普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

（第2版）（上）

GAODENG SHUXUE

北京邮电大学数学系 编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育“十三五”规划教材

高 等 数 学

（第 2 版）（上）

北京邮电大学数学系 编

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内 容 提 要

本书根据高等数学课程教学基本要求，结合"将数学建模思想融入数学课程中"的基本思想及作者多年的教学实践编写而成。

本书在内容取材上兼顾与高中新课标数学课程的衔接，注重数学思想和方法，增加了 Mathematica 数学软件的介绍。在例题和习题中尽可能地反映数学建模的思想。本书分上、下两册，上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程，书末附有几种常见曲线、积分表、习题答案与提示等。

本书可作为高等院校理工科非数学专业的高等数学教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上 / 北京邮电大学数学系编. —2 版. —北京：北京邮电大学出版社，2017.9
ISBN 978-7-5635-5265-8

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①北…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 214380 号

书　　名: 高等数学(第 2 版)(上)
作　　者: 北京邮电大学数学系
责任编辑: 刘　佳
出版发行: 北京邮电大学出版社
社　　址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编: 100876)
发 行 部: 电话: 010-62282185　传真: 010-62283578
E-mail: publish@bupt.edu.cn
经　　销: 各地新华书店
印　　刷:
开　　本: 787 mm × 960 mm　1/16
印　　张: 19
字　　数: 411 千字
版　　次: 2012 年 7 月第 1 版　2017 年 9 月第 2 版　2017 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5265-8　　定　价: 42.00 元

前　　言

“高等数学”是高等工科院校最重要的基础课程之一，它最主要的任务除了使学生具备学习后续数学课程所需要的基本数学知识外，还有提高学生应用数学工具解决实际问题的能力。目前，北京市乃至全国各高校都在积极参与“将数学建模思想融入数学课程中”的课题研究，我们在此方面也做了大量的工作，学校给予了极大的支持。

由于高中新课标的实行，如何将“高等数学”教学和高中数学内容较好地衔接起来，也是各高校重点考虑的内容。基于以上考虑，我们编写的这套《高等数学》教材具有以下特点：

1. 注重数学建模思想，减少理论性太强的内容；
2. 结合高中内容，增加了极坐标等内容，减弱了导数、极限的简单计算；
3. 选配应用性的例题与习题，注重与后续课程的衔接；
4. 增加了“数学实验”内容，介绍数学软件的应用，使学生对函数的图像、近似计算等在直观上有初步了解，帮助理解一些概念和性质。

参加本书编写的有丁金扣（第一、二章）、马利文（第三、四、五章）、李鹤（第六、七章）、刘宝生（第八、九、十、十一章）。单文锐、李亚杰、鞠红杰、江彦等参与了全书内容编排与审阅。在本书的编写过程中，北京邮电大学数学系老师给予了无私帮助并提出了宝贵意见，北京邮电大学教务处也对本书的编写给予了大力支持，在此我们表示衷心的感谢。

编　者

目　　录

第一章　函数与极限

预 备 知 识

1. 常用的数学符号

(1)“$\exists$”表示“存在”;

(2)“$\forall$”表示“任意”;

(3)“$\in$”表示“属于”;

(4)“$\notin$”表示“不属于”;

(5)“$A\Rightarrow B$”表示“如果命题 A 成立,则命题 B 成立”,或称“A 是 B 的充分条件”;

(6)“$A\Leftarrow B$”表示“如果命题 B 成立,则命题 A 成立”,或称“A 是 B 的必要条件”;

(7)“$A\Leftrightarrow B$”表示“A 是 B 的充分必要条件”,或称“A 与 B 等价”;

(8) $\sum\limits_{i=1}^{n}u_i=u_1+u_2+\cdots+u_n$,即 n 个数 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$求和;

(9) $\prod\limits_{i=1}^{n}u_i=u_1u_2\cdots u_n$,即 n 个数 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$求积.

2. 区间和邻域

高等数学中常用的数集是区间.它包括以下几种:

(1) $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$, $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$;

(2) $[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$, $(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$;

(3) $[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$, $(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$;

(4) $(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$, $(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}$;

(5) $(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,x$ 为任意实数$\}$.

邻域也是集合的一种形式,数轴(x 轴)上点 x_0 的 $\delta(\delta>0)$邻域定义为 $U(x_0,\delta)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$;点 x_0 的 δ 去心邻域定义为$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$.其中,$x_0$ 称为邻域中心,δ 称为邻域半径,如图 1-1 所示.

