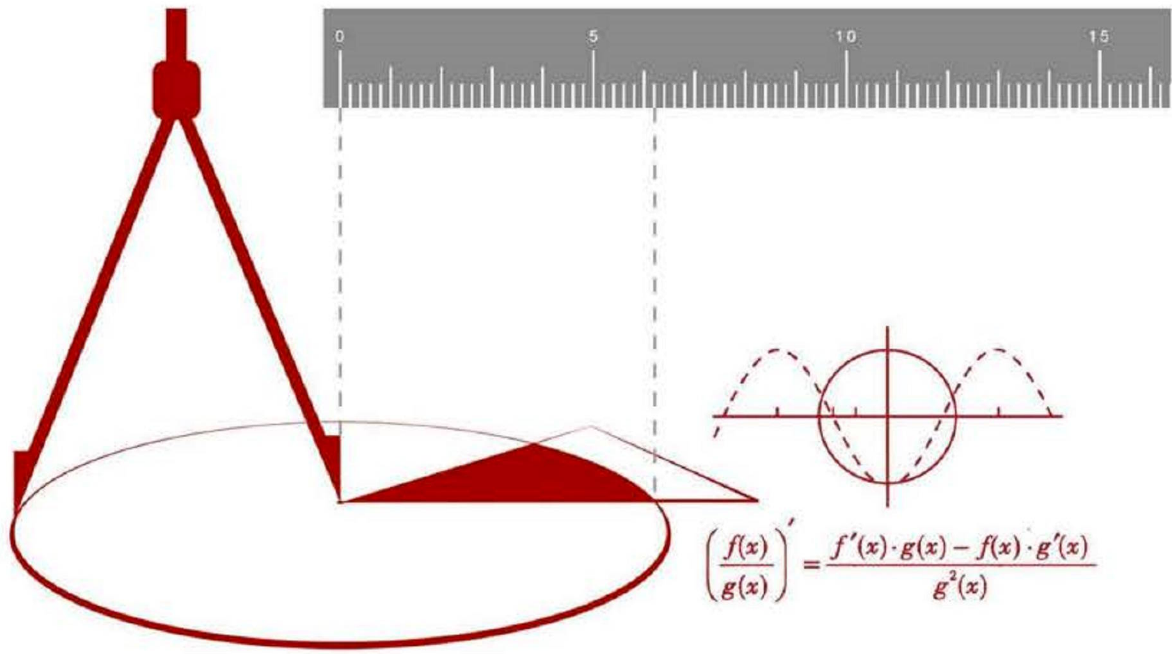
高中数学（浙江卷）
省级竞赛试题及解答

浙江省数学会　主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学省级竞赛试题及解答
(浙江卷)

浙江省数学会　主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学省级竞赛试题及解答．浙江卷／浙江省数学会主编．—杭州：浙江大学出版社，2017.3
ISBN 978-7-308-16735-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①浙… Ⅲ.①中字数学课－高中－题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 037460 号

高中数学省级竞赛试题及解答(浙江卷)
主编　浙江省数学会

责任编辑　邹小宁
责任校对　金佩雯　陈　宇
封面设计　杭州林智广告有限公司
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷　杭州钱江彩色印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　8
字　　数　200 千
版 印 次　2017 年 3 月第 1 版　2017 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-16735-2
定　　价　18.00 元

前　言

在浙江省数学会的指导下，数学普及工作委员会按照“普及的基础上不断提高”的方针，积极开展各种活动，如举办一年一度的夏令营、组织高中数学竞赛（全国高中数学联合竞赛浙江省预赛）、中学教师教练员培训等。通过这些普及活动激发了广大中学生学习数学的兴趣，并发现了一批数学苗子，为全国中学生数学冬令营和国家集训队输送了许多优秀的数学人才。截至目前，我省在国际数学奥林匹克中取得了五金一银的优异成绩，这使广大中学师生和数学工作者为之振奋，参与数学竞赛活动的热忱不断高涨，我省数学普及工作进入了一个崭新的发展阶段。

我们以为，数学普及和推广必须依托载体，通过载体使活动落地开花。浙江省高中数学竞赛和夏令营是不可或缺的抓手，尤其是高中数学竞赛活动既为全国高中数学联合竞赛做了铺垫和选拔工作，也为参加高考的学生提供了一次练兵机会。目前，参加高中数学竞赛人数与日俱增，达到 5 万名学生。毋庸置疑，高中数学竞赛的试题质量得到了广大师生的高度认可。

目前，浙江省高中数学竞赛采用一卷两分叉的形式，即同一份试卷前 20 道试题相同，为 B 卷；A 卷在 B 卷的基础上增加两道附加题。在试题命制方面，我们本着在普及的基础上提高的原则，以高考为起点，B 卷试题难度严格控制在高考水平，着重考查学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，以及分析问题和解决问题的能力等；A 卷的两道附加题体现竞赛水平，着重考查学生综合运用归纳、演绎、概括、抽象等重要思想方法的能力，难度稍微低于全国高中数学联赛二试。

