赢在思维

初中数学 拉分题 解题思维训练

主编：蒋忠勇 陆新生 陈文瑜

9年级+中考

（第三版）

★ 专题整合突破提高

★ 题型贴合考试热点

★ 解题思维方法详尽

★ 答案详细重点提示

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

赢在思维

初中数学
拉分题
解题思维训练

9年级+中考
（第三版）

主编：蒋忠勇 陆新生 陈文瑜

编委会

蒋忠勇 陆新生 秦佳艺 汤婧雯 陈文瑜
郑春雷 刘露邑 奚祉妍 瞿 霞 何胜男
曹佳琦 汪 韩 张伊凡

（排名不分先后）

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

赢在思维.初中数学拉分题解题思维训练.9年级+中考/蒋忠勇,陆新生,陈文瑜主编.—3版.—上海:华东理工大学出版社,2018.5

ISBN 978-7-5628-5435-7

Ⅰ.①赢… Ⅱ.①蒋… ②陆… ③陈… Ⅲ.①中学数学课-初中-题解-升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第070970号

策划编辑/郭 艳
责任编辑/赵子艳
装帧设计/视界创意
出版发行/华东理工大学出版社有限公司
地 址:上海市梅陇路130号,200237
电 话:021-64250306
网 址:www.ecustpress.cn
邮 箱:zongbianban@ecustpress.cn
印 刷/常熟市新骅印刷有限公司
开 本/787mm×1092mm 1/16
印 张/14.25
字 数/395千字
版 次/2018年5月第3版
印 次/2018年5月第1次
定 价/35.00元

初中拉分题系列图书

初中数学 解题思维训练+专项训练300题

初中物理 解题思维训练+专项训练300题

初中化学 解题思维训练+专项训练300题

初中数学几何 解题思想与方法：几何篇+几何专项训练

前　言

“初中数学拉分题”系列从出版到现在，经过多次重印修订，其间我们收到很多来自读者的反馈，做了多次细节方面的改进，同时我们越来越明显地体会到，在初中数学的各类练习和考试中，每道大题的最后1～2个小题，也就是“拉分题”，通常成为拉开总分差距的决定性要素.

本次改版我们力争做到以下几点.

1. 参考多地教材，强调广泛性

为了使本书更具有广泛的适用性，编者在改版工作中参考了大量版本的教材，尽量使更多的读者受益.

2. 精选例题习题，强调典型性

本书所选每一道题都蕴含了丰富的数学思想与数学方法，充分体现了拓展思维、培养数学素养的编写思想. 同学们在学习例题的过程中，除了需要掌握基础知识与技能，发展应用数学的意识与能力，还要增强学好数学的愿望与信心.

本次改版，所选例题没有重复，并且专项训练的设置保证了学生在学习例题之后能及时复习，便于了解学习情况，巩固解题技巧，加深对题目的理解，从而达到举一反三的目的. 拓展提高训练多选自全国各地重点高中自招题. 本书的习题量不大，但每个题目都能使认真思考者有所收获，并且方便一线教师在教学中灵活使用.

另外，通过对中考题型的研究，本次改版涵盖了各种中考重点题型，并且有缜密的思维分析过程，使学生们能够准确判断所属题型，并运用相应解题方法清晰答题.

3. 深度剖析例题，强调思维性

本书编写的立足点并不是题海战术，而是对每一类题目的解法的透彻理解和掌握. 通过“思维点评”指导学生学会思维方法，引导学生将每种方法和思路逐步转化为自己的理解，掌握一些常用的解题思路、策略和方法，将思维融于探究之中.

相信读者们只要按编者的编写思路进行学习、巩固、拓展，必然会取得进步. 我们坚信这本书能够让你夯实基础、拓展思维、掌握技巧，成为你取得优异数学成绩的基石.

我们也恳请教育战线的前辈与同仁给予指导和推荐，同时更希望能够得到读者的建议与批评，使我们不断改进、不断进步.

目　录

专题 1　相似三角形

编者引言

相似三角形是整个初中数学的重要内容之一，其综合性、技巧性较强，又是中考和竞赛的必考内容之一.

本专题的目的是学会从复杂的图形中找出恰当的相似三角形，从而解题，主要内容如下.

(1) 常见的一些存在“多对相似三角形”的图形.

(2) 介绍合(分)比、等比例线段等知识的应用，以及一些常用定理.

(3) 相似三角形应用之一：求面积相关问题、分类讨论等.

