GAILÜLUN YU SHULI TONGJI SHIXUN JIAOCHENG

概率论与数理统计

实训教程

主编　曹南斌　李文汉

电子科技大学出版社

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI SHIXUN JIAOCHENG

概率论与数理统计
实训教程

主　编　曹南斌　李文汉
副主编　田雪玲　辛玉东
　　　　弓小影　沈玮玮

TONGJI

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计实训教程 / 曹南斌，李文汉主编.
—成都：电子科技大学出版社，2016.1
ISBN 978-7-5647-3422-0

Ⅰ.①概… Ⅱ.①曹… ②李… Ⅲ.①概率论－高等学校－教材 ②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 307241 号

概率论与数理统计实训教程

主编　曹南斌　李文汉

出版发行：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑：曾　艺
责任编辑：曾　艺　刘　愚
主　　页：www.uestcp.com.cn
电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：三河市文阁印刷厂
成品尺寸：185mm×260mm　　印张 14　　字数 320 千字
版　　次：2016 年 1 月第 1 版
印　　次：2016 年 1 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-3422-0
定　　价：31.00 元

前　言

《概率论与数理统计实训教程》是为学习《概率论与数理统计》课程而编写的指导性教材.全书由随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等9章内容组成.每章包含“知识网络图”“主要知识点”“疑难解析”“典型例题分析”“综合训练”和“自测题”6部分内容.

本书注重培养读者对《概率论与数理统计》课程中的基本概念、基本理论和基本方法进行熟练掌握和灵活运用的能力,使读者加深对所学知识的理解和掌握,本书具有以下几个特点.

1. 给出了每个章节的重点和难点内容,以图表的形式列出了知识网络,并给出了主要的知识点以及各个知识点的相互关系,使读者对每章的基本概念、重要定理与常用公式等知识一目了然,从而能够对每一部分的内容进行系统的学习和理解.

2. 大学数学类课程一般都比较抽象,《概率论与数理统计》也不例外.读者在学习本课程时,难免会遇到一些比较抽象的概念、定理以及如何运用本课程的理论来解释有关的实际问题.本书的“疑难解析”部分通过对一些抽象的理论进行详尽的分析,使得这些知识成为有源之水,读者在学习过程中不至于感到枯燥,增加了本书的趣味性.

3. 为了与课堂教学有所区别,本书所选的典型例题综合性较强并具有一定的深度.对于典型例题,一般先给出解题思路分析,然后给出正式解答,对于部分难度较大的典型例题,还做了深入的分析与评注.这样做的目的是帮助读者开拓思维模式,培养学生综合分析和解决问题的能力.另外,本书还对往年的研究生入学考试数学科目中的部分真题进行了分析与研究.

4. “综合训练”和“自测题”部分分别编入大量有关基本概念和综合性的练习题,可以帮助读者进一步提高对相关题目解答的能力,较好地掌握概率论与数理统计的思想方法与解题技巧,加深理解教材中的内容.

5. 本书涉及的许多案例非常贴近人们的生活和生产管理，具有时代气息，这些例子也是我们在日常教学中进行积累整理加工而成的，它把概率统计的知识渗透到各种实际问题中来，真正做到了理论联系实际，用理论知识解决实际问题.

本书是普通高等院校理工类、经管类各专业概率论与数理统计课程的学习指导书，也可作为相关专业人员和广大教师的教学参考书，对报考研究生的读者也具有一定的参考价值.

在本书的编写过程中，由于编者水平有限，难免有不妥之处，敬请各位同行和读者予以指正.

编 者

2016 年 1 月

目　录

第1章 随机事件及其概率

【本章教学要求】

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系和运算.
2. 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典概型概率和几何概型的概率,掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式等.
3. 理解事件的独立性的概念,会利用事件独立性进行概率计算,理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

【本章教学重点及难点】

教学重点:事件的关系和运算,概率的性质,古典概型,条件概率,全概率公式和贝叶斯公式,事件的独立性.

教学难点:事件之间关系的确定,全概率公式和贝叶斯公式的应用.

