LeXue QiZhong

GaoZhong ShuXue XuanXiu

2-2 2-3 4-5

学在七中 乐在其中

乐学七中

高中数学选修

1-1、1-2、4-5

策划 许 勇 曹杨可 魏 华

主编 张世永 陈中根 何毅章

电子科技大学出版社

乐学七中

高中数学选修 1-1、1-2、4-5

策划 许　勇　曹杨可　魏　华

主编 张世永　陈中根　何毅章

编委 陈中根　周莉莉　刘在廷　杜家忠
罗毕壬　何毅章　曹杨可　周建波
郭　虹　罗志英　税　洪　方廷刚
吴　雪　张世永　杜利超　夏　雪
巢中俊　林克富

UESTCP 电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

乐学七中. 高中数学选修 1-1、1-2、4-5 / 张世永，陈中根，何毅章主编.
—成都：电子科技大学出版社，2014. 3
ISBN 978-7-5647-2186-2

Ⅰ. ①乐… Ⅱ. ①张…②陈…③何…Ⅲ. ①中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 009094 号

乐学七中. 高中数学选修 1-1、1-2、4-5

许　勇 曹杨可 魏　华　策划

张世永 陈中根 何毅章　主编

出　　版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑：罗　雅
责任编辑：罗　雅
主　　页：www.uestcp.com.cn
电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：四川煤田地质印刷厂
成品尺寸：205mm×282mm　　印张 17. 5　字数 468 千字
版　　次：2014 年 3 月第一版
印　　次：2014 年 3 月第一次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-2186-2
定　　价：39.80 元

前言

成都七中，作为一所百年名校，在校本教材的开发和利用上从未停止探索的步伐．2013年四川省迎来首次新课程高考，内容要求和题型结构已初步成型．经过三年一轮的教学实践，成都七中数学组对新课程高中数学教学进行了系统的反思和研究，形成了独特而完备的指导思想．为了将这一集体智慧渗透到学校的常规教学中，七中数学组群策群力、全员参与，编写了教学辅导同步用书《乐学七中》．该书既可以满足七中教育集团广大师生的日常教学需要，也可以作为兄弟学校师生了解成都七中课堂教学的一个窗口．

成都七中的数学教学一直坚持发挥学生的主体作用．孔子有云：知之者不如好之者，好之者不如乐之者．“乐学”是七中教师对学生主体更加积极的期许状态，学生的这一状态并非一蹴而就，而是需要耐心引导的．发现问题并解决问题所带来的成就感往往是学生“乐学”的内在动因，而数学教育中“怎样解题”则成为教师引导的关键所在．为了构建和完善“怎样解题”的引导平台，教辅用书的选择和使用贯穿了整个高中数学教学过程．

为了提高教学工作的有效性，由成都七中名优教师牵头，依托学校丰富的教育教学资源，七中数学组教师共同编写了教辅同步用书《乐学七中》，以供学校师生使用．该书有以下特点：

1．章节排布与成都七中实际教学进度一致，为教师的课堂教学与作业布置带来了便利，增加了该书的可操作性．

2．衔接内容和延拓专题一并刊出，弥补了教材内容与高考要求的脱节，为师生的教与学提供了必要的蓝本．

3．“课标要求”与“知识要点”言简意赅、点到为止，为教师讲解，学生冥思留下空间．

4．“典型例题”重视课本例题的使用和挖掘，源于教材，但不拘泥于教材．为了保证课堂训练的针对性和有效性，强调一讲一练，所选题目既能体现知识的内涵和外延，也能兼顾方法的呈现和过手．

5．“备选例题”一方面可作为教师授课的后备题库，另一方面也为学有余力者的拓展训练抛砖引玉．

6．“小结与反思”为培养学生的归纳辩证思维而留白．

7．“练习”遵循“紧扣课堂、难度适中、梯度呈现”的原则．

基于此，《乐学七中》作为高中数学教学同步辅导用书，有其独特的优势和推广价值．热忱欢迎兄弟学校师生参考或使用该书．

本书由陈中根、周莉莉、刘在廷、杜家忠、罗毕壬、何毅章负责编写导数部分；曹杨可、周建波负责编写复数部分；郭虹、罗志英、税洪负责编写不等式部分；方廷刚、张世永、吴雪负责编写数学归纳法及推理与证明；杜利超负责编写二项式定理部分；夏雪、巢中俊负责编写随机变量及其分布部分，林克富负责编写复习小结和章末测试．

由于编写时间紧，该书难免存在一些不足，ī　广大师生批评指正，以便今后修订时更加完善．

编　者

2014年4月

目录

第四章　二项式定理

第五章　随机变量及其分布

练习册见附页

第一章

导数及其应用

1.1　变化率与导数

§1.1.1～§1.1.2　导数的概念

一、课标要求

1. 了解平均变化率的概念；

2. 会求函数在某点附近的平均变化率；

3. 理解导数的概念.

