

教育部“国培计划”数学教师培训项目培训教材

# 数学学与教的心理学

## (第二版)

何小亚 著



华南理工大学出版社  
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

· 广州 ·

## 图书在版编目(CIP)数据

数学学与教的心理学/何小亚著. —2版. —广州: 华南理工大学出版社, 2016. 8  
教育部“国培计划”数学教师培训项目培训教材  
ISBN 978-7-5623-5046-0

I. ①数… II. ①何… III. ①数学教学-教学心理学-师资培训-教材 IV. ① G447

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第188859号

## 数学学与教的心理学(第二版)

何小亚 著

---

出版人: 卢家明

出版发行: 华南理工大学出版社

(广州五山华南理工大学17号楼, 邮编510640)

http://www.scutpress.com.cn E-mail: scutc13@scut.edu.cn

营销部电话: 020-87113487 87111048(传真)

策划编辑: 黄丹丹

责任编辑: 袁泽 兰新文

印刷者: 广州市穗彩印务有限公司

开本: 787mm×960mm 1/16 印张: 19 字数: 439千

版次: 2016年8月第2版 2016年8月第2次印刷

定价: 42.00元

---

版权所有 盗版必究 印装差错 负责调换

## 内 容 简 介

观念决定行为。基础教育的新课程改革能否真正落到实处，关键在于教师的观念能否真正转变，而教师观念的转变则取决于教师的专业素质中是否具备现代数学教育理论。本书为数学新课程的实施提供了学与教的心理学理论基础。书中内容涉及数学新课程的学生观和教学观，学习方式的转变，以及一些学习教育理论，如对剖析数学学习中的错误和认识数学符号的习得规律有指导意义的刺激-反应学习理论，对把握数学对象的本质和解决问题极有帮助的顿悟学习理论，与数学学习密切相关的累积学习理论，对训练学生发现问题、提出问题和培养创新意识有积极意义的发现学习理论，与数学认知结构的建构发展有直接联系的认知同化理论，对认识数学思维过程有全新意义的信息加工理论，等等。另外，书中数学认知结构的建构理论、数学概念和数学原理学与教的心理分析、数学问题解决、数学思维、数学能力及其培养等内容，则对提高数学教师的教学理论水平和指导数学教学改革有重要的现实意义。

本书是教育部高教司项目“面向21世纪高师数学教育专业培养目标和课程优化研究”（项目批准号：JS145B）的研究成果之一，是华南师范大学精品课程“数学教育心理学”的教材，也是国家级中小学数学骨干教师、广东省中小学数学骨干教师、广东省基础教育数学新课程骨干培训者的培训教材，受到广大学员的欢迎。

本书理论深入系统，案例丰富典型，能深入联系教学实际，揭示数学学习的规律和数学教学的规律，实用性较强，是数学教学新手通向成功的钥匙，是数学教书匠成为数学教学专家的理论平台。

本书是数学教师专业化的培训教材，适合中小学数学教师、各级师范院校数学教育专业的学生、数学课程与教学论专业的硕士生、数学教育硕士、各级数学教研员、数学教育研究人员使用。

## 作者简介

何小亚，男，华南师范大学数学科学学院教授，教育部“国培计划”专家库首批专家，全国教育专业学位研究生教育指导委员会理科专家，全国数学教育研究会常务理事兼副秘书长，广东省中小学教师继续教育专家组成员，《数学教育学报》杂志编委，《中学数学研究》杂志副主编。主要从事数学教学和数学高考的研究。参与完成国家级、省级教育科研项目10项，在国内外刊物上发表学术论文70余篇，出版或参与出版著作20余种。

- 2008年、2009年、2015年、2016年指导本科生分别夺得教育部第一、二、六、七届东芝杯师范生教学技能大赛数学组冠军。

- 2013年指导本科生朱桂静获“首届全国师范院校师范生教学技能竞赛”数学组冠军。

- 2010年被评为全国教育硕士优秀教师。

- 2010年、2012年、2015年指导研究生连获第二、三、四届全国教育硕士优秀论文。

- 2012年所主编的《中学数学教学设计》一书入选教育部“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。

参与教育部重大课题“我国基础教育和高等教育阶段学生核心素养总体框架研究”项目研究，承担教育部哲学社会科学重大课题攻关项目“我国高中阶段学生核心素养的模型及指标体系研究”（13JZDW009），为新的国家课程标准的制定做顶层设计。

代表性论著：

1. 建构良好的数学认知结构的策略. 《数学教育学报》，2002. 1.

2. 全日制义务教育阶段数学课程标准（实验稿）刍议. 《数学教育学报》，2003. 1.

3. Construction of further education curricula system for math teachers of senior high school. Research in Mathematical Education. 2005, 9 (2) .