(4) 相似三角形应用之二：求比例线段或证明.

经典拉分题解析

题 1

(相似三角形判定)如图 1－1 所示，在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，连接 DE 并延长交 BC 的延长线于点 F，连接 DC、BE. 若 $\angle BDE+\angle BCE=180°$，回答下列问题.

(1) 写出图中所有的相似三角形(注意：不得添加字母和辅助线).

(2) 请在找出的相似三角形中选两对，并说明它们相似的理由.

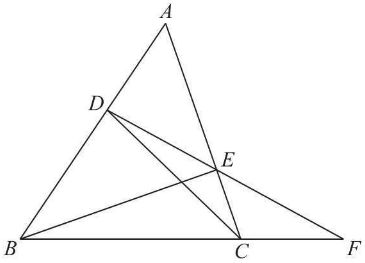


图 1－1

满分解答

(1) 相似三角形有：$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$，$\triangle CEF\backsim\triangle DBF$，$\triangle AEB\backsim\triangle ADC$，$\triangle FEB\backsim\triangle FCD$.

(2) 选 $\triangle ADE\backsim\triangle ACB$，$\triangle AEB\backsim\triangle ADC$ 进行说明.

由于 $\angle BDE+\angle ADE=180°$，$\angle BDE+\angle BCE=180°$，可得 $\angle ADE=\angle ACB$.

又 $\angle A=\angle A$，所以 $\triangle ADE\backsim\triangle ACB$，进而得到 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AE}{AB}$.

因为 $\angle A=\angle A$，所以 $\triangle AEB\backsim\triangle ADC$.

技巧贴士

本题的关键在于将 $\angle BDE+\angle BCE=180°$ 作为突破口，这个条件也可以认为是唯一的条件，再加上 $\angle A$ 为公共角即可证明. 至于类似 $\triangle AEB\backsim\triangle ADC$ 的情况，可认为是由“二次相似”所得到的情况. 另外，由 $\angle BDE+\angle BCE=180°$，说明了 B、

C、E、D 四点共圆，由四点共圆可以得到许多等角.

在寻找相似三角形时，一般可以从相等角找起，或者通过寻找比例相同的两组线段，从而找到两个相似的三角形. 其主要依据就是“相似三角形的对应角相等，对应边成比例”. 但无论采取何种方法，首先都要分析相似三角形的特征，哪些角是定角，哪些边已知，这样才能使分析更有效.

如图 1－2 所示是相似三角形中的 8 种基本模型.

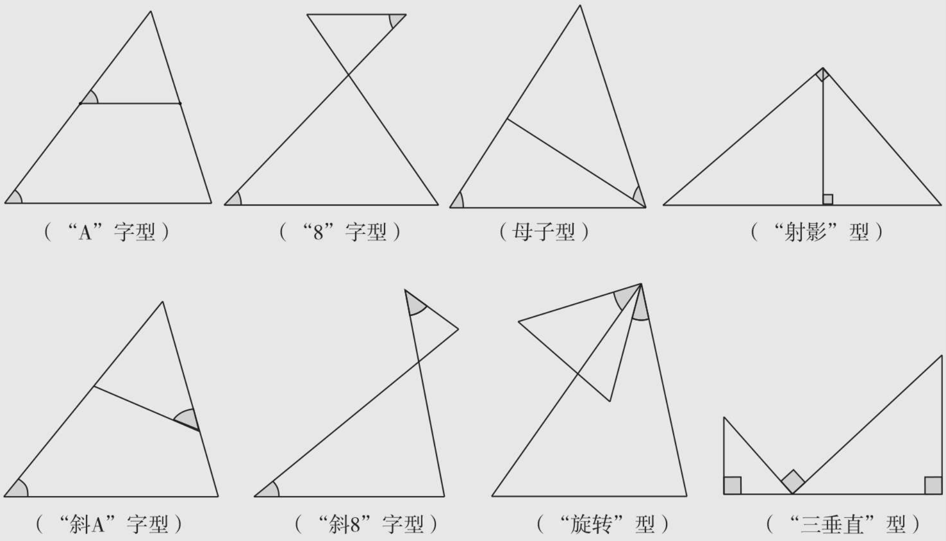


图 1－2

如图 1－3 所示，则是相似三角形中常见的几种复杂模型.