二、知识要点

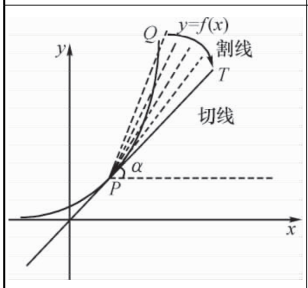
1. 曲线的割线与切线

(1)割线的斜率

设 $P(x_0,y_0)$，$Q(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$为曲线 C 上邻近的两点，过 P，Q 两点作割线，则割线 PQ 的斜率为$\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

(2)切线及切线的斜率

①曲线的切线

图示	文字叙述
	割线 PQ 绕着点 $P(x_0,y_0)$ 转动，当点 $Q(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$沿着曲线无限接近于 P 点，即________时，如果割线 PQ 无限趋近于一个极限位置 PT，则直线 PT 叫做曲线在点 P 处的切线

②切线的斜率

当________时，割线 PQ 的斜率的极限是曲线在点 P 处的切线斜率.

2. 瞬时速度

(1)平均速度

如果一物体在时刻 t_0 时位于 $s(t_0)$，在 $t_0+\Delta t$ 时位于 $s(t_0+\Delta t)$，则在这段时间内物体运动的平均速度________.

(2)瞬时速度

如果物体的运动规律是 $s=s(t)$，物体在时刻 t 的瞬时速度 b 是物体在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内，平均速度的极限，即________.

三、典型例题

例1　已知曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 上一点 $P\left(2,\frac{8}{3}\right)$，求过点 P 的切线的斜率，并写出切线方程.

变式1　已知曲线 $y=3x^2-x$，求曲线上一点 $A(1,2)$处的切线斜率.

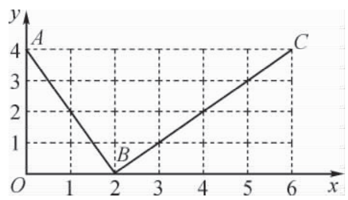
例2　设物体在 t s 内所经过的路程为 st m，并且 $s=4t^3+2t^2-3t$，试求物体分别在运动开始及第 5 s 末时的瞬时速度.

变式2 枪弹在枪筒中运动可以看作匀加速运动，如果它的加速度是 $5.0\times10^5\ m^2/s$，枪弹从枪口射出时所用时间为 $1.6\times10^{-3}\ s$，求枪弹射出枪口时的瞬时速度.

例3 过点 $P(1,2)$ 作抛物线 $y=-3x^2+2$ 的切线，求此切线的方程.

四、备用例题

1. 如图所示，函数 $f(x)$ 的图象是折线段 ABC，其中 A，B，C 的坐标为 $(0,4)$，$(2,0)$，$(6,4)$，则 $f[f(0)]=$_______；$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$_______(用数字作答).



2. 曲线 $y=-2x^2+x$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线方程为_______.

五、小结与反思

§1.1.3 导数的几何意义

一、课标要求

1. 了解平均变化率和割线斜率之间的关系；

2. 理解曲线的切线的概念，会用导数的几何意义解题.

二、知识要点

1. 导数及相关概念

(1)平均变化率

对函数 $y=f(x)$，若自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx，那么函数 y 相应的有增量_______，比值_______就叫函数 $y=f(x)$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率，即_______.

(2)函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数

如果当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 有_______，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并把这个_______叫作函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数(或瞬时变化率)，记作_______或_______，即_______.

(3)函数 $y=f(x)$ 的导数概念

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的_______，对于开区间 (a,b) 内_______的值 x_0，都对应着一个_______ $f'(x_0)$，这样就在开区间 (a,b) 内构成一个新的函数，那么我们把这一新函数叫做 $f(x)$ 在 (a,b) 内的导数，简称导数，记作 $f'(x)$ 或 y'，即_______.

函数 $y=f(x)$ 在点_______处的导数 $f'(x_0)$ 等于函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值.

2. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义.就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的_______，其切线方程为_______.

三、典型例题

例1 已知：$y=f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$，求 y' 及 $y'|_{x=1}$.

变式 1　已知曲线 $y=\sqrt{2x^2+2}$ 上一点 $P(1,2)$，用导数的定义求过点 P 的切线的倾斜角.

例2　求双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $P\left(\frac{1}{2},2\right)$ 处的切线的斜率，并写出该切线的方程.

变式 2　已知直线 $y=kx+1$ 与曲线 $y=x^3+ax+b$ 相切于点(1,3)，则 b 的值为　　(　　)

A. 3　　B. -3　　C. 5　　D. -5

例3　倒圆锥形容器高 8 米，底面半径为 4 m，今以每分钟 4 cm^3 的速度把水注入容器，试问当水深为 5 m 时，水面上升的速度是多少？

四、备用例题

1. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=M$，则 $f'(x_0)=$ (　　)

A. M　　B. $-M$　　C. $\frac{1}{M}$　　D. $-\frac{1}{M}$

2. 若曲线 $y=2x^3$ 上某点切线的斜率为 6，求此点的坐标.

五、小结与反思

1.2 导数的计算

§1.2.1 几个常用函数的导数

一、课标要求

1. 利用导数的定义推导五种常见函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数公式；

2. 运用五个公式求解其他函数的导数.

二、知识要点

1. 函数 $y=c$ 的导数________；

2. 函数 $y=x$ 的导数________；

3. 函数 $y=x^2$ 的导数________；

4. 函数 $y=\frac{1}{x}$的导数________；

5. 函数 $y=\sqrt{x}$的导数________.

三、典型例题

例1 请用定义法计算函数 $f(x)=x^3$ 的导数.

变式 1 计算下列函数的导数：①$(x)'=$________；②$(x^2)'=$________；③$(x^3)'=$________；④$(x^{-1})'=$________.

根据上述结论可以得出：幂函数 $y=x^\alpha$，$\alpha\in\mathbf{Q}$ 的导数$(x^\alpha)'=$________.

例2 在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=x$，$y=2x$，$y=3x$ 的图象，求它们的导数，并回答下列问题：

(1)从图象上看，它们的导数分别表示什么？

(2)这三个函数中，哪一个增加得最快？哪一个增加得最慢？

(3)函数 $y=kx(k\neq0)$增(减)的快慢与什么有关？

变式 2 给出下列命题，其中正确的命题是________.(填序号)

①任何常数的导数都为零；

②直线 $y=2x$ 上任一点处的切线方程是这条直线本身；

③双曲线 $y=\frac{1}{x}$上任意一点处的切线斜率都是负值；

④函数 $y=2x$ 和函数 $y=x^2$ 在$(0,+\infty)$上函数值增长的速度一样快.

例3 已知曲线 $y=\frac{1}{x^2}$上一点 $P\left(2,\frac{1}{4}\right)$，求过点 P 与此曲线相切的直线方程.

变式 3 若质点 P 的运动方程是 $s=\sqrt[3]{t^2}$(s 单位为 m，t 的单位为 s)，求质点 P 在 $t=8$ 时的瞬时速度.

四、备选例题

例1 下列结论中不正确的是 ( )

A. 若 $y=x^4$，$y'|_{x=2}=32$

B. 若 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$，$y'|_{x=2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 若 $y=\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$，$y'|_{x=1}=-\frac{5}{2}$

D. 若 $y=4$，$y'|_{x=2}=0$

例2 画出函数 $y=\frac{1}{x}$的图象，描述它的变化情况，并求出曲线在点$\left(2,\frac{1}{2}\right)$处的切线方程.

五、小结与反思

§1.2.2　基本初等函数的导数公式

一、课标要求

1. 熟练运用基本初等函数的导数公式；

2. 熟练运用导数的运算法则求函数的导数.

二、知识要点

1. 基本初等函数的导数公式：

函数	导数
$f(x)=c$(c 为常数)	________
$f(x)=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{Q}^*)$	________
$f(x)=\sin x$	________
$f(x)=\cos x$	________
$f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$	________
$f(x)=\mathrm{e}^x$	________
$f(x)=\log_a x$	________
$f(x)=\ln x$	________

2. 导数的运算法则：

(1)$[f(x)\pm g(x)]'=$________；

(2)$[f(x)\cdot g(x)]'=$________；

(3)$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=$________；

(4)$[cf(x)]'=$________.