一、本章知识网络图

- 随机事件及其概率
  - 随机事件
    - 随机试验
    - 随机事件的定义
    - 样本（基本事件）空间
    - 事件间的关系
    - 事件间的关系的运算律
  - 概率
    - 概率的公理化定义
    - 概率的性质
    - 概率的计算
      - 和事件的概率
      - 差事件的概率
      - 古典概型
      - 条件概率
      - 积事件的概率
      - 全概率公式
      - 贝叶斯公式
      - 伯努利概型

二、本章主要知识点

1. 随机试验、样本空间与随机事件（如表 1-1 所示）

表 1-1　随机试验、样本空间与随机事件

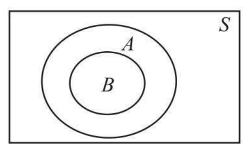
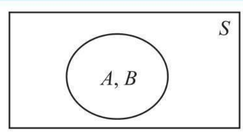
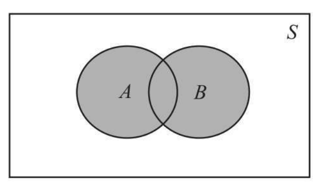
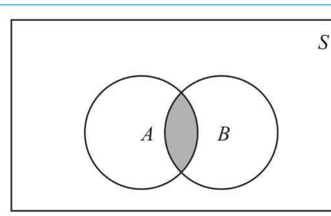
名　称	定　义	补充说明
随机试验	若试验具有以下特征：(1) 可以在相同条件下重复进行；(2) 每次试验的结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现则称为随机试验	1. 随机试验通常用 E 表示； 2. 随机试验必须满足定义中的三个特征
样本空间和样本点	随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S(或 Ω)； 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点，通常用 ω 来表示	1. 样本空间由样本点组成，所有的样本点形成的集合就是样本空间； 2. 样本点和样本空间的关系就像元素和集合的关系

续表

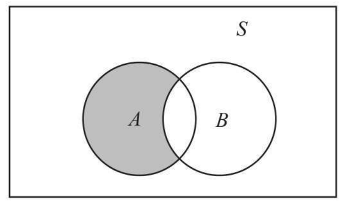
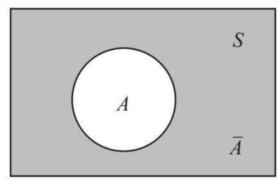
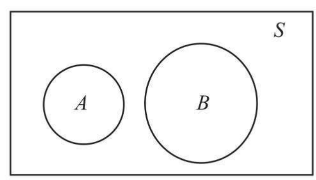
名　称	定　义	补充说明
随机事件	试验E的样本空间S的子集为E的随机事件，简称事件	(1) 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生；(2) 由一个样本点组成的单点集，称为基本事件
必然事件	每次试验中都必然发生的事件	样本空间S包含所有的样本点，它是S自身的子集，在每次试验中它总是发生的，S称为必然事件
不可能事件	在任何一次试验中都不可能发生的事件	空集$\varnothing$不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，$\varnothing$称为不可能事件

2. 事件间的关系(如表1-2所示)

表1-2　事件间的关系

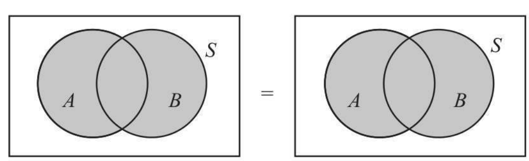
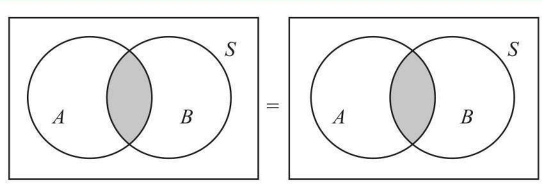
关　系	定义与表示	图　示
包含	若事件B发生导致事件A发生，则称事件A包含事件B，记作$A \supset B$或$B \subset A$	
相等	若$A \subset B$且$B \subset A$，称事件A和B相等，记作$A = B$	
和(并)	事件A与B至少有一个发生，记作$A+B$或$A \cup B$，类似的，称$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$为n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的和事件；称$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的和事件	 $A \cup B$　$(A+B)$
积(交)	事件A与B同时发生，记作$A \cap B$，也记作AB类似地，称$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$为n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的积事件；称$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的积事件	 $A \cap B$　(AB)