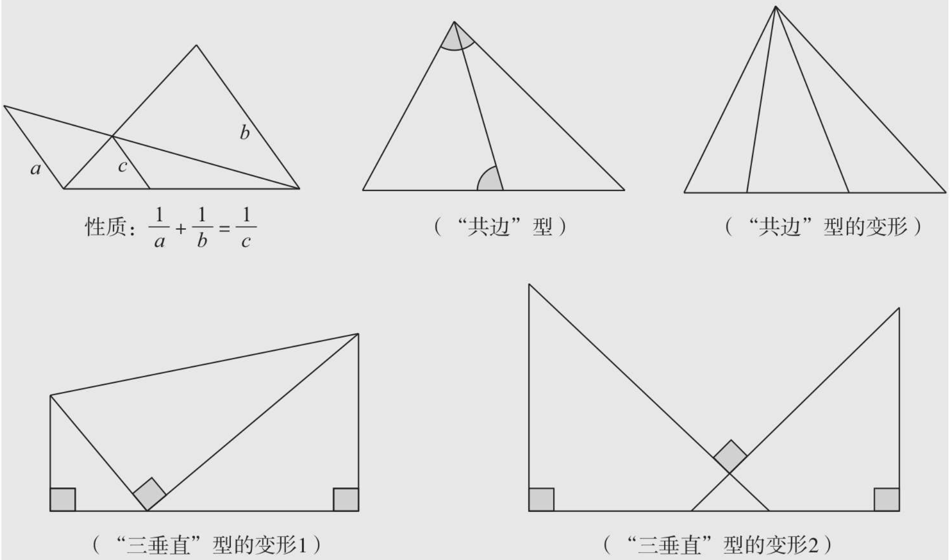


图 1－3

希望大家认真观察并熟记以上模型，因为许多题目往往就是从以上这些图形中演变出来的. 最后，强调一下：求某边或某角，往往是寻找某边或某角所在三角形相似的情况.

题 2

(角平分线定理)如图 1－4(a)所示,AD 为△ABC 中∠BAC 的角平分线,求证:$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$.

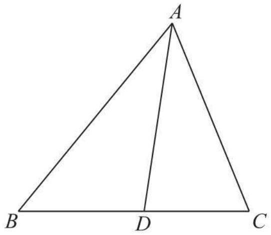


图 1－4(a)

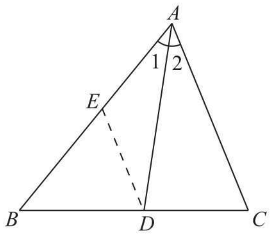


图 1－4(b)

满分证明

如图 1－4(b)所示,作 $DE/\!/AC$,交 AB 于 E. $\angle 1=\angle 2=\angle EDA$,则 $DE=AE$,使用等量代换,可得$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{DE}=\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{BD}{CD}$.

技巧贴士

一些隐藏性质需牢记,这能加强对题目的理解.

题 3

(射影定理)如图 1－5 所示,在△ABC 中,$\angle ACB=90°$,CD 是边 AB 上的高,求证:(1) $AC^2=AD\cdot AB$.(2) $CD^2=AD\cdot BD$.

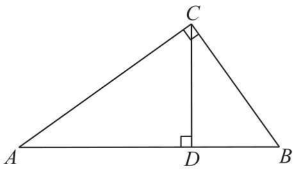


图 1－5

满分证明

(1) 因为$\angle ACB=90°$,CD 是△ABC 中 AB 边上的高,所以$\angle ADC=\angle ACB=90°$. 又因为$\angle A=\angle A$,所以△$ACD$∽△$ABC$. 所以$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$,即 $AC^2=AD\cdot AB$.

(2) 因为$\angle ADC=\angle ACB=90°$,所以$\angle A+\angle B=90°$,$\angle A+\angle ACD=90°$. 所以$\angle B=\angle ACD$. 所以△$ADC$∽△$CDB$. 所以$\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{AD}{CD}$,即 $CD^2=AD\cdot BD$.

技巧贴士

本题是“射影定理”的一部分,本定理还有以下结论:(1) $CD^2=DB\cdot AD$. (2) $AC\cdot CB=CD\cdot AB$.

这里要特别强调,图 1－5 为典型图形,经常出现,所以请记住结论,而且在使用这些结论时,记得要进行简单的证明. 此外,我们还有一个结论,即“如果直角三角形的两条直角边分别为 a 和 b,斜边上的高为 h,则$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{h^2}$”.

题 4

(相似三角形的判定及性质)如图 1－6(a)所示,平行四边形 $ABCD$ 的面积是 60,E、F 分别是 AB、BC 的中点,AF 与 DE、DB 分别交于点 G、点 H,求四边形 $EBHG$ 的面积.