4. 回应“姜伯驹：新课标让数学课失去了什么”. 《广东教育》，2006. 6.

5. 高中数学新课程微积分的课程设计分析. 《数学通报》，2006. 6（被中国人民大学书报资料中心G35全文转载）.

6. 教育战争与数学教育的出路. 全国数学教育研究会 2006 年学术年会大会报告, 2006. 11. (《数学教育学报》, 2008. 1).
7. 中学数学教学设计. 科学出版社, 2008. 7.
8. What constitutes effective mathematics instruction: A comparison of Chinese expert and novice teachers'. Canadian Journal for Science, Mathematic, and Technology Education. 2010, 10 (4).
9. 数学学与教的心理学. 华南理工大学出版社, 2011. 8.
10. 学生“数学素养”指标的理论分析. 《数学教育学报》, 2015.

# 前 言

## 一、“数学教育心理学”课程改革的背景

### (一) 基础教育课程存在的问题与改革

中国考试文化背景之下的数学教育，使中国学生在基础知识、基本技能、解答现成问题，以及勤奋刻苦精神方面比西方学生要强，但在实践能力、创新能力、情感体验与自尊自信方面却远远不如西方学生。西方小孩的自信与他们在数学上的较少失败密切相关。我们许多学生因为数学考试而害怕数学、害怕学习、害怕学校，并因此而对自己丧失了信心。值得注意的是，在当今计算机、信息网络技术、高科技飞速发展的时期，我们学生的优势在贬值，而西方学生的优势则不断升值。教育部基础教育司对九年义务教育课程的调查表明，旧的课程方案存在着以下问题：

- (1) 教育观念滞后，人才培养目标同时代发展需求不能适应。
- (2) 思想品德教育的针对性、时效性不强。
- (3) 课程内容存在着“繁、难、偏、旧”的状况。
- (4) 课程结构单一，学科体系相对封闭，难以反映现代科技、社会发展的新内容，脱离学生经验和社会实际。
- (5) 学生死记硬背、题海训练的状况普遍存在。
- (6) 课程评价过于强调学业成绩和甄别、选拔的功能。
- (7) 课程管理强调统一，致使课程难以适应当地经济、社会发展的需求和学生多样化发展的需求。

《全日制义务教育数学课程标准解读》（刘兼，孙晓天主编，北京师范大学出版社，2002年5月）在71~78页中指出了现行数学课程体系下存在的种种问题。

(1) 学习目标狭窄，难以适应学生的发展需要：①课程目标的失衡——“双基”成为数学学习目标的主体；②课程目标难以适应学生的发展需要；③数学能力的发展不全面，尤其缺乏对创新精神和实践能力的关注；④在数学学习中缺乏良好的情绪体验以及对个性品质的关注。

(2) 数学学习与社会实际相脱离。

(3) 反映在学习内容上的问题：①过分追求逻辑严谨和体系形式化；②学习内容在不同程度上存在“繁、难、偏、旧”的状况；③数学教材类型贫乏，选择余地小。

(4) 学习方式上反映出来的问题：①学生数学学习的方式以被动接受方式为主要特征；②对主动获取知识以及学会学习的能力、态度、习惯、方式的培养重视不够；③借助信息技术手段进行数学实验和多样化的探究或学习，拓展自己的学习空间，仍是一个相

当薄弱的方面。

(5) 数学考试对数学学习的影响: ① 学生对数学考试的态度值得我们反思; ② 日常考试过频、过难, 份量过重; ③ 考试的形式和内容有待改善; ④ 对考试结果的处理缺乏科学性; ⑤ 考试对整个教育过程的影响有待改善。

以上这些问题由来已久, 已到了非改不可的地步, 否则将会影响我国今后几十年的可持续性发展。对于积重难返的问题, 修修补补已无济于事, 必须从根本上予以解决。“自上而下”的改革是最根本、最彻底和最有效的选择。

2001年7月, 随着《全日制义务教育阶段数学课程标准(实验稿)》的正式出版发行, 全国各地掀起了新课程改革的热潮。2001年, 全国有27个省市38个实验区进行实验。2002年, 每个省市、地区市都有一个实验区参与试验(共计380~400个试验区, 约200万学生)。2003年, 同龄学生的30%要参与实验。2003年, 国家正式公布数学课程标准, 并从2005年起在全国全面正式实行。

教育部于2003年4月正式出版了《普通高中数学课程标准(实验)》。2004年9月, 广东、山东、海南、宁夏率先实施高中新课改。至2010年, 全国又有贵州、重庆、广西、四川、甘肃、青海和西藏等地区进入高中课改实验。至此, 高中数学新课改在全国已经全面铺开。

在实施数学新课改中, 教育部要求全国各个省市做好基础教育新课程的师资培训工作, 坚持通识培训与学科培训相结合、参与式培训与讲座相结合, 做到“先培训、后上岗, 不培训、不上岗”。