续表

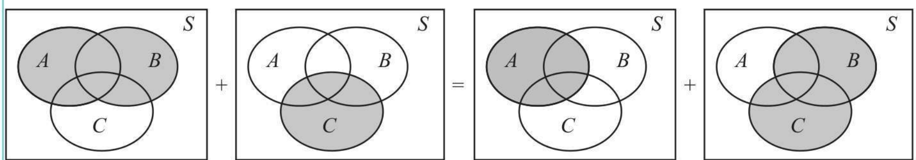
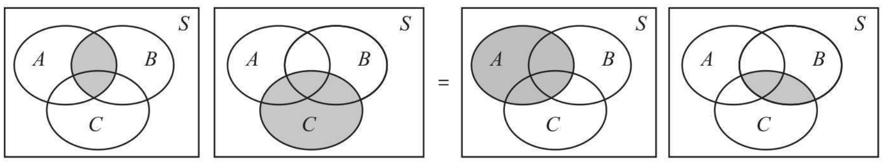
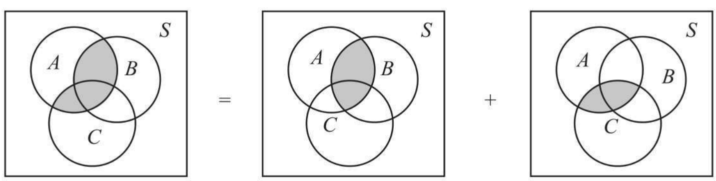
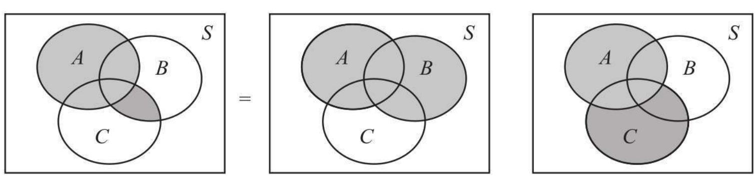
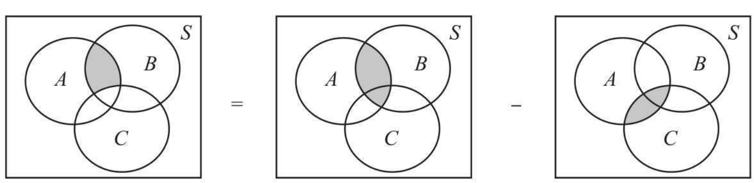
关　系	定义与表示	图　示
差	事件 A 发生而事件 B 不发生，记作 $A-B$，如图阴影部分为 $A-B$	 $A-B$
事件的逆（对立事件）	若 $A\cup B=S$ 且 $AB=\varnothing$，称 B 是 A 的逆事件，记作 $\overline{A}$	 $A\cup\overline{A}=S$
互斥（互不相容）	事件 A,B 不能同时发生，记作 $AB=\varnothing$	 $A\cap B=\varnothing$

3. 事件运算律（如表 1-3 所示）

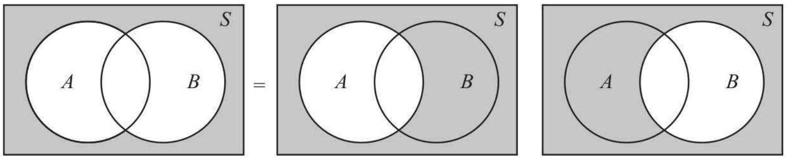
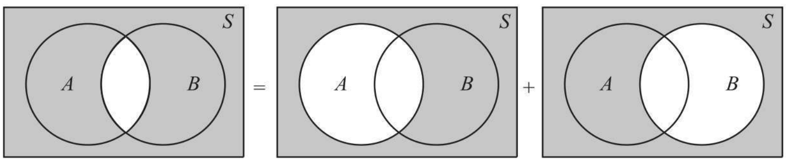
表 1-3　事件的运算律

运算律名称	表示式及图示	
交换律	$A+B=B+A$ 或 $A\cup B=B\cup A$	 $A+B=B+A$
	$AB=BA$ 或 $A\cap B=B\cap A$	 $AB=BA$