应广大师生的要求，我们将历年浙江省高中数学竞赛试题及部分数学夏令营活动的测试题结集出版，同时精选了部分夏令营教师的讲稿，整理成六个专题一并出版。又编拟了一套省赛模拟试题，供学生课后自测。所有试题及课外练习都给出了参考答案，供学生查阅。

由于时间仓促，难免挂一漏万，不妥之处敬请读者批评指正。

目 录

第一部分　专题讲座选讲

第一讲　函数的综合应用

一、基本知识

函数是最重要的数学思想，函数的综合应用一般包括下面的内容：

1. 函数的概念、图象、性质的综合应用；

2. 函数与解方程、解不等式的综合应用；

3. 函数的相关应用问题；

4. 解决函数综合问题时，进行等价转化、分类讨论、数形结合思想和构造、换元、迭代等方法的综合运用。

二、典型例题

（一）二次函数

1. 二次函数对称轴与区间位置关系问题

例题 1　设函数 $f(x)=x^2-(k^2-5ak+3)x+7(a,k\in\mathbf{R})$。已知对于任意的 $k\in[0,2]$，若 x_1,x_2 满足 $x_1\in[k,k+a]$，$x_2\in[k+2a,k+4a]$，则 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，求正实数 a 的最大值。

解：由于二次函数 $f(x)=x^2-(k^2-5ak+3)x+7$ 的对称轴为 $x=\dfrac{k^2-5ak+3}{2}$，故题设条件等价于对任意的 $k\in[0,2]$ 均有 $\dfrac{k^2-5ak+3}{2}\geqslant k+\dfrac{5}{2}a$。即对任意的 $k\in[0,2]$ 均有 $5a\leqslant\dfrac{k^2-2k+3}{k+1}$，$5a\leqslant\min\limits_{0\leqslant k\leqslant 2}\left\{\dfrac{k^2-2k+3}{k+1}\right\}$。

又 $\dfrac{k^2-2k+3}{k+1}=(k+1)+\dfrac{6}{k+1}-4\geqslant 2\sqrt{(k+1)\times\dfrac{6}{k+1}}-4=2\sqrt{6}-4$，当且仅当 $k=\sqrt{6}-1$ 时取等号，故 $\min\limits_{0\leqslant k\leqslant 2}\left\{\dfrac{k^2-2k+3}{k+1}\right\}=2\sqrt{6}-4$。所以，正实数 a 的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{6}-4}{5}$。

评注：二次函数一个重要的性质就是对称性，所以，对称轴往往是解决二次函数的突破点。下面一道二次函数题目有很多值得讨论的地方，解法很多：设函数 $f(x)=3ax^2-2(a+b)x+b$，其中 $a>0$，b 为任意常数。证明：当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有 $|f(x)|\leqslant\max\{f(0),f(1)\}$。

2. 二次函数系数问题

例题 2　设 $f(x)=ax^2+bx+c$，若 $|f(0)|\leqslant 1$，$|f(1)|\leqslant 1$，$|f(-1)|\leqslant 1$，证明 $-1\leqslant x\leqslant 1$，有 $|f(x)|\leqslant\dfrac{5}{4}$。

证明:$a=\dfrac{1}{2}(f(1)+f(-1)-2f(0)),b=\dfrac{1}{2}(f(1)-f(-1)),c=f(0)$,

$f(x)=f(1)\dfrac{x^2+x}{2}+f(-1)\dfrac{x^2-x}{2}+f(0)(1-x^2)$。

再分 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 和 $0<x\leqslant 1$ 两种情况讨论。

讨论留给学生思考。

例题 3 已知 a,b,c 为正整数,方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两实根为 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$,且 $|x_1|<1,|x_2|<1$,求 $a+b+c$ 的最小值。

解:依题意可知$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0,\\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}<0,\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}>0,\end{cases}$从而可知 $x_1,x_2\in(-1,0)$,所以有

$$\begin{cases}b^2-4ac>0,\\ f(-1)=a-b+c>0,\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b^2>4ac,\\ b<a+c,\text{又 } a,b,c \text{ 为正整数,取 } c=1,\\ c<a,\end{cases}$$

则 $a+1>b\Rightarrow a\geqslant b$,所以 $a^2\geqslant b^2>4ac=4a\Rightarrow a>4$,

从而 $a\geqslant 5$,所以 $b^2>4ac\geqslant 20$,又 $b<5+1=6$,所以 $b=5$,

因此 $a+b+c$ 有最小值为 11。

下面可证 $c\geqslant 2$ 时,$a\geqslant 3$,从而 $b^2>4ac\geqslant 24$,所以 $b\geqslant 5$,又 $a+c>b\geqslant 5$,所以 $a+c\geqslant 6$,所以 $a+b+c\geqslant 11$,