新课程改革顺应了世界课程改革的趋势, 汲取了各国课程改革的精华, 如人本主义教育的理念、教育民主的理念、教育公平的理念、主体性教育的理念、个性发展的理念等。而数学课程标准的理论根基则涉及大众数学的理论、现实数学理论、刺激-反应学习理论、认知学习理论、创造性思维理论、问题解决理论等。但新课程改革能否真正落到实处, 关键在于教师的专业素质中是否具备上述理论知识, 教师的观念能否真正转变。在传统课程中, 学科本位的思想相当普遍, 教书是第一位的, 育人成了附带的产品。对“数学教师”的理解是, 我是教数学的, 要教给学生足够多的数学知识, 至于其他就不是我的事。数学教师成了传授数学知识的专业人士。事实上, 作为“教”数学的教师, 他的角色首先是一个教师, 他通过数学教学活动来实现对学生的教育培养, 以促进学生的全面发展。因此, 让广大的教育管理者、一线教师树立起以人为本的理念, 构建新课程的学生观和教学观, 是新课程教师培训工作的重要内容。《数学学与教的心理学》一书为这一目标的实现提供了理论平台。

### (二) 数学教师专业化的需要

当前, 教师专业化成了世界各国教育的共同要求。在数学教育界, 数学教师专业发展的意义与内涵、数学教师的专业素质、数学教师专业化要求之下的数学教育专业课程设置和数学教师培养模式等问题, 正成为数学教育研究的热点问题。显然, 在这些问题中, 数学教师的专业素质是最核心的问题。数学教师的专业素质包括数学学科知识、数学教学技

能、数学教育理论知识。在原来的课程体系之下，我们的师范院校培养出来的学生，在数学学科知识和数学教学技能方面基本上能满足数学教学的需要，因为我们的学生学的数学不浅，从业前后师傅带徒弟式的教学技能训练也是奏效的。但我们的师范生明显缺乏现代数学教育理论方面的知识。在职的数学教师是在旧课程体系之下培养出来的“产品”，他们在数学教育理论方面的专业素质显然已经落后于时代的需要。当前，我国正在实施的教师资格认定制度，已经由只面向师范生拓宽为面向所有院校培养的毕业生。对于非师范院校的毕业生的数学教师资格要求，仅仅考查教育学、教育心理学显然是远远不够的。数学教师专业化要求数学教师必须懂得学生学习数学的心理规律和进行数学教学的规律。这一目标可以通过“数学教育心理学”这门课程的学习来实现。

### （三）高师院校“心理学”公共课的不足

我国高师院校“心理学”公共课，无论是在课程设置和课程体系方面，还是在课程内容方面，都和21世纪的高师院校的培养目标和学科教育的发展需要不相适应。

首先，“心理学”公共课的对象是全校众多学科专业的学生。不同的学科有不同的学习规律和教学规律，它们对心理学知识的要求有很大差异。学科的发展要求“心理学”公共课与各个学科的学与教相结合，但是，学科的多样性和差异性却使它难以做到这一点。为了顾全如此庞杂的学科专业和知识结构迥异的学生，“心理学”公共课只能泛泛而论，无法满足各个学科的需要。

其次，现有的面向所有学科的“心理学”公共课的课程结构体系，几乎都是以普通心理学的内容体系为其基本的结构体系。众所周知，普通心理学是以普通成年人的心理过程与个性心理为其研究对象，而高师院校主要是培养各个学科合格的教师，各科教师应懂得学生在相应的学科是如何学习和如何发展的，如何更有效地指导学生学习的学科。因此，“心理学”的课程体系难以实现高师院校的培养目标要求。

第三，以普通心理学的内容为主的“心理学”公共课，其内容几十年来没什么大的变化，不外乎心理学的对象、任务、方法，心理的生理基础，感知觉，注意，记忆，思维，想象，情感，意志，个性倾向，能力，气质，等等。这些内容对数学教学缺乏直接的指导作用。而那些对提高数学教师的教学理论水平和指导数学教学改革有重要指导作用的教育、教学、学习方面的理论成果却没有介绍。例如，对剖析数学学习中的错误和认识数学符号的习得规律有指导意义的刺激-反应学习理论；对把握数学对象的本质和实现迁移极有帮助的顿悟学习理论；和数学学习密切相关的累积学习理论；对训练学生发现问题、提出问题和培养创造意识有积极意义的发现学习理论；与数学认知结构的建构发展有直接联系的认知同化理论；对认识数学思维过程有全新意义的信息加工理论。实际上，“心理学”公共课处于“讲的没有用，有用的不讲”这样一种脱离数学教学实际需要的尴尬状况。