三、典型例题

例1　计算下列函数的导数：

(1)$(x^{\frac{1}{3}})'=$________；

(2)$\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right)'=$________；

(3)$(\log_4 x)'=$________；

(4)$(5\cos x)'=$________.

变式1　计算下列函数的导数：

(1)$(x\sqrt{x})'=$________；

(2)$(\sin x)'\cdot(\cos x)'=$________；

(3)$\left(\dfrac{x^5+\sqrt{x}+\sin x}{x^2}\right)'=$________；

(4)$(x|x|)'=$________.

例2　曲线 $y=x^3-x+3$ 在点$(1,3)$处的切线方程为________.

变式2　若曲线 $y=kx+x^2$ 在 $x=1$ 处的切线平行于 x 轴，则 $k=$________.

例3　已知函数 $f(x)=ax^3-bx^2-2x+c$(a,b 均为正数)，若 $f(x)$的图象过坐标原点，且在 $x=-1$ 处的导数值为 0，求 $y=8^a+4^b+c$ 的最小值.

变式3　(2012·江西改编)设函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内有导数，且 $f(\mathrm{e}^x)=x+\mathrm{e}^x$，则 $f'(2)=$________.

四、备选例题

例1　设 $a>0$，$f(x)=ax^2+bx+c$，曲线 $y=f(x)$在点 $P(x_0,f(x_0))$处切线的倾斜角的取值范围为$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，则 P 到曲线 $y=f(x)$对称轴距离的取值范围为　　(　　)

A. $\left[0,\dfrac{1}{a}\right]$　　B. $\left[0,\dfrac{1}{2a}\right]$

C. $\left[0,\left|\dfrac{b}{2a}\right|\right]$　　D. $\left[0,\left|\dfrac{b-1}{2a}\right|\right]$

例2　已知函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+ax^2}$，其中 a 为正实数，若 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，求实数 a 的值，并计算使 $f'(x)=0$ 成立的其他 x 的值.

五、小结与反思

§1.2.3 复合函数的导数公式

一、课标要求

1. 理解复合函数计算导数的法则；

2. 熟练分解复合函数，利用求导法则计算导数.

二、知识要点

1. 复合函数

一般地，对于两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，如果通过变量 u，y 可以表示成________的函数，则称这个函数为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的________，记作________.

2. 复合函数求导法则

$y'_x=y'_u\cdot u'_x$（y'_x 表示 y 对 x 的导数）

三、典型例题

例1 求复合函数的导数：

(1) $y=(3x+1)^2$；(2) $y=2^{-x}$；(3) $y=\sin 5x$.

变式1 求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{x^3-1}{\sin x}$；(2) $y=2e^{-x}$；(3) $y=2x\sin(2x+5)$.

例2 （2009·全国卷Ⅰ理改编）已知直线 $y=x+1$ 与曲线 $y=\ln(x+a)$ 相切，则 a 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

变式2 曲线 $y=x(x+1)(2-x)$ 有两条平行于直线 $y=x$ 的切线，求这两条切线之间的距离.

例3 设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=e^x+ae^{-x}$ 的导函数是 $f'(x)$，且 $f'(x)$ 是奇函数，若曲线 $y=f(x)$ 的一条切线的斜率是 $\dfrac{3}{2}$，求切点的横坐标.

变式3 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1(\omega>0)$ 的导数 $f'(x)$ 的最大值为 3，则 $f(x)$ 的图象的一条对称轴的方程是（　　）

A. $x=\dfrac{\pi}{9}$　　B. $x=\dfrac{\pi}{6}$

C. $x=\dfrac{\pi}{3}$　　D. $x=\dfrac{\pi}{2}$

四、备选例题

例1 已知函数 $f(x)=(4+x^2)\sqrt{4-x^2}$，集合 $A=\{x|f'(x)>0\}$，$B=\{x|x^2+(2-b)x-2b\leqslant 0\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 b 的取值范围.

例2 求 $y=\sin^4x+\cos^4x$ 的导数.

五、小结与反思

§1.2.4　函数的导数公式综合应用

一、课标要求

1. 熟练运用导数计算公式和运算法则求解函数的导函数；

2. 结合导数的几何意义，运用正确的导数算法解决实际问题.

二、知识要点

1. 导数计算公式；

2. 导数运算法则；

3. 导数几何意义.