综上可得:$a+b+c$ 的最小值为 11。

评注:在涉及二次函数的问题中,有大量涉及二次函数系数问题,如:知函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$,记 $M(a,b)$ 是 $|f(x)|$ 在区间$[-1,1]$上的最大值。

(1) 求证:当 $|a|\geqslant 2$ 时,$M(a,b)\geqslant 2$;

(2) 当 a,b 满足 $M(a,b)\leqslant 2$ 时,求 $|a|+|b|$ 的最大值。

3. 二次函数零点问题

例题 4 对于函数 $f(x)$,若存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使 $f(x_0)=x_0$,则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个不动点,已知函数 $f(x)=ax^2+(b+1)x+(b-1)(a\neq 0)$。

(1) 当 $a=1,b=-2$ 时,求函数 $f(x)$ 的不动点;

(2) 对任意实数 b,函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点,求 a 的取值范围;

(3) 在(2)的条件下,若 $y=f(x)$ 的图象上 A,B 两点的横坐标是 $f(x)$ 的不动点,且 A,B 两点关于直线 $y=kx+\dfrac{1}{2a^2+1}$ 对称,求 b 的最小值。

解:(1) $f(x)=x^2-x-3$,x_0 是 $f(x)$ 的不动点,则 $f(x_0)=x_0^2-x_0-3=x_0$,得 $x_0=-1$ 或 $x_0=3$,函数 $f(x)$ 的不动点为 -1 和 3。

(2) 因为函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点,所以 $f(x)-x=ax^2+bx+(b-1)=0$ 恒有两个不等的实根,$\Delta=b^2-4a(b-1)=b^2-4ab+4a>0$ 对 $b\in\mathbf{R}$ 恒成立,所以$(4a)^2-16a<0$,得 a 的取值范围为$(0,1)$。

(3) 由 $ax^2+bx+(b-1)=0$ 得 $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$，由题知 $k=-1$，$y=-x+\frac{1}{2a^2+1}$。

设 A，B 中点为 E，则 E 的横坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a^2+1}\right)$，所以 $-\frac{b}{2a}=\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a^2+1}$，所以 $b=-\frac{a}{2a^2+1}=-\frac{1}{2a+\frac{1}{a}}\geqslant-\frac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $2a=\frac{1}{a}(0<a<1)$，即 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，所以 b 的最小值为 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$。

例题 5　已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>b>c)$ 的图象上有两点 $A(m_1,f(m_1))$，$B(m_2,f(m_2))$，满足 $f(1)=0$ 且 $a^2+(f(m_1)+f(m_2))a+f(m_1)f(m_2)=0$。

(1) 求证：$b\geqslant0$；

(2) 若 $f(x)$ 的图象与 x 轴的交点为 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，$(x_1<x_2)$，证明：$|x_1-x_2|\in[2,3)$；

(3) 问能否得出 $f(m_1+3)$，$f(m_2+3)$ 中至少有一个为正数？证明你的结论。

证明：由 $f(1)=0$ 即 $a+b+c=0$ 知 $a>0$，$c<0$。

又由已知得：$(f(m_1)+a)(f(m_2)+a)=0$，故在 m_1，m_2 中，必有一个是方程 $f(x)=-a\Leftrightarrow ax^2+bx+c+a=0$ 的根。所以 $b^2-4a(a+c)=b^2+4ab=b(b+4a)\geqslant0$，所以 $b\geqslant0$。

(2) 由于 $a>b\geqslant0>c$，所以 $a+c\leqslant a+b+c<2a+c$，故 $-2<\frac{c}{a}\leqslant-1$。

又 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=1-\frac{c}{a}$，所以 $|x_1-x_2|\in[2,3)$。

(3) 由前面的(1)知，我们可以不妨设存在 m_1，使得 $f(m_1)=-a<0$，这样，方程 $ax^2+bx+c=0$ 一定有两个实数根，设为 x_1，x_2。易知，二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在区间 $(x_2,+\infty)$ 为增函数。

又 $m_1+3-x_2>x_1+3-x_2>0$，所以 $f(m_1+3)>f(x_2)=0$。

评注：不动点是一个重要的数学概念，二次函数的不动点，本质上就是方程 $f(x)-x=0$ 的根。学生可以尝试做下面一道题目：

设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1，x_2 满足 $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$。

(1) 当 $x\in(0,x_1)$ 时，证明 $x<f(x)<x_1$；

(2) 设函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=x_0$ 对称，证明：$x_0<\frac{x_1}{2}$。

(二) 函数的性质

函数的性质主要是指单调性、奇偶性、周期性。

例题 6　已知实数 x，y 满足 $(3x+y)^5+x^5+4x+y=0$，求 $4x+y$ 的值。

解：由已知有 $(3x+y)^5+x^5+(3x+y)+x=0$，令 $F(x)=x^5+x$，可知该函数是奇函数，由 $F(3x+y)+F(x)=0$，得 $F(3x+y)=-F(x)\Leftrightarrow F(3x+y)=F(-x)$。