## 二、“数学教育心理学”课程的建构

### （一）课程改革探索

1972年，随着数学教育心理学的国际研究组织（the International Group for the



Psychology of Mathematics Education, 简称 PME) 的成立, 数学教育心理学得到了长足发展, 已成为一门极具生命力的新兴学科。而高师院校“心理学”公共课在课程设置、课程体系 and 课程内容等方面的不足、数学教师专业化的需要、国家数学新课程改革的理论基础等方面的因素, 使得“数学教育心理学”取代“心理学”公共课的时机和条件已成熟。

1998年初, 笔者已在深圳教育学院的研究生课程班上为深圳市的170名中学骨干教师讲授过相关内容。2001年笔者给第二期中小学骨干教师国家级培训小学班和中学班讲授本课程的内容。2002年给广东省中小学骨干教师培训班讲授本课程的内容。学员们觉得对自己的数学教学设计、授课和研究很有指导意义。另外, 笔者已给1995级本科生和1997, 1998, 1999, 2000级数学教学论方向的研究生讲授过此门课程。在华南师范大学教务处和数学系的大力支持下, 数学系从1999级(本科)开始用“数学教育心理学”取代“心理学”公共课。课程安排80课时, 学分为4个学分。2002年11月, 经广东省中小学教师继续教育中心和华南师范大学教务处同意, 讲义《数学学与教的心理学》曾作为基础教育数学新课程的培训教材。2004年, 华南师范大学数学系修订教学计划, 从2003级开始, 本课程改为专业必修课程, 54学时, 3个学分。

### (二) 课程培养目标

《数学学与教的心理学》是以教育心理学理论为主要依据, 研究学生在学习数学过程中的心理特点和心理规律, 以及如何有效地教学生学好数学的一门学科。通过本门课程的学习, 可以实现下列目标:

- (1) 正确认识数学思维过程, 理解或掌握与数学教学密切相关的现代学习理论。
- (2) 深刻认识数学教学过程, 更新数学教学观念, 构建新课程的学生观和教学观。
- (3) 了解影响学生学习数学的各种因素, 掌握数学概念、数学原理、数学问题解决的学与教的心理规律, 为今后的数学教学及研究提供理论依据。

### (三) 课程内容简介

本课程以《数学学与教的心理学》一书的内容作为课程内容。其中, 第一章“思维与数学思维”介绍思维的心理学基础、思维及数学思维、数学形象思维、创造性思维及其培养。第二章“刺激-反应学习理论”介绍桑代克试误学习理论、巴甫洛夫的条件反射理论、斯金纳的操作学习理论。第三章“认知学习理论”介绍格式塔顿悟学习理论、布鲁纳的认知结构学习理论、奥苏贝尔的认知同化学习理论、加涅的累积学习理论。第四章“数学教学的本质”介绍数学认知结构及其发展、学生的地位与教师的作用、学习方式的转变。第五章“数学概念与数学原理学与教的心理分析”介绍概念的含义、概念的获得、促进数学概念学习的教学建议、原理学习的含义、数学原理学习的模式、促进数学原理学习的教学建议。第六章“数学问题解决”介绍问题以及数学问题解决的含义、问题解决的的心理过程分析、解决数学问题中的化归策略、数学应用题及其解答策略、数学应用题认知障碍的分析及对策。第七章“数学能力及其培养”介绍知识、技能和能力、数学能力、数学注意能力的培养、数学观察能力的培养、数学记忆能力的培养、数学逻辑思

思维能力的培养、数学形象思维能力的培养、数学运算能力的培养。

在每一章结尾，作者给出了该章重要的问题与思考，并提供了一些拓展阅读材料。

### 三、“数学教育心理学”课程的特色

#### 1. 师范性

师范院校数学系的毕业生与综合性重点大学数学系的毕业生相比，在数学分析、高等代数、数论、组合数学、概率统计、微分几何、泛函分析、拓扑学等数学科学领域并没有什么优势。师范生的优势体现在数学教育的理论和实践方面。21 世纪的数学教师，不仅要精通所教，而且还要知道为什么教；不仅要懂得如何教，而且还要知道如何学；不仅要会教，而且还要能够从事数学的学与教的研究。本课程正是为了解决这些问题，培养新世纪优秀的数学教师而设置的，具有很强的师范性特色。

#### 2. 先进性

本书是教育部高教司项目“面向 21 世纪高师数学教育专业培养目标和课程优化研究”（项目批准号：JS145B）的研究成果之一，也是华南师范大学精品课程“数学教育心理学”的教材。其内容是作者为国家级、广东省和各地市中小学数学教师继续教育培训而准备的授课材料，涉及刺激-反应学习理论、认知学习理论、创造性思维理论、问题解决理论这些现代的教育理论，体现了民主、公平、主体性、个性发展和以人为本的现代教育观念，具有时代性和先进性。