满分解答

连接 AC，交 BD 于点 O，延长 AF，交 DC 的延长线于点 I，见图 1-6(b)．则可证得 $CI=AB=CD$．由于 $AB/\!/CD$，$\triangle ABH\backsim\triangle IDH$，$\frac{HB}{HD}=\frac{1}{2}$，即 $BH=\frac{1}{3}BD$．

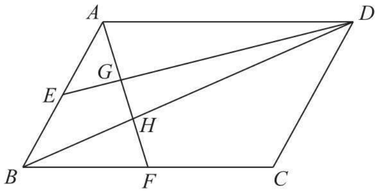


图 1-6(a)

所以 $S_{\triangle ABH}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 60=10$．

可证得 $\triangle AGE\backsim\triangle IGD$，则 $\frac{EG}{GD}=\frac{AE}{DI}=\frac{1}{4}$，即 $EG=\frac{1}{5}ED$．

所以 $S_{\triangle AEG}=\frac{1}{5}S_{\triangle AED}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times 60=3$．

从而求得 $S_{四边形EBHG}=S_{\triangle ABH}-S_{\triangle AEG}=10-3=7$．

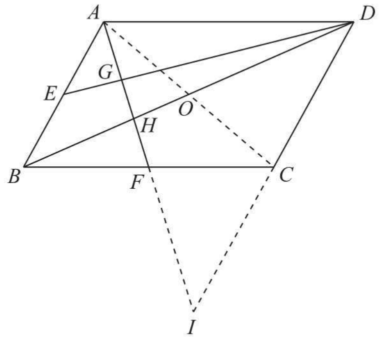


图 1-6(b)

技巧贴士

本题利用所求四边形面积为两个三角形的面积之差，间接求出四边形面积．当求两个三角形的面积时，在高相等的情况下求出底边之比，就是三角形的面积之比．题 4 可归纳成求两线段交点在某一条线段上的"位置"．本题的关键是求点 G、点 H 在 ED、BD 上的"位置"．

对于相似三角形的面积问题，经常会涉及以下内容．

(1) 直接法：$S=\frac{1}{2}ah$(图 1-7)．

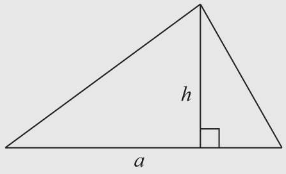
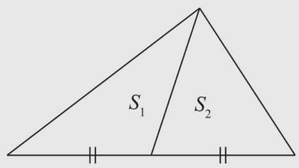


图 1-7

(2) 等积法：利用"等底同高"(图 1-8)或"同底等高"(图 1-9)．



等底同高

图 1-8

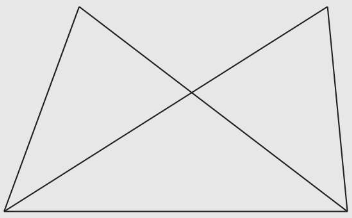
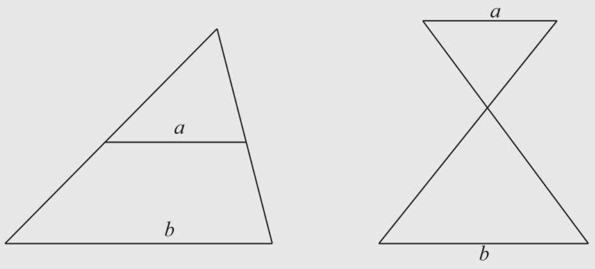

同底等高

图 1-9

(3) 等比法:两三角形相似,其面积比为相似比的平方(图 1-10).



相似比的平方

图 1-10

题 5 (分类讨论)如图 1-11(a)所示,在直角梯形 $ABCD$ 中,$AB=7$cm,$AD=2$cm,$BC=3$cm. 如果边 AB 上有一点 P,如图 1-11(b)所示,以 P、A、D 为顶点的三角形和以 P、B、C 为顶点的三角形相似,那么这样的 P 点有________个.

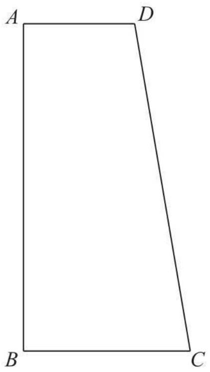


图 1-11(a)

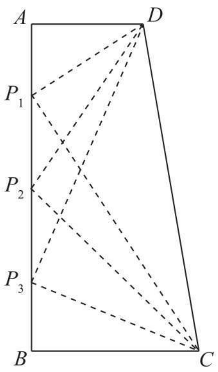


图 1-11(b)

满分解答 设 $AP=x$,则 $BP=7-x$.