又 $F(x)=x^5+x$ 单调递增，所以 $(3x+y)=-x\Leftrightarrow 4x+y=0$。

例题 7　若 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 且 $|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$，则 $ab+bc+ca>-1$。

分析：实质上是要证明，一次函数 $f(x)=kx+h(k\neq0)$，$x\in(m,n)$，若区间两个端点的

函数值均为正,则对于任意 $x \in (m,n)$ 都有 $f(x) > 0$。

证明:将 $ab+bc+ca+1$ 写成 $(b+c)a+bc+1$,构造函数 $f(x)=(b+c)x+bc+1$,则 $f(a)=(b+c)a+bc+1$。

当 $b+c=0$ 时,即 $b=-c$,$f(a)=bc+1=-c^2+1$;

因为 $|c|<1$,所以 $f(a)=-c^2+1>0$;

当 $b+c\neq 0$ 时,$f(x)=(b+c)x+bc+1$ 为 x 的一次函数;

因为 $|b|<1$,$|c|<1$,

$f(1)=b+c+bc+1=(1+b)(1+c)>0$,$f(-1)=-b-c+bc+1=(1-b)(1-c)>0$。

由已知对于 $|a|<1$ 的一切值 $f(a)>0$,即 $(b+c)a+bc+1=ab+ac+bc+1>0$。

评注:例题 6 和例题 7 的关键都在于“转化”“构造”,把数学问题转化为其他函数问题,再应用函数的性质来解决问题。

例题 8 当 a 为何值时,关于 x 的不等式

$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\geqslant 0$ 有且只有一个实数解。

解:由题意 $a>0$,$a\neq 1$。设 $t=x^2+ax+5\geqslant 0$,则

原不等式 $\Leftrightarrow -\dfrac{\log_3(\sqrt{t}+1)}{\log_3 a}\times\log_5(t+1)+\dfrac{1}{\log_3 a}\geqslant 0$。

① 当 $0<a<1$ 时,原不等式 $\Leftrightarrow \log_3(\sqrt{t}+1)\times\log_5(t+1)\geqslant 1$。

设 $f(t)=\log_3(\sqrt{t}+1)\times\log_5(t+1)$,任取 $t_2>t_1\geqslant 0$,

则 $\log_3(\sqrt{t_2}+1)>\log_3(\sqrt{t_1}+1)\geqslant 0$,$\log_5(t_2+1)>\log_5(t_1+1)\geqslant 0$,

从而 $f(t_2)>f(t_1)$,$f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,由 $f(4)=1$ 知

原不等式 $\Leftrightarrow t=x^2+ax+5\geqslant 4$。

此不等式有无数个实数解,不合题意。

② 当 $a>1$ 时,同理可知原不等式 $\Leftrightarrow x^2+ax+1\leqslant 0$,

从而不等式 $x^2+ax-1\leqslant 0$ 有且只有一个实数解,$\Delta=a^2-4=0$,$a=2$。

当 $a=2$ 时,原不等式有且只有一个实数解 $x=-1$。所以 $a=2$。

例题 9 已知函数 $f(x)=x^2+(a+1)x+\lg|a+2|$ $(a\in\mathbf{R}$,且 $a\neq -2)$。

(1) 若 $f(x)$ 能表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 的和,求 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的解析式。

(2) 命题 P:函数 $f(x)$ 在区间 $[(a+1)^2,+\infty)$ 上是增函数;命题 Q:函数 $g(x)$ 是减函数。如果命题 P,Q 有且仅有一个是真命题,求 a 的取值范围。

(3) 在(2)的条件下,比较 $f(2)$ 与 $3-\lg 2$ 的大小。

解:(1) 因为 $f(x)=g(x)+h(x)$,$g(-x)=-g(x)$,$h(-x)=h(x)$,

所以 $f(-x)=-g(x)+h(x)$,所以 $\begin{cases} g(x)+h(x)=x^2+(a+1)x+\lg|a+2|, \\ -g(x)+h(x)=x^2-(a+1)x+\lg|a+2|, \end{cases}$

解得 $g(x)=(a+1)x$,$h(x)=x^2+\lg|a+2|$。

(2) 因为函数 $f(x)=\left(x+\dfrac{a+1}{2}\right)^2-\dfrac{(a+1)^2}{4}+\lg|a+2|$ 在区间 $[(a+1)^2,+\infty)$ 上是增函数,所以 $(a+1)^2\geqslant -\dfrac{a+1}{2}$,解得 $a\geqslant -1$ 或 $a\leqslant -\dfrac{3}{2}$ 且 $a\neq -2$。

又由函数 $g(x)=(a+1)x$ 是减函数,得 $a+1<0$,所以 $a<-1$ 且 $a\neq-2$。

所以命题 P 为真的条件是:$a\geqslant-1$ 或 $a\leqslant-\frac{3}{2}$ 且 $a\neq-2$。

命题 Q 为真的条件是:$a<-1$ 且 $a\neq-2$,

又因为命题 P,Q 有且仅有一个是真命题,所以 $a>-\frac{3}{2}$。

(2) 由(1) 得 $f(2)=2a+\lg|a+2|+6$。

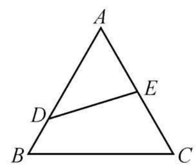
又因为 $a>-\frac{3}{2}$,所以 $f(2)=2a+\lg(a+2)+6$。