续表

<table>
<tr><th>运算律名称</th><th>表示式及图示</th></tr>
<tr><td rowspan="2">结合律</td><td>$(A+B)+C=A+(B+C)$
</td></tr>
<tr><td>$(AB)C=A(BC)$
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">分配律</td><td>$A(B+C)=AB+AC$
</td></tr>
<tr><td>$A+BC=(A+B)(A+C)$
</td></tr>
<tr><td>$A(B-C)=AB-AC$
</td></tr>
</table>

续表

运算律名称	表示式及图示
德摩根律	$\overline{A+B}=\bar{A}\,\bar{B}$  $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$ 

4. 重要的概率计算公式(如表 1-4 所示)

表 1-4　概率计算公式

名　称	公　式
对立事件的概率	$P(\bar{A})=1-P(A)$
差事件的概率	$P(A-B)=P(A)-P(AB)$
和事件的概率(加法公式)	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$ $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$
两两互斥的事件的和事件的概率	若 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 两两互斥，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$
相互独立的事件的和事件与积事件的概率	若 A,B 相互独立,则 $P(AB)=P(A)P(B)$； $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\bar{A}\,\bar{B})$； $=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=1-[1-P(A)][1-P(B)]$； 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $P(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i)=\prod\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$； $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=1-\prod\limits_{i=1}^{n}P(\bar{A}_i)=1-\prod\limits_{i=1}^{n}[1-P(A_i)]$
条件概率公式	$P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)},P(A)>0;P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)},P(B)>0$

续表

名称	公式	公式条件
乘法公式	$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=P(A_2)P(A_1\mid A_2)$ $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$	$(P(A_1)>0,P(A_2)>0)$ $(P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0)$
全概率公式	$P(B)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(B\mid A_i)P(A_i)$	$A_iA_j=\varnothing,i\neq j,\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=S$, $P(A_i)>0$
贝叶斯公式	$P(A_j\mid B)=\dfrac{P(B\mid A_j)P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(B\mid A_i)P(A_i)}$	$A_iA_j=\varnothing,i\neq j,\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=S$, $P(B)>0,P(A_i)>0$
二项概率公式	$P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$	$k=0,1,2,\cdots,n$

5. 常见的概率不等式(如表1-5所示)

表 1-5 常见的概率不等式

编号	结论
1	对任意事件A,有$0\leqslant P(A)\leqslant 1$
2	当$A\subseteq B$时,$P(A)\leqslant P(B)$
3	$P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$
4	$P(AB)\leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$
5	$P(A+B)\leqslant P(A)+P(B)$

6. 常见的概率模型(如表1-6所示)

表 1-6 常见的概率模型

概型	概率计算公式
古典概型	设样本空间S为一个有限集,且每个样本点的出现具有等可能性,则 $P(A)=\dfrac{A\text{包含的基本事件数}m}{\text{基本事件总数}n}$
几何概型	设S为欧氏空间中的一个有界区域,样本点的出现具有等可能性,则 $P(A)=\dfrac{A\text{的度量(长度、面积、体积)}}{S\text{的度量(长度、面积、体积)}}$
伯努利概型	(1) 一次试验中只有事件A发生和A不发生两种可能结果; (2) 各次试验是相互独立的; (3) 各次试验中事件A发生的概率都相同,即$P(A)=p\quad(0<p<1)$; 具有上述三个特点的n次随机试验称为伯努利概型. 在伯努利概型中事件A在n次试验中出现$k(0\leqslant k\leqslant n)$次的概率可用下述公式计算 $P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$

7. 事件的独立性的判定(如表 1-7 所示)