此项课程改革为全国独创，得到了北京师范大学曹一鸣教授、天津师范大学王光明教授、华东师范大学徐斌艳教授等同行专家们的肯定。本书被多所师范院校用作教材或参考书，并成为教育部“国培计划”数学教师培训项目培训教材。本课程的开设，受到了本科生、中小学数学骨干教师和教育硕士的欢迎。

#### 3. 实用性

本课程介绍的理论不仅面广，而且比较具体、深入。能紧密联系教学实际，提供了许多丰富、典型的案例，揭示了数学学习的规律和数学教学的规律，具有较强的实用性。它既是数学教学新手通向成功的钥匙，也是数学教书匠成为数学教学专家的理论平台。比如说，经过本课程的学习，我们就可以清楚地回答下述十类问题。

(1) 什么是数学形象思维？它有哪几种形式？它在数学问题解决中起什么作用？如何培养学生的创造性思维，如何指导学生进行发明创造？

(2) 数学符号语言学习的心理过程是什么？要学生掌握数学符号语言就是要学生掌握什么？为什么学生总是把“-a”当成负数？

(3) 儿童的良好行为习惯是如何塑造出来的？决定性的手段是什么？

(4) 什么是接受学习？什么是发现学习？发现学习的过程是什么？它有什么特点？现代学习方式的基本形式有哪些？

(5) 什么是机械学习？什么是有意义学习？有意义学习的类型是什么？有意义学习的条件是什么？

(6) 什么是数学认知结构? 良好的数学认知结构的特征是什么? 如何帮助学生建构良好的数学认知结构? 学生平时学得好, 但中考、高考却考不好的真正原因是什么?

(7) 数学教学的本质是什么? 学生和教师在数学教学中应处于什么样的地位? 学生喜欢什么样的教师? 学生不喜欢什么样的教师? 要成为一名深受学生爱戴的教师, 我们应从哪些方面努力?

(8) 数学概念学习的心理过程是什么? 数学概念学习的本质是什么? 其教学模式有哪些? 如何教好数学概念?

(9) 数学原理学习的心理意义是什么? 数学原理学习的本质是什么? 其学与教的模式有哪些? 如何教好数学原理? 比如说, 让学生理解公式就要学生理解什么?

(10) 什么是问题和问题解决? 数学问题解决的心理学过程是什么? 学生解决数学问题的心理障碍和教学对策是什么?

#### 四、“数学教育心理学”课程学习的注意事项

本课程的教学以课堂讲授为主, 并辅以案例分析和自学讨论的形式进行。在学习中要注意以下三个方面。

##### 1. 注意转变思维方式

本课程的内容涉及面较广, 有普通心理学, 有教育心理学, 有学习理论, 还有思维科学和数学, 是一门综合性较强的交叉科学。在学习的时候, 要注意从不同的角度, 不同的层面去理解其基本概念和基本原理, 不能用“非此即彼”“答案的对与错”这些理科的思维方式去学习和理解这门课程的内容。

##### 2. 注意建构理解模型

由于本课程涉及的概念和原理较多, 因此, 学习时要注意联系具体事例模型来理解基本概念、基本原理和基本结构。不能像背政治题对付考试那样来学习这门课程的内容。实际上, 要想知道自己是否真正理解和掌握一个概念和原理, 只要看是否能举出一些案例模型来说明其本质结构。

##### 3. 注意进行质疑反思

除了教材之外, 本课程还需要多阅读相关的学习材料, 以拓展自己的视野。

“尽信书不如无书”。我们应该按照“学习—接受—质疑—反思—超越”的过程去学习。学习, 即是勇于承认自己无知, 刻苦学习; 接受, 即是善于理解别人的观点, 学会换位思考; 质疑, 即是不迷信书本、权威, 敢于提出问题; 反思, 即是积极思考, 追求真理; 超越, 即是大胆创新, 超越前辈。要结合数学学习、数学教学和数学课程改革中的具体问题, 去思考、去分析、去讨论、去解决问题。