设函数 $v(a)=2a+\lg(a+2)+6$,因为 $v'(a)=2+\frac{1}{a+2}\ln 10>0$,

所以函数 $v(a)$ 在区间$[-\frac{3}{2},+\infty)$ 上为增函数。

又因为 $v\left(-\frac{3}{2}\right)=3-\lg 2$,所以当 $a>-\frac{3}{2}$ 时,$v(a)>v\left(-\frac{3}{2}\right)$,即 $f(2)>3-\lg 2$。

例题 10　如右图所示,某校把一块边长为 $2a$ 的等边 $\triangle ABC$ 的边角地辟为生物园,图中 DE 把生物园分成面积相等的两部分,D 在 AB 上,E 在 AC 上。



(1) 设 $AD=x(x\geqslant a)$,$ED=y$,求用 x 表示 y 的函数关系式;

(2) 如果 DE 是灌溉水管的位置,为了省钱,希望它最短,DE 的位置应该在哪里?如果 DE 是参观线路,即希望它最长,DE 的位置又应该在哪里?

解:(1) 因为 $\triangle ABC$ 的边长为 $2a$,D 在 AB 上,则 $a\leqslant x\leqslant 2a$,

因为 $\triangle ADE$ 面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半,所以$\frac{1}{2}x\cdot AE\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(2a)^2$,

解得 $AE=\frac{2a^2}{x}$,

在 $\triangle ADE$ 中,由余弦定理:

$y^2=x^2+\frac{4a^4}{x^2}-2x\cdot\frac{2a^2}{x}\cos 60^\circ$,

所以 $y^2=x^2+\frac{4a^4}{x^2}-2a^2$,

所以 $y=\sqrt{x^2+\frac{4a^4}{x^2}-2a^2}\,(a\leqslant x\leqslant 2a)$。

(2) 因为 $y=\sqrt{x^2+\frac{4a^4}{x^2}-2a^2}\,(a\leqslant x\leqslant 2a)$,令 $x^2=t$,则 $a^2\leqslant t\leqslant 4a^2$,

且 $y=\sqrt{t+\frac{4a^4}{t}-2a^2}$。设 $f(t)=t+\frac{4a^4}{t}-2a^2\,(a^2\leqslant t\leqslant 4a^2)$,

当 $t\in(a^2,2a^2)$ 时,任取 $a^2<t_1<t_2<2a^2$,

$f(t_1)-f(t_2)=\left(t_1+\frac{4a^4}{t_1}\right)-\left(t_2+\frac{4a^4}{t_2}\right)=(t_1-t_2)\cdot\frac{t_1t_2-4a^4}{t_1t_2}$,

因为 $a^2<t_1<t_2<2a^2$,

所以 $t_1t_2>0$,$t_1-t_2>0$,$t_1t_2-4a^4<0$,

所以 $f(t_1)-f(t_2)>0$,即 $f(t_1)>f(t_2)$,

所以 $f(x)$ 在$(a^2,2a^2)$ 上是减函数。

同理可得,$f(x)$ 在$(2a^2,4a^2)$ 上是增函数。

又因为 $f(2a^2)=4a^2$,$f(a^2)=f(4a^2)=5a^2$,当 $t=2a^2$ 时,$f(x)$ 有最小值,即 $x=\sqrt{2}a$ 时,y 有最小值,且 $y_{\min}=\sqrt{2}a$,此时 $DE \parallel BC$ 且 $AD=\sqrt{2}a$;当 $t=a^2$ 或 $4a^2$ 时,$f(x)$ 有最大值,即 $x=a$ 或 $2a$ 时,y 有最大值,且 $y_{\max}=\sqrt{5}a$,此时 DE 为 AB 或 AC 边上的中线。

例题 11 已知 $a>0$,函数 $f(x)=ax-bx^2$。

(1) 当 $b>0$ 时,若对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\leqslant 1$,证明:$a\leqslant 2\sqrt{b}$;

(2) 当 $b>1$ 时,证明:对任意 $x\in[0,1]$,$|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件是:$b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$;

(3) 当 $0<b\leqslant 1$ 时,讨论:对任意 $x\in[0,1]$,$|f(x)|\leqslant 1$ 成立的充要条件。

(1) **证明**:依题设,对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)\leqslant 1$。因为 $f(x)=-b\left(x-\dfrac{a}{2b}\right)^2+\dfrac{a^2}{4b}$,

所以 $f\left(\dfrac{a}{2b}\right)=\dfrac{a^2}{4b}\leqslant 1$,因为 $a>0$,$b>0$,所以 $a\leqslant 2\sqrt{b}$。