表 1-7 事件独立性定义及其结论

	内 容
两事件独立的定义	事件 A,B 独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$
A,B,C 相互独立	$P(AB)=P(A)P(B)$ 且 $P(BC)=P(B)P(C)$ 且 $P(AC)=P(A)P(C)$ 且 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$
结论 1	任意事件与不可能事件、必然事件相互独立
结论 2	任意两个事件如果有包含关系,而它们又不是不可能事件、必然事件,则它们必不独立
结论 3	当 $P(A)>0,P(B)>0$ 时,如果 A,B 互不相容,则 A 与 B 一定不独立; 如果 A 与 B 独立,则 A,B 一定不是互斥事件
结论 4	(1) 事件 A,B 独立 $\Leftrightarrow A,\bar{B}$ 独立 $\Leftrightarrow \bar{A},B$ 独立 $\Leftrightarrow \bar{A},\bar{B}$ 独立,此结论还可推广到多个事件相互独立的情形; (2) 若三事件 A,B,C 相互独立,则其中任意两个事件的和、差、积、逆与另一个事件或其对立事件是相互独立的
结论 5	若 $0<P(A)<1$,则事件 A,B 独立 $\Leftrightarrow P(B\mid A)=P(B\mid\bar{A})=P(B)$; 若 $0<P(B)<1$,则事件 A,B 独立 $\Leftrightarrow P(A\mid B)=P(A\mid\bar{B})=P(A)$
结论 6	设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$,则事件 A,B 独立的充要条件是 $P(A\mid B)+P(\bar{A}\mid\bar{B})=1$

三、疑难解析

问题 1 什么是统计规律性?什么是随机现象?

解析 在大量重复试验或观察中,若结果呈现出一定规律性,而这种规律可根据统计数据分析出来,称为统计规律性.

在一次试验或观察中结果不能预先确定而在大量重复试验中结果具有统计规律性的现象称为随机现象.随机现象是概率论与数理统计的主要研究对象.

问题 2 互逆事件与互斥事件的关系是什么?

解析 互逆必定互斥,互斥未必互逆.

如考试及格与不及格是互逆也是互斥的,但考试 70 分和 80 分互斥却不互逆.

区别互逆与互斥的关键是当样本空间只有两个事件时,两事件才可能互逆,而互斥适用于多个事件的情形,互斥事件的特征是在一次试验中两者都可以不发生,而互逆事

件必发生一个且至多发生一个.

问题 3　样本空间与必然事件之间有什么关系?

解析　样本空间是随机试验 E 的所有可能结果的集合,而必然事件是指随机试验中一定会出现的结果,虽然在一次试验中只有样本空间的一个元素发生,但在把样本空间视作一个整体时,我们说它在每次试验中都发生了,因此可以说样本空间是必然事件.

问题 4　在什么情况下,随机事件的频率可以作为它的概率的近似值?

解析　随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 指在多次重复试验中事件 A 发生的频繁程度. 当 n 增大时,频率在概率 $P(A)$ 附近摆动. 因此,每一个从独立重复试验中测得的频率,都可以作为概率 $P(A)$ 的近似值. 一般 n 越大,近似程度越好,事实上,当 n 增大时,频率大量集中于包含 $P(A)$ 的一个小区间. 任选区间中一值作为概率的近似值,称为统计概率. 在解题时,当 n 较大时,可取统计概率为 $P(A)=n_A/n$,其中 n_A 表示 n 次试验中 A 发生的次数.

问题 5　怎样理解古典概型的等可能假设?

解析　等可能性是古典概型的两大假设之一,有了这个假设,给直接计算概率带来了很大的方便. 但在事实上,所讨论的问题是否符合等可能假设,一般不是通过实际验证,而往往是根据人们长期形成的"对称性经验"做出判断的. 例如,骰子是正六面体,当质量均匀分布时,投掷一次,每面朝上的可能性都相等;再如,装在袋中的小球,颜色不同,只要大小和形状相同,摸出其中任意一个的可能性都相等. 因此,等可能假设不是人为的,而是人们根据对事物的认识 —— 对称性特征而确认的.

问题 6　如何理解条件概率?

解析　条件概率是在随机试验 E 在某一事件(如 A) 已经发生的条件下求另一事件(如 B) 发生的概率. 条件概率 $P(B|A)$ 与无条件概率 $P(B)$ 的区别就是在 E 的条件上增加了一个 A 已经发生的条件,而无条件概率没有增加任何条件.