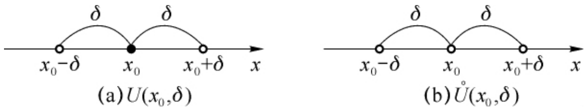


图 1-1

3. 常用的不等式

(1) 绝对值不等式：$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

(2) 三角不等式：$|a+b|\leqslant |a|+|b|$，$|a-b|\geqslant \big||a|-|b|\big|$；

(3) 平均值不等式：设 $a_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则有 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，当 $n=2$ 时，有 $\sqrt{a_1a_2}\leqslant \dfrac{a_1+a_2}{2}$；

(4) 柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwartz)不等式：对任意实数 a_i,b_i $(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant \sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2.$$

4. 极坐标表示

中学数学讲到了平面直角坐标系，在该坐标系中，平面上任意一点 P 可用直角坐标 (x,y) 唯一表示；反之，任一有序数对 (x,y) 可以唯一地确定平面上的一点，也就是平面上的一点可由两个参数唯一确定. 记点 P 到坐标原点的距离为 ρ，线段 OP 与 x 轴正向夹角为 θ，则有

$$\rho=|OP|=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\arctan\frac{y}{x}.$$

如图 1-2 所示，平面上点 P 与有序数组 (ρ,θ) $(\rho\geqslant 0,0\leqslant\theta<2\pi)$ 一一对应，称 (ρ,θ) 为点 P 的极坐标.

显然，$\rho=a$ 表示的是半径为 a 的圆：$x^2+y^2=a^2$；$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 表示以原点为始点的沿 y 轴正轴方向的射线. 直角坐标与极坐标之间的转换关系为

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta.\end{cases}$$

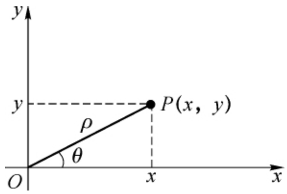


图 1-2

第一节 函数

一、函数的概念

定义 1 设 D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，按照一定法则 f 总有确定的

数值 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$；当 x 取遍数集 D 的每个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $R=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可以改用其他字母表示，如 φ,g,F 等. 这时，函数就相应地记为 $y=\varphi(x)$，$y=g(x)$，$y=F(x)$ 等.

在实际问题中，函数的定义域根据问题的实际意义而确定. 在数学研究中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地用算式表达函数. 这时约定：函数的定义域就是自变量所能取得的使算式有意义的一切实数。例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$；函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

如果自变量在定义域内任取一个数值时对应的函数值总是只有一个，这种函数称为单值函数，否则称为多值函数.

本书凡没有特别说明，本书中的函数总是指单值函数.

函数的表示方法主要有三种形式：解析法（用公式表示）、表格法、图形法. 图形法是表现函数特性最直观的方法，用直角坐标平面上的点集

$$\{P(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

表示函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的图形（见图 1-3）.

下面举例说明.

例 1　函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=[0,+\infty)$，图形如图 1-4 所示.

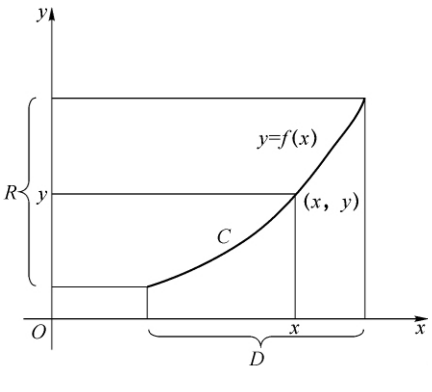


图 1-3

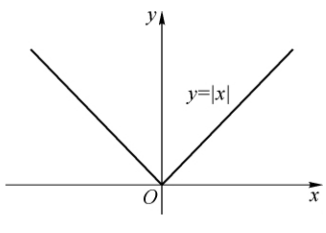


图 1-4

例 2 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

称为符号函数. 这种分区间表示的函数称为分段函数. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R=\{-1,0,1\}$,图形如图 1-5 所示. 对于任何实数 x,关系式 $x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$成立.

例 3 设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数记为$[x]$. 函数 $y=[x]$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R=\mathbf{Z}$ 为所有整数,图形如图 1-6 所示. 这个函数又称为取整函数.

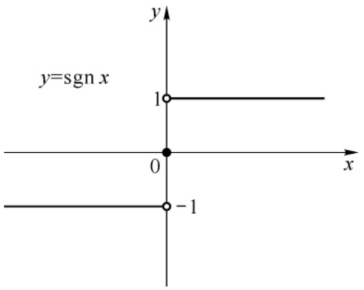


图 1-5

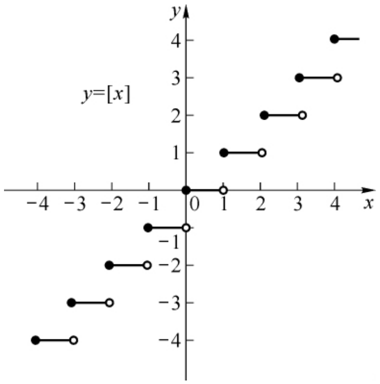


图 1-6

例 4 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,求 $f(x+\Delta x)-f(x)$.