何小亚

2016年7月1日于华南师范大学

# 目 录

<b>第一章 思维与数学思维</b> .....	(1)
第一节 思维的心理学基础 .....	(1)
第二节 思维及数学思维 .....	(8)
第三节 数学形象思维 .....	(18)
第四节 创造性思维及其培养 .....	(28)
问题与思考 .....	(38)
阅读材料 .....	(39)
你的右脑好用吗? .....	(39)
你现在的创造力如何? .....	(42)
<b>第二章 刺激-反应学习理论</b> .....	(46)
第一节 桑代克的试误学习理论 .....	(46)
第二节 巴甫洛夫的条件反射理论 .....	(51)
第三节 斯金纳的操作学习理论 .....	(56)
问题与思考 .....	(63)
阅读材料 .....	(64)
不打不骂的十大管教孩子高招 .....	(64)
教育到底要不要体罚? .....	(68)
<b>第三章 认知学习理论</b> .....	(73)
第一节 格式塔顿悟学习理论 .....	(73)
第二节 布鲁纳的认知结构学习理论 .....	(82)
第三节 奥苏贝尔的认知同化学习理论 .....	(88)
第四节 加涅的累积学习理论 .....	(95)
问题与思考 .....	(105)
阅读材料 .....	(106)
皮亚杰的认知发展理论 .....	(106)
理解数学归纳法原理的心理困难 .....	(116)
<b>第四章 数学教学的本质</b> .....	(120)
第一节 数学认知结构及其发展 .....	(120)
第二节 学生的地位与教师的作用 .....	(129)
第三节 学习方式的转变 .....	(137)

问题与思考 .....	(145)
阅读材料 .....	(145)
教育战争与数学教育的出路 .....	(145)
中学生心理健康讲座稿 .....	(155)
<b>第五章 数学概念与数学原理学与教的心理分析 .....</b>	<b>(164)</b>
第一节 数学概念学与教的心理分析 .....	(164)
第二节 数学原理学与教的心理分析 .....	(181)
问题与思考 .....	(191)
阅读材料 .....	(192)
淡化形式 注重实质 .....	(192)
也谈“淡化形式,注重实质” .....	(198)
<b>第六章 数学问题解决 .....</b>	<b>(201)</b>
第一节 问题以及数学问题解决 .....	(201)
第二节 数学问题解决的过程 .....	(205)
第三节 解决数学问题中的化归策略 .....	(215)
第四节 数学应用题及其解答策略 .....	(221)
第五节 数学应用题认知障碍的分析及对策 .....	(228)
问题与思考 .....	(233)
阅读材料 .....	(234)
从“锤子、剪刀、布”游戏中提出数学问题 .....	(234)
新课程数学探究案例 .....	(237)
解决问题 中美俄日四国学生各有“绝招” .....	(239)
<b>第七章 数学能力及其培养 .....</b>	<b>(241)</b>
第一节 能力和数学能力 .....	(241)
第二节 数学注意能力的培养 .....	(251)
第三节 数学观察能力的培养 .....	(256)
第四节 数学记忆能力的培养 .....	(259)
第五节 数学逻辑思维能力的培养 .....	(262)
第六节 数学形象思维能力的培养 .....	(268)
第七节 数学计算能力的培养 .....	(274)
问题与思考 .....	(277)
阅读材料 .....	(278)
加德纳的多元智力理论及其主要依据探析 .....	(278)
<b>参考文献 .....</b>	<b>(287)</b>

# 第一章 思维及数学思维

## 第一节 思维的心理学基础

### 一、感觉

感觉是人的感受器对刺激物的反映，它反映着刺激物的个别属性，也反映机体的内部状态。感受器则是将外界能量转换为神经过程的转换器，它是感觉器官（包括眼、耳、鼻、口、皮肤、身体内部器官等）中的感觉细胞或它的末梢，将各种刺激能量转换为神经系统中的生物电能——神经冲动。环境信息只有经过感受器进行这种能量的转换，才能通过神经传导至大脑，形成感觉。

感觉可分为视觉、听觉、嗅觉、味觉、触觉、痛觉、震动觉、温度觉、平衡觉、加速觉、动态觉、静态觉。每一种感觉都有其相应的感受器和适宜刺激。在心理学中，作用于有机体并引起其反应的任何事物都称为刺激物，刺激物施于有机体的影响称为刺激。由有机体内部的变化而引起的刺激叫内部刺激，如肠梗阻可引起疼痛。由有机体外部给予的刺激叫外部刺激，如光线、声音、气味等。通常所说的刺激主要指的是外部刺激。感觉就是在感觉器官受到刺激作用时产生的。但是，并非任何刺激作用于任何感觉器官都能引起感觉。例如，光线作用于耳朵不会引起听觉，但对于视觉则必不可少。感受器一般只对一种刺激特别敏感而产生兴奋，它们和刺激的关系基本上是固定的，如眼睛与光线、耳朵与声音、鼻子与气味，等等。这种能够使某种感受器特别敏感并产生兴奋的刺激叫作该感受器的适宜刺激，而其他的刺激则叫作不适宜刺激。使感觉产生的刺激强度有一定的范围，刺激强度太弱或太强都不会产生感觉。每一种感觉都是在适宜刺激作用于特定的感受器时产生的。