可以证明条件概率也满足概率公理化定义中的三个条件,从而条件概率就具有概率的一切性质. 如

(1) 条件概率的加法公式

$$P(B_1+B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A);$$

(2) 对立事件的条件概率

$$P(\bar{B}|A)=1-P(B|A);$$

(3) 若在 A 发生的条件下,

$$P(B_1B_2|A)=P(B_1|A)P(B_2|AB_1);$$

(4) 若在 A 发生的条件下,B_1,B_2 相互独立,有

$$P(B_1B_2|A)=P(B_1|A)P(B_2|A)$$

等等.

问题 7　条件概率 $P(B|A)$与积事件概率 $P(AB)$ 有什么区别?

解析　$P(AB)$ 是在样本空间 S 内,事件 A 与 B 同时发生的概率,而条件概率 $P(B|A)$是在已知事件 A 发生后缩减的样本空间 S_A 中事件 B 发生的概率,两者是不同

的，当 $P(A)>0$ 时，有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$，仅当 $P(A)=P(S)=1$ 时两者相等.

问题 8　两事件 A,B 独立与两事件 A,B 互斥这两个概念有什么关系？

解析　这两个概念并无必然的联系. 两事件 A,B 独立，是指一个事件的发生不受另一事件发生与否的影响，若用概率表示，即

$$P(A)=P(A|B)\quad (P(B)=P(B|A))$$

成立，也即

$$P(A)=P(A|\overline{B})\quad (P(B)=P(B|\overline{A}))$$

成立.

两事件 A,B 互斥指的是 A,B 不能同时发生，即 A 发生，必然导致事件 B 不发生；事件 B 发生，必然导致 A 不发生，所以说互斥的两事件的发生是相互影响的. 一般说来，除了有一个事件的概率等于 0 或 1 的情形外，两个互斥事件是不独立的.

问题 9　什么是先验概率和后验概率？两者间有什么关系？

解析　先验概率是指根据以往经验和分析得到的概率，如全概率公式中的 $P(A_i)$，它往往作为"由因求果"问题中的"因"出现. 后验概率是指在得到"结果"的信息后重新修正的概率，如贝叶斯公式中的 $P(B)$，是"执果寻因"问题中的"因".

先验概率与后验概率不可分割，后验概率的计算要以先验概率为基础，如求 $P(A_i|B)$ 要先求 $P(B)$，而且一定要知道 $P(B|A_i)$.

问题 10　什么是小概率事件？它有什么实际意义？

解析　小概率事件是指一次试验中发生的概率很小的事件. 但从理论上讲，一个事件不论发生的概率多小，只要不断重复试验下去，事件迟早会发生.

例如，设随机试验中，某一事件 A 出现的概率 $P(A)=\varepsilon(\varepsilon>0)$，则 $P(\overline{A})=1-\varepsilon$. 如果不断独立地重复进行 n 次此试验，A 一次也没有出现的概率 $P(\overline{A}\cdots\overline{A})=(1-\varepsilon)^n$，于是在这 n 次试验中，A 至少出现一次的概率 $P_n=1-P(\overline{A}\cdots\overline{A})=1-(1-\varepsilon)^n\to 1(n\to\infty)$. 也就是说，在不断重复此试验时，$A$ 至少出现 1 次的概率为 1，无论 ε 多么小.

其实际意义是：我们可以借助它判断事件的真实性. 根据实际推断原理，小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的. 如果概率很小的事件，在一次试验中居然发生了，我们就有理由怀疑事件的真实性.

四、典型例题分析

【例 1】(随机事件间的关系和运算)

设 A,B 是两个随机事件，且 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，则 $A+B=$ ________，$AB=$ ________.

【分析】 由于 $A+B$ 与 $\overline{A+B}$ 互不相容，而 $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，说明 $A+B$ 与 $\overline{A}\,\overline{B}$ 互不相容，又因 $AB\subset A+B$，故 AB 与 $\overline{A}\,\overline{B}$ 互不相容，而 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，故 $AB=\varnothing$，因而 $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$，即 $\overline{A+B}=\varnothing$，从而 $A+B=S$.

【例 2】(随机事件间的关系和运算)

若以 A 表示事件"甲种产品畅销，乙种产品滞销"，则其对立事件 $\overline{A}$ 为(　　).