三、典型例题

例1　求下列函数的导数：

(1)$y=\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$；(2)$y=(x+2a)(x-a)^2$；

(3)$y=e^{-\frac{x}{2}}\cos\sqrt{3}x$.

变式1　设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，求 $f'(0)$.

例2　(2012·福建卷改编)已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-ex(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)若曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线平行于 x 轴，求函数 $f'(x)$的单调区间；

(Ⅱ)在(Ⅰ)条件下试确定 b 的取值范围，使得对任意 $x\in(-1,3)$有 $f'(x)>-x+b$ Ӣ　立.

变式2　一质点在 x 轴上运动，其运动规律为 $x=e^{-2t}\sin(\omega t+\varphi)$($\omega,\varphi$ 为常数)，试求 $t=\dfrac{1}{2}$时，质点运动的速度 v.

例3　(2012·广东卷理改编)设 $a<1$，集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|x>0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|2x^2-3(1+a)x+6a>0\}$，$D=A\cap B$.

(1)求集合 D(用区间表示)；

(2)若函数 $f(x)=2x^3-3(1+a)x^2+6ax$，求 $f'(x)=0$ 在 D 内的解.

变式3　(2012·陕西卷理改编)设函数 $f(x)=xe^x$，则使得 $f'(x)=0$ 的 x 的值是________.

四、备选例题

例1　(2012·大纲理改编)设函数 $f(x)=ax+\cos x$，$x\in[0,\pi]$，解不等式 $f'(x)>0$.

例2　已知 $x>0$，求证函数 $y=x^\alpha$ 的导数为 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$.

五、小结与反思

1.3　导数在研究函数中的应用

§1.3.1　函数的单调性与导数

一、课标要求

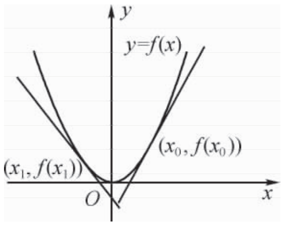
1. 了解可导函数的单调性与其导数的关系；

2. 能利用导数研究函数的单调性，会求函数的单调区间.

二、知识要点

1. 函数的单调性与其导数的正负的关系.

观察图象，探讨函数的单调性与其导数正负的关系.



导数 $f'(x_0)$表示函数 $f(x)$在点(x_0,y_0)处的切线的斜率.

在 $x=x_0$ 处，$f'(x_0)>0$，切线是"左下右上"式的，这时，函数 $f(x)$在 x_0 附近单调递增；

在 $x=x_1$ 处，$f'(x_0)<0$，切线是"左上右下"式的，这时，函数 $f(x)$在 x_1 附近单调递减.

一般地，函数的单调性与其导函数的正负有如下关系：

在某个区间(a,b)内，如果________，那么函数 $y=f(x)$在这个区间内单调递增；如果 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$在这个区间内________.

特别的，如果在某个区间内恒有 $f'(x)=0$，那么函数 $y=f(x)$在这个区间内是常函数.

2. 求函数 $y=f(x)$单调区间的步骤：

(1)确定函数 $y=f(x)$的定义域；

(2)求导数 $y'=f'(x)$；

(3)解不等式________，解集在定义域内的部分为增区间；解不等式________，解集在定义域内的部分为减区间.

三、典型例题

例1　解答下列各题.

(1)求证：函数 $y=x+\dfrac{1}{x^2+1}+4$ 在其定义域内是增函数；

(2)讨论函数 $f(x)=3x-x^3+1$ 的单调性；

(3)求函数 $y=x^3+x^2-5$ 的单调区间.

变式1　求下列函数的单调区间：

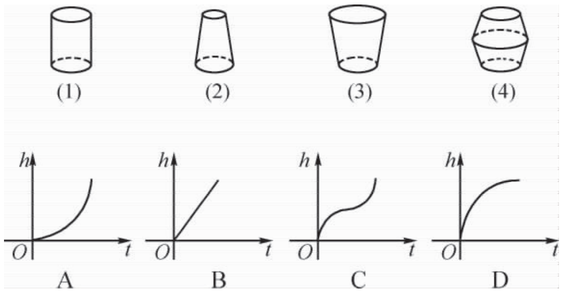
(1)$f(x)=x^2-2x+4$；

(2)$f(x)=3x-x^3$；

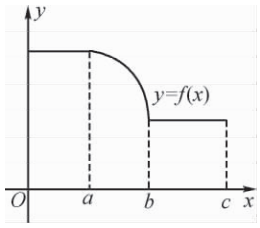
(3)$f(x)=e^x-x$；

(4)$f(x)=x+\cos x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

例2　水以恒速（即单位时间内注入水的体积相同）注入下面四种底面积相同的容器中，请分别找出与各容器对应的水的高度 h 与时间 t 的函数关系图象.