凭借感觉，人们获取有关内外环境状态的信息，它是知觉的基础。和数学学习联系较紧密的感觉主要是视觉和听觉。

视觉是个体辨别外界事物的明暗、颜色等特性的感觉，它是人类感觉系统中最重要的一种感觉。研究表明，在人类认识世界的过程中，有 80% 左右的信息是靠视觉获取的。视觉的适宜刺激是波长为 380 ~ 780 纳米之间的电磁波，也叫可见光。由于电磁波的波长范围是在  $10^{-14}$  ~  $10^8$  米之间，故可见光只占整个电磁波的一小部分。超出可见光谱范围的电磁波是人眼通常感受不到的。

视敏度或者说视力，是指视觉分辨物体细节的能力。当两个物体可以区分开来时，二

者之间的视角的最小范围就是这两个物体的最小区分阈限，其倒数就是视敏度。视角就是对象与眼睛所形成的张角。对同一距离而言，物体大小与视角成正比；对同一物体而言，物体和眼睛的距离与视角成反比。

听觉是个体对声波的物理特性的反映。它是仅次于视觉的一种感觉。人类的语言及其他所有与声音有关的信息，都是靠听觉而获得的。听觉的适宜刺激是频率为 16 ~ 20 000 次/秒（赫兹）的音波，也叫可听音。音波是一种机械波，它是声源的震动在介质中的传播。听觉的感受性在 1 000 ~ 4 000 赫兹的音波范围内最高。

## 二、知觉

### （一）什么是知觉

和感觉一样，知觉也是对作用于感觉器官的客观事物的直接反映，但知觉不是对客观事物的个别属性的反映，而是对该事物的各种属性的整体反映，是人对感觉信息选择、加工和解释的过程。外部世界的许多刺激无时不在作用于人们的感官，人们倾向于有选择地输入信息，把感觉信息综合、组织起来，通过知觉的加工，就能够对事物做出解释，知道它的意义，形成一个完整的印象。

由于人在生长发展的过程中积累了一定的知识和经验，他就会根据已有的知识和经验把当前的刺激物认知为现实中特定的事物。如果刺激物与过去的经验没有联系，他就不能立刻把它确认为一定对象而赋予它意义。因而知觉依赖于过往的知识和经验，带有鲜明的个人特色。

感觉和知觉的关系十分紧密。感觉为我们提供了刺激物的个别属性方面的信息，知觉则将个别感觉信息整理综合成刺激物的完整映像，从而获得该事物的意义。因此，感觉是知觉的基础，知觉是感觉的深入。在实践活动中，感觉和知觉几乎同时发生，很少有孤立的感觉。人们总是以知觉的形式直接反映客观事物，因为某一事物的整体与其个别属性的部分是不可分割的。正因为感觉和知觉的关系如此紧密，所以，人们常常将二者合称为感知。

### （二）知觉的基本特性

知觉的基本特性主要有：知觉的选择性、知觉的整体性、知觉的理解性和知觉的恒常性。

#### 1. 知觉的选择性

知觉的选择性指的是知觉对外界刺激信息有选择地进行加工的特性。在实践活动中，作用于感觉器官的刺激是多种多样的。但是，由于通道的限制，人们不能感受到所有的刺激，也不能对所有的刺激做出反应，而只能选择其中的少数刺激加以反应。这部分刺激物就是知觉的对象，而同时作用于感官的其他刺激就成了知觉对象的背景。在一定条件下对

象和背景可以相互转换。例如图 1-1 中的图象既可以被知觉为白色背景上的黑色圆环，又可以被知觉为黑色背景上的白色圆面。

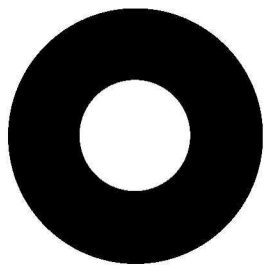


图 1-1

影响知觉的选择性的因素有两个方面。从刺激物的方面来看，有刺激的变化、对比、位置、大小、强度、明度、色度等。一般来说，面积小的比面积大的、被围的比包围的、垂直的或水平的比倾斜的、暖色的比冷色的，以及同周围明度差别大的东西都容易成为知觉的对象。例如，教师在黑板上写字时，字成为学生知觉的对象，黑板则是知觉的背景。而夹在众多的白色字中的红色字则容易成为知觉的对象，从而起到突出重点的作用。从主观方面来看，刺激物对主体的意义、主体的经验、需要、兴趣、动机、情绪等对知觉的选择性有重要的影响。

