得 $a^2 = A = B + 1 = 1 + \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{44}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{44}{27}}}$。

故所求椭圆方程为: $\frac{x^2}{1 + \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{44}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \frac{44}{27}}} + \frac{y^2}{1} = 1$。

这就是本题的结果。

* 由图可知,我们只需研究割线与椭圆的下半部,不包括 x 轴 ($y = 0$),即 x 轴以下($y < 0$)的曲线,故其方程为负的一支 $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$(下类同)。此时的公共解 $x_1 = 0$ 为在运算的过程中经过了两边平方扩大定义域以后所出现的增根。但,若考虑的是割线与椭圆的整条(全部)曲线(即其两支方程为 $y = \pm\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$)的交点,即此时的 $x_1 = 0$ 对正的一支来说,不是增根,而是直线与曲线的上交点的横坐标。

例 2 设椭圆长轴的顶点,是与其同心的、圆心在原点的单位圆与椭圆之外切点,且此椭圆一焦点的横坐标又恰为分别过该椭圆及单位圆在两坐标轴的某两交点的连线之交点的横坐标,求此椭圆方程。

解:设椭圆如图 2 所示的情况(分析如例 1)。首先求出如下联立方程组的解:

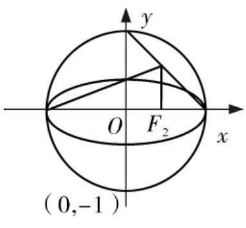


图 2

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x + b = bx + b \cdots ① \\ y = -\frac{1}{a}x + 1 = 1 - x \cdots ② \\ b^2 = a^2 - c^2 = 1 - c^2 \cdots ③\text{(补充方程)} \end{cases}$$

由方程①②得: $x = \frac{1 - b}{1 + b}$,即

$c = |OF_2| = |x| = \frac{1-b}{1+b}$…④

将④代入③得: $\frac{(1+b)^2-(1-b^2)^2}{(1+b)^2} = b^2 \Rightarrow b^2 + 2b^3 + b^4 = 4b$

移项得: $b^4 + 2b^3 + b^2 - 4b = 0$…⑤

这是一个关于 b 的一元四次(高次)方程。

式⑤整理得: $b(b^3 + 2b^2 + b - 4) = 0$

即 $b_1 = 0$ 和 $b^3 + 2b^2 + b - 4 = 0$

观察得此三次方程各项系数之代数和为零,可知 $b_2 = 1$(从 $b^4 + 2b^3 + b^2 - 4b = 0$ 中亦可看出)。对多项式 $b^3 + 2b^2 + b - 4$ 进行综合除法(也可用多项式除法),使方程降次:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 2 & 1 & -4 & \underline{1} \\ & 1 & 3 & 4 & \\ \hline 1 & 3 & 4 & 0 & \end{array}$$

降次后的方程的系数是 1,3,4(原系数为 1,2,1,−4),

由此得: $b^2 + 3b + 4 = 0$…⑥

解方程⑥得 $b_{3,4} = \pm \frac{-3+\sqrt{7}i}{2}$

即 $b_{1,2} = 0,1$ $\quad b_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{2}$。

讨论: 由原题设可知,b 不可能为 1,因当 b 为 1 时,$c = 0$,此时,椭圆退化为圆这种特殊形式,即成了本例的单位圆,与题意矛盾。又由椭圆的性质,可知其各元素 a、b、c 均为大于零的正实数值,因此 b 更不可能为零或复数值,所以四次方程⑤的所有四个根 0,1,$\frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{2}$均不符合原题设,即我们所得到的结果与原命题矛盾。故我们可得出结果: 在原题设(例 2)的情况下,所求之椭圆方程为

虚系数方程(无实系数方程),所以其曲线(轨迹)在“实平面”不存在。也就是说,原命题是个假命题,因不可能有这样的椭圆(除非焦点非该处)。

于是又回到前面的问题上面去了。即:对于例1和例2的结果,是否具有一般性(当圆半径改变时)?其方程又是如何?显然,从其受某些条件“约束”的情况来分析,可知问题的答案是肯定的。因为,不论其圆的半径如何变动,但我们均假定与之相外(内)切的椭圆是被深深地“约束”在此圆及某些特定线条关系的条件之下的,即我们所考虑、讨论的问题是在椭圆与圆及其某些关系紧紧相关的前提下进行的,所以,确切地说,尽管半径在变动,但其题设条件实际上没有变(可从该图中直观地理解)。故我们可得出肯定的结论。

另一方面,类似以上的解题过程,我们也可以从理论上得到证明(为简便起见,在此不加以证明)。

对例1的情形,当圆半径为任意正实数 k 时,与其相外切的椭圆之半长轴 a 是方程 $a^6-3k^2a^4-k^4a^2-k^6=0$ 的唯一正实根。可求得

$$a^2=k^2\left(1+\sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{44}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{\frac{44}{27}}}\right)。$$

显然,它与 $k=1$ 时的 $a^2=1^2\left(1+\sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{44}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{\frac{44}{27}}}\right)=1+\sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{44}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{\frac{44}{27}}}$ 的形式是一致的,并且,可以从中看出,当圆半径增加了 k 倍时,与其相外切的椭圆之半长轴 a 也相应地增加 k 倍(b、c 也如此,该例 $a\approx1.84k$)。

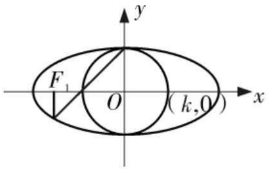
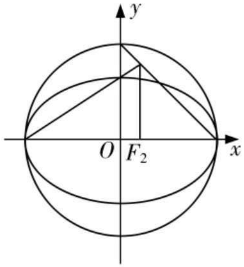
故其方程为 $\dfrac{x^2}{k^2\left(1+\sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{44}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{\frac{44}{27}}}\right)}+\dfrac{y^2}{k^2}=1$。

可见,此时椭圆曲线同样存在(即具有一般性),且其方程之形式仍然是一致的(即具有形式不变性)。

对例2的情形,当半径为k时,b是方程$b^4+2kb^3+k^2b^2-4k^3b=0$的根。可求得$b_{1,2}=0,k$;$b_{3,4}=\dfrac{k(-3\pm\sqrt{7}\mathrm{i})}{2}$。

可见,此时,该有关椭圆曲线在实平面也同样不存在(即同样具有一般性,除非该处非焦点),且其复系数方程的根的形式也仍然一致,即后者仍为前者之k倍(也具有形式不变性)。

同理,我们还可得出未加例举的其他几种情形的结论,连同上述的两种共选八种汇集列表如下:

类型	假设的椭圆轨迹(曲线)	a 或 b 值	$c=c(a)$ 或 $c=c(b)$	$f(a)$ 或 $f(b)$ 之特性	椭圆方程虚实性	实平面曲线存在性
1		$a^6-3k^2a^4-k^4a^2-k^6=0$ 的合题设之实根 $b=k$	$c=\frac{2ka^2}{k^2+a^2}$	a、k 分别逐渐降次与升次,且各项之 a、k 次数和相等	$\frac{x^2}{k^2\left(1+\sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{44}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{\frac{44}{27}}}\right)}+\frac{y^2}{k^2}=1$	存在
2		$b^4+2kb^3+k^2b^2-4k^3b=0$ 的合题设之实根 $a=k$	$c=\frac{k(k-b)}{k+b}$	b、k 分别逐渐降次与升次,且各项之 b、k 次数和相等	虚系数方程($b_{1,2}=0$、k,$b_{3,4}=\frac{k(-3\pm\sqrt{7}\mathrm{i})}{2}$)	不存在