变式2　函数 $y=f(x)$的图象如图，试画出导函数 $f'(x)$图象的大致形状.



例3　已知 $a>0$，函数 $f(x)=x^3-ax$ 在$[1,+\infty)$上是增函数，则 a 的最大值是　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

变式 3　函数 $f(x)=x^2-2ax$ 在 $(-\infty,3]$ 单调递减，则 a 的取值范围是________.

四、备选例题

例1　(1)已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为闭区间 $[a,b]$ 上的可导函数，且 $f'(x)>g'(x)$，$f(a)=g(a)$. 证明：当 $x\in[a,b]$ 时，$f(x)>g(x)$；

(2)设 $x>0$，证明不等式：$x>\ln(1+x)$.

变式　(1)设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)>g'(x)$，则当 $a<x<b$ 时　　(　　)

A. $f(x)>g(x)$

B. $f(x)<g(x)$

C. $f(x)+g(a)>g(x)+f(a)$

D. $f(x)+g(b)>g(x)+f(b)$

五、小结与反思

§1.3.2　函数的极值与导数

一、课标要求

1. 理解极大值、极小值的概念；

2. 能够运用判别极大值、极小值的方法来求函数的极值；

3. 掌握求可导函数的极值的步骤.

二、知识要点

1. 函数极值的概念.

函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x=a$ 附近的其他点的函数值都小，$f'(a)=0$；且在点 $x=a$ 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$. 我们把点 a 叫做函数 $y=f(x)$ 的________，$f(a)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的________.

类似地，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=b$ 的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x=b$ 附近的其他点的函数值都大，$f'(b)=0$；且在点 $x=b$ 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$. 我们把点 b 叫做函数 $y=f(x)$ 的________，$f(b)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的________.

极大值点、极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为________.

说明：对函数的极值的理解

(1)"附近"：说明极值反映的是在某点附近的大小情况，是函数的一个局部性质，是仅对某一点的左右两侧邻域而言的.

(2)"左侧"、"右侧"：说明函数在极值点 x_0 左、右两侧函数均有意义，所以极值点不可能是定义域的端点.

(3)函数 $f(x)$ 在其定义域上的极值点可能不止一个，也可能没有. 函数的极大值与极小值没有必然的大小关系，函数的一个极小值也不一定比极大值小(见教材 P_{27} 图 1.3－11 中 c 和 f 点).

(4)极值点是数(即方程 $f'(x)=0$ 的根)，不是点. 极值是相应的函数值.

2. 求函数极值的方法.

(1)确定函数的定义区间，求导数 $f'(x)$.

(2)求方程 $f'(x)=0$ 的根.

(3)用函数的导数为 0 的点，顺次将函数的定义区间分成若干小开区间，并列成表格. 检查 $f'(x)$ 在方程根左右的值的符号，如果"左正右负"，那么 $f(x)$ 在这个根处取得极大值；如果"左负右正"，那么 $f(x)$ 在这个根处取得极小值；如果"左右同号"，那么 $f(x)$ 在这个根处无极值.

3. "$f'(x_0)=0$"与"x_0 是函数 $y=f(x)$ 的极值点"的关系.

$f'(x_0)=0$ 时，若在 x_0 两侧 $f'(x)$ 符号相同，则 x_0 不是函数的极值点(如：函数 $y=x^3$，$f'(x)=0$，由图象知 0 不是函数 $y=x^3$ 的极值点). 反过来，所有的极值点都是 $f'(x)=0$的根.

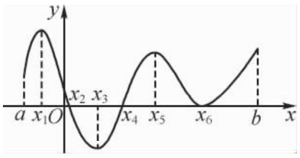
因此，若 $f(x)$ 为可导函数则"$f'(x_0)=0$"是"x_0 是函数 $y=f(x)$ 的极值点"的________.

三、典型例题

例1　求下列函数的极值：

(1) $f(x)=-x(x-1)^2$；(2) $f(x)=x\ln x$.