因为$\triangle PAD\backsim\triangle PBC$,在直角梯形 $ABCD$ 中,$\angle A=\angle B=90°$,所以$\triangle ADP\backsim\triangle BCP$ 或$\triangle ADP\backsim\triangle BPC$.

当$\triangle ADP\backsim\triangle BCP$ 时,$\frac{AD}{BC}=\frac{AP}{BP}$,$\frac{2}{3}=\frac{x}{7-x}$,$x=\frac{14}{5}$,即 $AP=\frac{14}{5}$cm.

当$\triangle ADP\backsim\triangle BPC$ 时,$\frac{AD}{BP}=\frac{AP}{BC}$,$\frac{2}{7-x}=\frac{x}{3}$,$x^2-7x+6=0$,解得 $x=1$ 或 $x=6$,即 $AP=1$cm 或 6cm.

综上所述,$AP=\frac{14}{5}$cm 或 1cm 或 6cm,使以 P、A、D 为顶点的三角形和以 P、B、C 为顶点的三角形相似的 P 点有 3 个,如图 1-11(b)所示.

本题设参后，关键是分类标准，考虑到$\angle A=\angle B=90^\circ$，则$\triangle ADP\backsim\triangle BCP$，或$\triangle ADP\backsim\triangle BPC$（注意$A$，$B$对应，式子左边$D$，$P$不变，而式子右边$C$，$P$进行了置换）. 另外，$\frac{AD}{BC}=\frac{AP}{BP}$、$\frac{AD}{BP}=\frac{AP}{BC}$的写法也请注意观察并对应.

关于相似三角形中的分类讨论主要分布在各种类型的题目中，其分类讨论的要点，主要以“角”为对象进行研究.

现将分类讨论的一般步骤总结如下.

(1) 明确讨论的对象.

(2) 确定分类的标准，按照一个标准进行分类.

(3) 逐步讨论，做到“不重复”“不遗漏”.

(4) 归纳小结，得出结论.

在相似三角形的分类讨论中，要注意“线段”“直线”“射线”的区别.

另补充以下情况.

(1) 填空题中分类讨论的标志.

① 题中没有“如图”两字.

② “直线”“射线”的修饰.

(2) 综合题中分类讨论的标志，举例如下.

① “以P、O、M为顶点的三角形与$\triangle OCD$相似，求出符合条件的点P”. 用文字写出的“相似”则必定要分类讨论.

② “是否存在点M，使$\triangle BDM\backsim\triangle CEM$，求$M$的坐标”，这种情况一般要分类讨论.

技巧贴士

③ “$\triangle AME\backsim\triangle ENB$”（$\triangle AME$的顶点$A$、$M$、$E$分别与$\triangle ENB$的顶点$E$、$N$、$B$对应）已经写了对应点，则不必分类讨论.

分类讨论还请注意类似下题的情况：在$\triangle ABC$中，$\angle B=25^\circ$，AD是边BC上的高，并且$AD^2=BD\cdot DC$，则$\angle BCA$的度数为多少？

此题需要自己画图考虑三角形的情况. 而根据已知条件，并不能确定高的位置，需要进行分类讨论.

(1) 当高在$\triangle ABC$内部时，如图 1-12(a)，因为$AD^2=BD\cdot DC$，则$\frac{AD}{BD}=\frac{DC}{AD}$. 又因为$\angle ADB=\angle CDA$，可证得$\triangle ADB\backsim\triangle CDA$，故$\angle BAD=\angle ACD$.

又$\angle CAD+\angle ACD=90^\circ$，所以$\angle CAD+\angle BAD=90^\circ$，由$\angle B=25^\circ$，得到$\angle BCA=65^\circ$.

(2) 当高在$\triangle ABC$外部时，如图 1-12(b)，同理可得$\triangle ADB\backsim\triangle CDA$，则$\angle ABD=\angle CAD=25^\circ$，故$\angle ACD=65^\circ$，此时$\angle BCA=180^\circ-\angle ACD=115^\circ$.