(2) **证明**:证必要性。对任意 $x\in[0,1]$,$|f(x)|\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant f(x)$ 据此可推出 $-1\leqslant f(1)$ 即 $a-b\geqslant -1$,所以 $a\geqslant b-1$。对任意 $x\in[0,1]$,$|f(x)|\leqslant 1\Rightarrow f(x)\leqslant 1$,因为 $b>1$,可推出 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)\leqslant 1$。即 $a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{b}}-1\leqslant 1$,所以 $a\leqslant 2\sqrt{b}$,所以 $b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$。

证充分性。因 $b>1$,$a\geqslant b-1$,对任意 $x\in[0,1]$,可以推出:$ax-bx^2\geqslant b(x-x^2)-x\geqslant -x\geqslant -1$,即:$ax-bx^2\geqslant -1$;因为 $b>1$,$a\leqslant 2\sqrt{b}$,对任意 $x\in[0,1]$,可推出 $ax-bx^2\leqslant 2\sqrt{b}-bx^2\leqslant 1$,即 $ax-bx^2\leqslant 1$,所以 $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$。

综上所述,当 $b>1$ 时,对任意 $x\in[0,1]$,$|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件是:$b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$。

(3) **解**:因为 $a>0$,当 $0<b\leqslant 1$ 时,对任意 $x\in[0,1]$。

$f(x)=ax-bx^2\geqslant -b\geqslant -1$,即 $f(x)\geqslant -1$;

$f(x)\leqslant 1\Rightarrow f(1)\leqslant 1\Rightarrow a-b\leqslant 1$,即 $a\leqslant b+1$;$a\leqslant b+1\Rightarrow f(x)\leqslant (b+1)x-bx^2\leqslant 1$,即 $f(x)\leqslant 1$。

所以,当 $a>0$,$0<b\leqslant 1$ 时,对任意 $x\in[0,1]$,$|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件是:$a\leqslant b+1$。

例题 12 已知 $\min\limits_{x\in\mathbf{R}}\dfrac{ax^2+b}{\sqrt{x^2+1}}=3$。

(1) 求 b 的取值范围;

(2) 对给定的 b,求 a 的值。

解:记 $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{\sqrt{x^2+1}}$。由 $f(0)=b$ 知,$b\geqslant 3$,且易知 $a>0$。

① 当 $b-2a\geqslant 0$ 时,

$$f(x)=\frac{ax^2+b}{\sqrt{x^2+1}}=a\sqrt{x^2+1}+\frac{b-a}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2\sqrt{a(b-a)}=3,$$

等号当 $a\sqrt{x^2+1}=\dfrac{b-a}{\sqrt{x^2+1}}$ 时,即 $x=\pm\sqrt{\dfrac{b-2a}{a}}$ 时取到,

此时，$a=\dfrac{b-\sqrt{b^2-9}}{2}$，特别当 $b=3$ 时，$a=\dfrac{3}{2}$。

② 当 $b-2a<0$ 时，令 $\sqrt{x^2+1}=t\quad(t\geqslant 1)$，

$f(x)=g(t)=at+\dfrac{b-a}{t}$，当 $t\geqslant 1$ 时单调递增，所以

$\min\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x)=g(1)=a+b-a=b=3$，此时 $a>\dfrac{3}{2}$。

综上所述：(1)b 的取值范围是$[3,+\infty)$。

(2) 当 $b=3$ 时，$a\geqslant\dfrac{3}{2}$；当 $b>3$ 时，$a=\dfrac{b-\sqrt{b^2-9}}{2}$。

三、课外训练

1. 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg|x-1||, & x\neq 1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ 则关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有 7 个不同实数解的充要条件是 (　　)

A. $b<0$ 且 $c>0$　　B. $b>0$ 且 $c<0$

C. $b<0$ 且 $c=0$　　D. $b\geqslant 0$ 且 $c=0$

2. 已知 $y=f(x)$ 是偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\dfrac{4}{x}$，且当 $x\in[-3,-1]$ 时，$n\leqslant f(x)\leqslant m$ 恒成立，则 $m-n$ 的最小值是 (　　)

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. 1　　D. $\dfrac{4}{3}$

3. 设函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 为奇函数，$f(1)=\dfrac{1}{2}$，$f(x+2)=f(x)+f(2)$，则 $f(5)$ 等于 (　　)

A. 0　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{5}{2}$　　D. $-\dfrac{3}{2}$

4. 设 a,b 为实数，集合 $M=\left\{\dfrac{b}{a},1\right\}$，$P=\{a,0\}$，$f:x\to x$ 表示把集合 M 中的元素 x 映射到集合 P 中仍为 x，则 $a+b$ 的值等于 (　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ± 1

5. 已知函数 $f(x)=x^2-2ax+2$，当 $x\in[-1,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant a$ 恒成立，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $-2<a<1$　　B. $-2\leqslant a\leqslant 1$