### 2. 知觉的整体性

知觉与感觉的不同之处在于，感觉反映对象的个别属性，而知觉则反映对象的整体。知觉的整体性指的是人在知觉时总是把不同部分、不同属性综合为一个整体来反映。

知觉之所以具有整体性，是因为对象的各个部分或属性是作为一个整体对感官发生作用的。也就是说，对象对人而言是一个复合刺激物，它的各个部分或属性分别作用于感官时，在大脑中已经形成固定的联系。当客观对象作用于人们的感官时，大脑会对来自感官的信息进行加工处理，发现其属性及其相互联系，从而把对象知觉为一个整体。即使是客观对象的某一部分或属性单独作用于感官，人们也会根据头脑中的相关模式来补充其他部分或属性，从而整个地知觉它。如果所感知的对象是陌生的，换句话说，头脑中没有相关的模式与对象进行匹配，知觉就更多地以对象的特点为转移，将它组织成具有一定结构的整体。那些表现出接近、相似、连续和封闭等特性的对象，容易被知觉为一个整体。格式塔 (Gestalt) 心理学中的许多实验充分证明了这一点 (见第三章第一节)。

### 3. 知觉的理解性

人总是以主观经验去识别、匹配、解释所知觉的对象，这就是知觉的理解性。

知觉受主体的知识和经验的影响。不同的知识与经验会导致不同的知觉结果。相关的知识和经验越丰富，知觉的内容就越深刻、越精确，作为知识和经验的外部载体，言语对知觉具有指导作用，它能唤起过去的知识经验，帮助理解对象的意义。例如，初看图 1-2 时，直接的反应是：三个复杂的平面图形。但是，当出现“长方体！”这个声音刺激时，就会把它们知觉为三个从不同角度观察的长方体的透视图。

### 4. 知觉的恒常性

知觉往往并不随知觉条件的变化而改变，而是表现出相对的稳定性，这就是知觉的恒常性。

知觉的恒常性普遍存在于各类知觉中，尤其以视知觉的恒常性最为明显。例如，在知觉对象的大小时，虽然在距离改变时对象在眼膜网上的映像的大小已发生变化，但所知觉



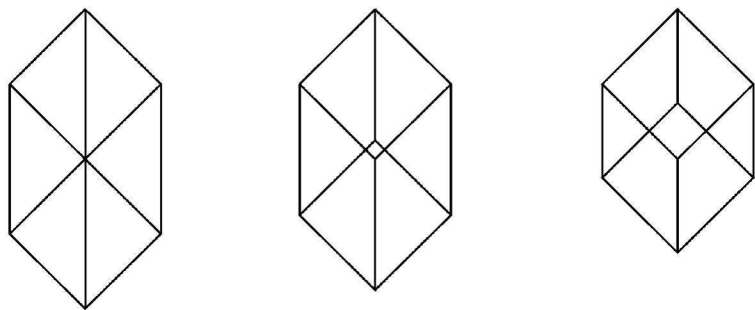


图 1-2

的大小几乎是不变的。比如，当老师面对教室里的学生时，所有的面孔在老师眼中几乎是一样大的，尽管远处的面孔的映像比近处的小得多。又比如，看看你自己远近不同的两只食指，它们看来大小完全一样，但二者的映像实际上是不一样的。

知觉的恒常性使人能全面、真实、稳定地反映客观事物，从而有效地适应不断变化的外部环境。

知觉的恒常性是相对的、有条件的，客体常常是在熟悉的环境中被知觉的，有熟悉的事物作为参照物。一旦知觉不熟悉的客体，又缺乏知识经验和适当的参照物，知觉就难以保持恒常性。

### （三）错觉

我们在知觉客观对象时，总是以过往的知识和经验去反映客观对象，由此而形成的主观映像具有个人的特点。有的主观映像是符合客观实际的，是正确的，有的则与客观实际不相符，是错误的。我们把对客观事物的不正确的知觉称为错觉。

错觉不同于幻觉。前者是对客观刺激不正确的知觉，而后者却是在没有外界刺激的情况下出现的虚幻知觉。

错觉的种类很多，最常见的是视错觉。图 1-3 就是视错觉的实际例子。在 A、B、C、E 中，各图中线段  $m$  和  $n$  的长度相等，但看起来 A 中的  $m < n$ ，而 B、C、E 中的  $m > n$ 。D 中的一条被挡住的线段看起来是两条错位的线段。F 中的  $a$  与  $b$  的内圆大小相等，但看起来  $b$  的内圆大于  $a$ ， $c$  与  $b$  的外圆大小相等，但似乎  $c$  大于  $b$  的外圆。

除了视错觉之外，还有形重错觉（重量相同而体积不同的两个物体，体积大的易被知觉为轻，体积小的易被知觉为重）、方位错觉（比如听报告时，声音本来是从旁边的扩音器里传来的，但却被知觉为从报告人的正面传来的）、运动错觉、时间错觉，等等。

错觉的产生有主客观两方面的原因。客观上主要有知觉条件的变化、周围环境对知觉对象的影响；主观上与人的知识经验、情绪、态度、动机等因素有关。

研究错觉有两方面的意义：一是利用错觉，使其在某些实践活动中产生预期的心理效应；二是设法纠正错觉，使反映尽可能符合客观实际。