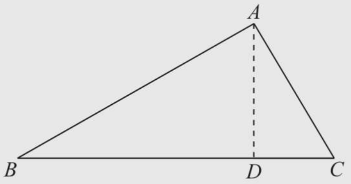


图 1-12(a)

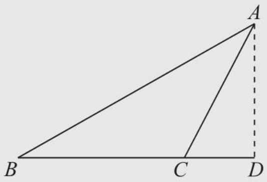


图 1-12(b)

题 6 （平行线分线段成比例）如图 1－13 所示，P 为平行四边形 $ABCD$ 对角线 BD 上的点，过点 P 作一直线分别交 BA、BC 的延长线于 Q、R，交 CD、AD 于 S、I，求证：$PQ \cdot PI = PR \cdot PS$.

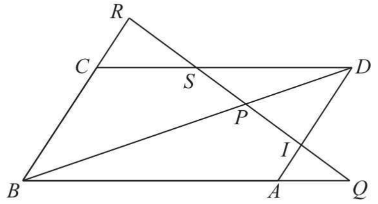


图 1－13

满分证明 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD /\!/ BC$，$DC /\!/ AB$.

由 $AD /\!/ BC$，可证得 $\frac{BP}{PD}=\frac{PR}{PI}$，由 $DC /\!/ AB$，可证得 $\frac{BP}{PD}=\frac{PQ}{PS}$，故 $\frac{PR}{PI}=\frac{PQ}{PS}$.

因此 $PQ \cdot PI = PR \cdot PS$.

技巧贴士 求证结论为线段乘积形式，应先将其整理成线段比例形式. 再观察图形，可发现多组“A”字形或“8”字形等基本模型. 由于基本模型众多，必然出现多组比例线段，此时我们应从特殊线段入手，观察发现 BD 为对角线，BD 能“连接”多个模型，故以 $\frac{BP}{PD}$ 为中间量，列出比例线段.

题 7 （比例性质）如图 1－14 所示，已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 BC 上，$BE /\!/ DA$ 交 CA 的延长线于点 E，$CF /\!/ DA$ 交 BA 的延长线于点 F，EF、BC 的延长线交于点 G，设 $\frac{BD}{DC}=\frac{a}{b}$，求 $\frac{DG}{BC}$.

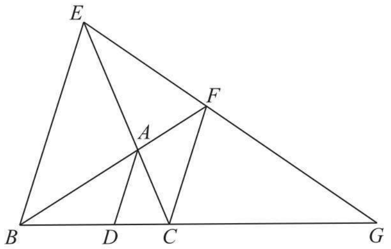


图 1－14

满分解答 因为 $BE /\!/ DA$，$CF /\!/ DA$，$\frac{BD}{DC}=\frac{a}{b}$，所以 $\frac{CF}{EB}=\frac{CA}{EA}=\frac{CD}{BD}=\frac{b}{a}$，$\frac{CG}{BG}=\frac{CF}{BE}=\frac{b}{a}$，所以 $\frac{CG}{BC}=\frac{b}{a-b}$. 因为 $\frac{BD}{CD}=\frac{a}{b}$，$\frac{BC}{CD}=\frac{a+b}{b}$，所以 $\frac{CD}{BC}=\frac{b}{a+b}$. 于是 $\frac{DG}{BC}=\frac{DC}{BC}+\frac{CG}{BC}=\frac{b}{a-b}+\frac{b}{a+b}=\frac{2ab}{a^2-b^2}$.

技巧贴士 本题显然有很多组相似三角形. 不难发现 $DG=DC+CG$，即 $\frac{DG}{BC}=\frac{DC}{BC}+\frac{CG}{BC}$，所以要找出相应图形恰当表达 $\frac{DC}{BC}$，$\frac{CG}{BC}$.

题 8

(相似三角形的判定及性质)如图 1－15 所示,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90^\circ$, CD 是角平分线,$DE/\!/BC$ 交 AC 于点 E,$DF/\!/AC$ 交 BC 于点 F. 求证:$CD^2=2AE\cdot BF$.

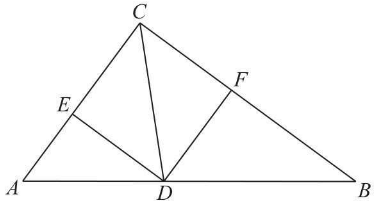


图 1－15

满分证明

由 $DE/\!/BC$, $DF/\!/AC$,得 $\angle ADE=\angle B$, $\angle AED=\angle ACB=\angle DFB=90^\circ$,可证得 $\triangle AED\backsim\triangle DFB$,所以 $\dfrac{AE}{DF}=\dfrac{DE}{BF}$,即 $AE\cdot BF=DE\cdot DF$.