C. $-3\leqslant a\leqslant -2$　　D. $-3\leqslant a\leqslant 1$

6. 若关于 x 的方程 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{2+3a}{5-a}$ 有负数根，则实数 a 的取值范围为 (　　)

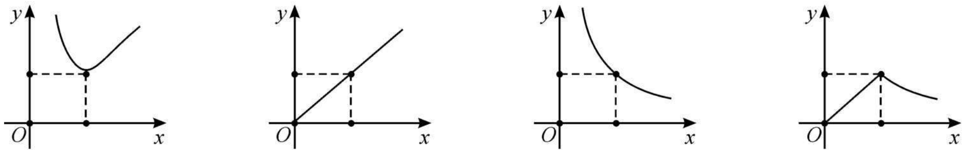
A. $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)\cup(5,+\infty)$　　B. $\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right)\cup(5,+\infty)$

C. $\left(-\dfrac{2}{3},5\right)$　　D. $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4}\right)$

7. 若函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\dfrac{2}{x+|x|}\right)=\log_2\sqrt{x|x|}$,则 $f(x)$ 的解析式是　　(　　)

A. $\log_2 x$　　B. $-\log_2 x$　　C. 2^{-x}　　D. x^{-2}

8. 函数 $y=3^{|\log_3 x|}$ 的图象是　　(　　)



A　　B　　C　　D

9. 已知实系数一元二次方程 $x^2+(1+a)x+a+b+1=0$ 的两个实根为 x_1, x_2,且 $0<x_1<1, x_2>1$,则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是　　(　　)

A. $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$

C. $\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right]$　　D. $\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$

10. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上单调递减的奇函数。若 $x_1+x_2>0, x_2+x_3>0, x_3+x_1>0$,则　　(　　)

A. $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)>0$　　B. $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)<0$

C. $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)=0$　　D. $f(x_1)+f(x_2)>f(x_3)$

11. 设 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$,记 $f_1(x)=f(x)$,若 $f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$,则 $f_{2006}(x)=$ ________。

12 已知函数 $f(x)$ 满足:$f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$, $f(1)=2$,则

$\dfrac{f^2(1)+f(2)}{f(1)}+\dfrac{f^2(2)+f(4)}{f(3)}+\dfrac{f^2(3)+f(6)}{f(5)}+\dfrac{f^2(4)+f(8)}{f(7)}=$ ________。

13. 设不等式 $2x-1>m(x^2-1)$ 对满足 $|m|\leqslant 2$ 的一切实数 m 的取值都成立,求 x 的取值范围________。

14. 已知 $x\in\mathbf{R}$,奇函数 $f(x)=x^3-ax^2-bx+c$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调。

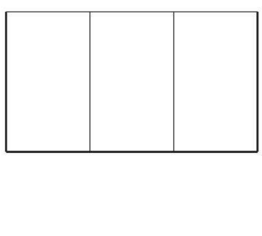
(1) 求字母 a, b, c 应满足的条件;

(2) 设 $x_0\geqslant 1, f(x_0)\geqslant 1$,且满足 $f[f(x_0)]=x_0$,求证:$f(x_0)=x_0$。

15. 某工厂拟建一座平面图(如下图所示)为矩形且面积为 200 平方米的三级污水处理池,由于地形限制,长、宽都不能超过 16 米,如果外周池壁建造单价为每米 400 元,中间池壁造价为每米 248 元,池底建造单价为每平方米 80 元。(池壁的厚度忽略不计,且池无盖)

(1) 写出总造价 y(元) 与污水处理池长 x(米) 的函数关系式,并指出定义域。

(2) 求污水处理池的长和宽各为多少时,污水处理池的总造价最低?并求出最低总造价?



16. 定义在实数集上的函数 $f(x)$，对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ 且 $f(0)\neq 0$。

(1) 求证：$f(0)=1$。

(2) 判断 $y=f(x)$ 的奇偶性。

(3) 若存在正数 c，使 $f\left(\frac{c}{2}\right)=0$，① 求证对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+c)=-f(x)$ 成立；② 试问函数 $f(x)$ 是不是周期函数。如果是，找出它的一个周期；如果不是，请证明。

17. 设 $f(x)=x^2-2ax(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的最大值为 $M(a)$，最小值为 $m(a)$。试求 $M(a)$，$m(a)$ 的表达式。

18. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=\dfrac{-2^x+b}{2^{x+1}+a}$ 是奇函数。

(1) 求 a,b 的值。

(2) 若对任意的 $t\in\mathbf{R}$，不等式 $f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$ 恒成立，求 k 的取值范围。

第二讲　几个重要不等式及应用

一、基本知识

基本的不等式包括以下几个不等式：

1. 均值不等式：设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$，则 $\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant\sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}$(当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等式成立,右边的不等式要求都是正数)。

2. 柯西不等式:设实数组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,则

$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$,“=”成立当且仅当存在 $\lambda,b_i=\lambda a_i(i=1,2,\cdots,n)$。