变式1 如图，根据图象回答问题：



(1)若图是函数 $y=f(x)$ 的图象，指出哪些是函数 $y=f(x)$ 的极大值点，哪些是极小值点.

(2)若图是函数 $y=f'(x)$ 的图象，指出哪些是函数 $y=f(x)$ 的极大值点，哪些是极小值点.

例2 设函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象与 y 轴的交点为 P，且其图象在点 P 处的切线方程为 $12x-y-4=0$. 若函数在 $x=2$ 处取得极值 0，求该函数的解式.

变式2 (1)已知函数 $f(x)=x^3-3ax^2+2bx$ 在点 $x=1$ 处有极小值 -1，则实数 $a=$________，$b=$________.

(2)已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2-3x$ 在 $x=\pm1$ 处取得极值，则求 $f(x)=$________，$f(1)$ 是函数 $f(x)$ 的________.(填极大值或极小值)

例3 设函数 $f(x)=x^3-3ax^2-24a^2x+b$ 有极大值 S 和极小值 T，且 $S>0$，$T<0$，$S=T+4$.

(1)求实数 a 的值；(2)求实数 b 的取值范围.

变式3 设函数 $f(x)=x(x-1)(x-a)(a>1)$.

(1)求导数 $f'(x)$；

(2)证明 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1，x_2；

(3)若(2)中 $x_1<x_2$，判断 x_1，x_2 分别是极大值点还是极小值点.

四、备选例题

1. 若函数 $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x+1}$ 在 $x=1$ 处取极值，则 $a=$________.

2. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$ 在 $x=1$ 处有极值 10，求 a，b 的值.

五、小结与反思

§1.3.3 函数的最大(小)值与导数(一)

一、课标要求

1. 理解函数的最大值和最小值的概念；

2. 掌握可导函数在闭区间上所有点(包括端点)处的函数中的最大(或最小)值必有的充分条件；

3. 掌握用导数求函数的极值及最值的方法和步骤.

二、知识要点

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数必有最大值和最小值. 这里有两层意思：

(1)给定函数的区间必须是闭区间，$f(x)$在开区间上虽然连续但不能保证有最大值或最小值；

(2)在闭区间上的每一点必须连续，即在闭区间上有间断点也不能保证 $f(x)$有最大值和最小值.

2. 极值与最值.

注意区分函数的极值和函数的最值的联系与区别. 函数的极值是函数的局部性质，函数的最值是函数在指定区间上的整体性质.

3. 掌握在闭区间$[a,b]$上连续、在(a,b)上可导的函数最值求解的方法.

其步骤一般如下：

(1)如果 $f(x)$在(a,b)上有极值点，

第一步：求 $f'(x)$，并据此求解 $f(x)$的极值；第二步：求端点函数值 $f(a)$，$f(b)$；第三步：只需将 $f(x)$的各极值与 $f(a)$，$f(b)$比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

(2)如果 $f(x)$在(a,b)上没有极值点，则 $f(x)$的最值在区间$[a,b]$上一致单调，其最值在区间的端点取得.

三、典型例题

例1　求下列函数在指定区间内的最值：

(1)$f(x)=2x-\sqrt{4-x}(-5\leqslant x\leqslant 3)$；

(2)$f(x)=4x^2(x^2-2)(-2\leqslant x\leqslant 2)$.

变式 1　当 $x=$________时函数 $f(x)=\ln(x+1)-x$ 取得最大值________；函数 $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$ $\left(-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right)$的最大值为________，最小值为________.

例2　已知函数 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$ 在区间$[-2,2]$上的最大值为 20，求它在该区间上的最小值.

变式 2　函数 $y=\ln x-x$ 在 $x\in(0,e]$上的最大值为________.

例3　已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=x^2|x-a|$，求函数 $y=f(x)$在区间$[1,2]$上的最小值.

变式 3　已知 $f(x)=ax-\ln x$，$x\in(0,\mathrm{e}]$其中 e 是自然常数，$a\in\mathbf{R}$.

问：是否存在实数 a，使 $f(x)$的最小值是 3，若存在，求出 a 的值；若不存在，说明理由.

四、备选例题

例1　已知函数 $f(x)=ax^3+x^2+bx$(其中常数 a，$b\in\mathbf{R}$)，$g(x)=f(x)+f'(x)$是奇函数.

(1)求 $f(x)$的表达式；

(2)讨论 $g(x)$的单调性，并求 $g(x)$在区间$[1,2]$上的最大值和最小值.