由题意得,$\triangle CDE$、$\triangle CDF$ 是等腰直角三角形,将 $DE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CD$, $DF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CD$ 代入得 $CD^2=2AE\cdot BF$.

技巧贴士

本题由相似三角形得到边的相似比:$\dfrac{AE}{DF}=\dfrac{DE}{BF}$,通过边的等量代换,证得 $CD^2=2AE\cdot BF$. 根据式子的特点,我们将比例问题分为"$A=B$"和"$A+B=C$"两种形式. 在证明这些问题时主要可以通过以下几种方式进行.

(1) 直接计算,即对所求问题,直接代入计算,但这种方法比较烦琐.

(2) 等量代换,即通过中间量,证明两者相等. 使用这种方法的关键在于找出、辨别、选择恰当的中间量. 在以等量代换为基础思想的解题过程中,可以选择现有的等量,也可以通过添加辅助线来获得更多的等量关系.

(3) 利用合分比,即利用合分比的性质,在证明的过程中,使问题简化从而达到目的.

(4) 建立参数,即设立合适的参数,将几何问题转化为代数问题.

在其他参考书中,相似三角形的应用可分为求线段、求周长、求面积等几类. 我们现在按照"$A=B$"和"$A+B=C$"的形式分类,是根据结论中式子的特点来进行的,希望同学们从式子本身的特点出发,合理运用合(分)比、等量代换等技巧来化简式子.

题 9

(证明)如图 1－16(a)所示,在$\triangle ABC$ 中,AD 为$\angle BAC$ 的角平分线,EF 是 AD 的垂直平分线且交 AB 于点 E,交 BC 的延长线于点 F,求证:$DC\cdot DF=BD\cdot CF$.

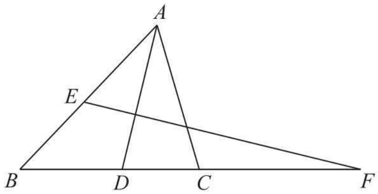


图 1－16(a)

满分证明

连接 AF,如图 1－16(b). 则 $AF=DF$, $\angle FAD=\angle FDA$.

因为 AD 为$\angle BAC$ 的角平分线,所以$\angle BAD=\angle CAD$.

又因为$\angle FAD=\angle CAD+\angle CAF$, $\angle FDA=\angle BAD+\angle B$,故$\angle B=\angle CAF$.

结合 $\angle F$ 为公共角，可以证得 $\triangle FAB \backsim \triangle FCA$，得到 $\frac{AF}{CF}=\frac{BF}{AF}$. 由于 $\frac{AF}{CF}-1=\frac{BF}{AF}-1$，所以 $\frac{AF-CF}{CF}=\frac{BF-AF}{AF}$，又因为 $AF=DF$，代入等式得 $\frac{DF-CF}{CF}=\frac{BF-DF}{DF}$，化简得 $\frac{DC}{CF}=\frac{BD}{DF}$，即 $DC \cdot DF=BD \cdot CF$.

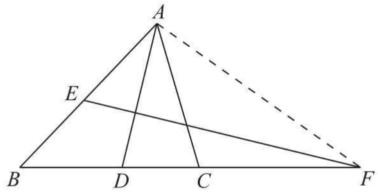


图 1－16(b)

技巧贴士

对于证明 $DC \cdot DF=BD \cdot CF$（$ab=cd$）这样的形式，一般可化为 $\frac{DC}{CF}=\frac{BD}{DF}$ $\left(\frac{a}{d}=\frac{c}{b}\right)$，观察发现 4 条边都在同一直线上，所以可能存在“加减关系”. 尝试用合（分）比，将分子、分母化为“加减”形式，即 $\frac{DC+CF}{CF}=\frac{BD+DF}{DF}$. 图中出现中垂线，一般尝试向线段两端作连线. 连接 AF，则 $AF=DF$，即要证 $\frac{AF}{CF}=\frac{BF}{AF}$，则需证 $\triangle FAB \backsim \triangle FCA$（这种方法为“逆推”分析）.

题 10

（证明）如图 1－17 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，分别以 AB、AC 为边向外作正方形 $ABDE$、$ACFG$. 设 CD 交 AB 于点 N，BF 交 AC 于点 M，求证：$AM=AN$.