3. 排序不等式:两组实数 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$,则有 $a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\leqslant a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$,即逆序和 $\leqslant$ 乱序和 $\leqslant$ 顺序和。

4. 伯努利不等式:对任意实数 $x\geqslant-1$,有

(1) 若 $0<a<1$,则 $(1+x)^a\leqslant 1+ax$;(2) 若 $a\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$,则 $(1+x)^a\geqslant 1+ax$。

5. 琴生不等式:$a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+,a_1+a_2+\cdots+a_n=1$,若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸(凹)函数,则有 $f(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)\geqslant(\leqslant)a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\cdots+a_nf(x_n)$,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$。凸凹函数判别法:如果 $x\in[a,b]$ 时,$f''(x)>0$ 恒成立,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸函数,如果 $x\in[a,b]$ 时,$f''(x)<0$ 恒成立,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹函数。

运用以上不等式可得以下更一般的不等式和一些有用的结论,有时用这些结论也会起到意想不到的效果。

6. 幂均值不等式:设 $\alpha>\beta>0,a_i\in\mathbf{R}^+\ (i=1,2,\cdots,n)$,则

$$M_\alpha=\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\left(\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}=M_\beta。$$

7. 契比雪夫不等式:设两个实数组 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$,则

$$\frac{1}{n}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}{n}\leqslant\frac{1}{n}(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)。$$

等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$。

8. 一个基础关系式:$x^\alpha y^{1-\alpha}\leqslant\alpha x+(1-\alpha)y$,其中 $x,y>0,\alpha\in[0,1]$。

9. Holder 不等式:设 $a_k,b_k\geqslant 0(k=1,2,\cdots,n),p,q\geqslant 1$ 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}。$$

二、典型例题

（一）柯西不等式

例题 1　给定正整数 $n\geqslant 2$，设 $a_i\in\mathbf{N}^*$，$i=1,2,\cdots,n$，$a_1<a_2<\cdots<a_n$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leqslant 1$。求证：对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1^2-a_1+x^2}$。

证明：由柯西不等式得：$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2}\right)\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2$　①，

所以只需证 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1^2-a_1+x^2}$　②，

由已知 $a_i<a_{i+1}$，所以 $a_i+1\leqslant a_{i+1}$，所以 $a_i^2+a_i\leqslant a_{i+1}^2-a_{i+1}$，$i=1,2,\cdots,n-1$，

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_i}{(a_i^2+x^2)^2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i^2+a_i+x^2)-(a_i^2-a_i+x^2)}{(a_i^2+x^2)^2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i^2-a_i+x^2}-\frac{1}{a_i^2+a_i+x^2}\right)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_i^2-a_i+x^2}-\frac{1}{a_{i+1}^2+a_{i+1}+x^2}\right)+\left(\frac{1}{a_n^2-a_n+x^2}-\frac{1}{a_n^2+a_n+x^2}\right)$$

$=\left(\frac{1}{a_1^2-a_1+x^2}-\frac{1}{a_n^2+a_n+x^2}\right)<\frac{1}{a_1^2-a_1+x^2}$，所以 ② 式成立，得证。

（二）均值不等式

例题 2　存在实数 a,b,c 和正数 λ 使得 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有三个实根 x_1,x_2,x_3，且满足(1)$x_2-x_1=\lambda$，(2)$x_3>\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，求 $u=\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$ 的最大值。

解　记 $\frac{1}{2}(x_1+x_2)=m$，则 $x_1=m-\frac{\lambda}{2}$，$x_2=m+\frac{\lambda}{2}$，令 $x_3=m+t$。其中 $\lambda>0$，$t>0$，由韦达定理得 $a=-\sum\limits_{i=1}^{3}x_i=-(3m+t)$，$b=\sum\limits_{i\neq j}x_ix_j=3m^2+mt-\frac{\lambda^2}{4}$，

$c=-x_1x_2x_3=-m^3-m^2t+\frac{\lambda^2}{4}(m+t)$，

所以 $u=\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}=\frac{9\lambda^2t-4t^3}{2\lambda^3}$（设 $9\lambda^2-4t^2>0$）

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}\lambda^3}\sqrt{(9\lambda^2-4t^2)^2\times 8t^2}\leqslant\frac{1}{4\sqrt{2}\lambda^3}\sqrt{\left(\frac{18\lambda^2}{3}\right)^3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{（由均值不等式）。}$$

当 $a=-c=-\sqrt{3}$，$b=-1$ 时，$u_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$。

（三）排序不等式

例题 3　已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^*$，$x+y+z=1$，求证：$x^2y+y^2z+z^2x\leqslant\frac{4}{27}$。

讲解：不妨设 $x\geqslant y$，$x\geqslant z$，分两种情况：

①$x\geqslant y\geqslant z$，因为 $xy\geqslant zx\geqslant yz$，由排序原理 $x^2y+y^2z+z^2x\leqslant x^2y+xyz+yz^2=y(x^2+xz+z^2)\leqslant y(x+z)^2=\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot(x+z)(x+z)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$；