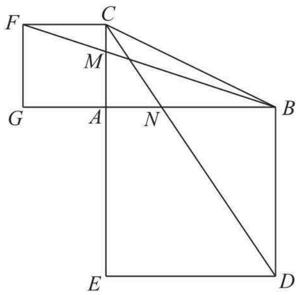


图 1－17

满分证明

因为四边形 $ABDE$、$ACFG$ 都是正方形，$\angle BAC=90°$，所以 $CF /\!/ AB$，$AC /\!/ BD$，$AB=BD$，$AC=CF$. 所以 $\triangle CFM \backsim \triangle ABM$，所以 $\frac{CF}{AB}=\frac{CM}{AM}$，即 $\frac{AM}{AB}=\frac{CM}{CF}$. 由合比性质得 $\frac{AM}{AB}=\frac{AM+CM}{AB+CF}=\frac{AC}{AB+CF}$，同理 $\frac{AN}{AB}=\frac{AC}{AC+BD}$，则 $AM=\frac{AB \cdot AC}{AB+CF}$，$AN=\frac{AB \cdot AC}{AC+BD}$.

因为 $AB=BD$，$AC=CF$，所以 $AB+CF=AC+BD$，所以 $AM=AN$.

技巧贴士

要证“$AM=AN$”（即“$A=B$”形式），常见思路为等量代换，所以将 AM、AN 分别置于一对相似三角形中，用“中间量”分别表示即可. 本题也可利用三角比证明.

题 11

(综合)如图 1－18 所示,已知$\triangle ABC$与$\triangle ADE$都是等边三角形,点 D 在 BC 边上(点 D 不与点 B、C 重合),DE 与 AC 相交于点 F.

(1)求证:$\triangle ABD \backsim \triangle DCF$.

(2)若 $BC=1$,设 $BD=x$,$CF=y$,求 y 关于 x 的函数解析式及定义域.

(3)当 x 为何值时,$\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{7}{9}$?

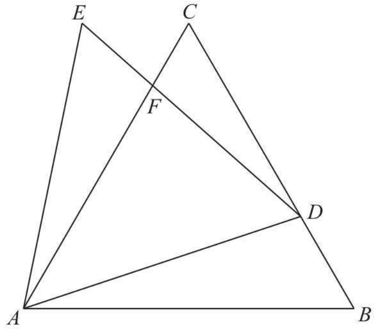


图 1－18

满分解答

(1) 由于$\triangle ABC$与$\triangle ADE$都是等边三角形,则$\angle B=\angle C=\angle ADE=60°$,$\angle CDF+\angle ADE=\angle B+\angle DAB$,所以$\angle CDF=\angle DAB$,可证得$\triangle ABD \backsim \triangle DCF$.

(2) 由$\triangle ABD \backsim \triangle DCF$,得$\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{BD}{CF}$,则$\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{x}{y}$,整理得 $y=x-x^2(0<x<1)$.

(3) 由于$\triangle ABC$与$\triangle ADE$都是等边三角形,进而容易得到$\triangle AEF \backsim \triangle ABD$,所以$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AD}$. 因为 $AE=AD$,$AB=BC=1$,所以 $AE^2=AF$.

由相似可得$\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{7}{9}=\left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2$,$AE^2=AF=\dfrac{7}{9}$,所以 $CF=\dfrac{2}{9}$,则 $x-x^2=\dfrac{2}{9}$,解得 $x=\dfrac{1}{3}$或$\dfrac{2}{3}$.

技巧贴士

面积比是相似比的平方是常见性质.

题 12

(综合)(上海虹口·一模)如图 1－19(a)所示,已知梯形 $ABCD$,$AD /\!/ BC$,$AB=AD=5$,$\tan\angle DBC=\dfrac{3}{4}$. E 为射线 BD 上一点,过点 E 作 $EF /\!/ DC$ 交射线 BC 于点 F,连接 EC,设 $BE=x$,$\dfrac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle BDC}}=y$.

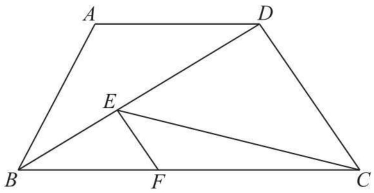


图 1－19(a)

(1)求 BD 的长.

(2)当点 E 在线段 BD 上时,求 y 关于 x 的函数解析式,并写出自变量 x 的取值范围.

满分解答

(1) 过点 A 作 $AH \perp BD$ 于点 H,如图 1－19(b). 由 $AD /\!/ BC$,$AB=AD=5$,得$\angle ABD=\angle ADB=\angle DBC$,$BH=HD$.