解 $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

二、函数的初等性态

1. 奇偶性

设 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称. 如果

$$f(-x)=f(x),\quad \forall x\in D,$$

则称 $f(x)$为偶函数,函数图像关于 y 轴对称;如果

$$f(-x)=-f(x),\quad \forall x\in D,$$

则称 $f(x)$为奇函数,函数图像关于坐标原点中心对称.

例如,定义域为$(-\infty,+\infty)$的函数 $f(x)=\sin x$ 是奇函数,$g(x)=\cos x$ 是偶函数,而函数 $h(x)=\sin x+\cos x$ 既非奇函数又非偶函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在 $D=(-\infty,+\infty)$ 上有定义，若 $\exists T>0$，使得对 $\forall x\in D$ 有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 满足上述关系的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的最小正周期. 通常说的周期指最小正周期(如果存在).

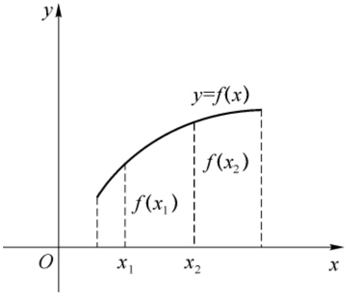
例如，函数 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$ 都是周期函数，2π、4π 等都是它们的周期，2π 是其最小正周期.

3. 单调性

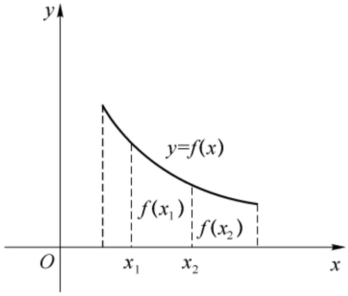
设 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增(或单调递减)；如果等号不成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调递增(或严格单调递减)，如图 1-7 所示. 单调递增的函数和单调递减的函数统称为单调函数.



(a) 严格单调递增函数



(b) 严格单调递减函数

图 1-7

例如，$f(x)=[x]$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，但不是严格单调递增；$y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上严格单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上严格单调递增. 此时，称 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上分段单调.

4. 有界性

设 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $A\subset D$. 如果 $\exists M>0$(M 为常数)，使得对 $\forall x\in A$，

$$|f(x)|\leqslant M$$

总成立，则称 $f(x)$ 在 A 上有界，或称 $f(x)$ 是 A 上的有界函数. 若对 $\forall M>0$，总 $\exists x_0\in A\subset D$，使得 $|f(x_0)|>M$，则称 $f(x)$ 在 A 上无界.

例如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为存在常数 $M=1$，使得对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $|f(x)|\leqslant 1$.

对某个函数 $f(x)$，定义域为 D，可能出现下面情况：它在子集 $A\subset D$ 上有界，而在另一子集 $B\subset D$ 上无界. 例如，$y=\dfrac{1}{x}$ 在定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上无界，但对 $\forall\delta>0$，它

在子集$(-\infty,-\delta]$和$[\delta,+\infty)$上有界.

设$f(x)$的定义域为D,$A\subset D$,如果存在常数M,使得对$\forall x\in A$,都有$f(x)\leqslant M$,则称$f(x)$在A上有上界M;若存在常数m,使得对$\forall x\in A$,都有$f(x)\geqslant m$,则称$f(x)$在A上有下界m.

函数$f(x)$在A上既有上界又有下界的充分必要条件是$f(x)$在A上有界.

三、函数的运算

函数之间的加、减、乘、除运算称为函数的四则运算,除此之外,还可以对函数进行复合运算、反函数运算,由此可以产生更多的函数.

1. 复合函数

定义2 设$y=f(u)$的定义域为D_f,值域为R_f;另一函数$u=\varphi(x)$的定义域为D_φ,值域为R_φ. 如果$R_\varphi\subset D_f$,对$\forall x\in D_\varphi$都有唯一的$u\in R_\varphi\subset D_f$,从而有唯一的$y\in R_f$与$u$相对应,因而对$\forall x\in D\varphi$,都有唯一的$y\in R_f$与之对应. 这样就定义了一个由$D_\varphi$到$R_f$的函数,记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

称此函数是由$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,u称为中间变量.

例5 设$f(x)=\sin x$,$\varphi(x)=\ln x$,求$f[\varphi(x)]$,$\varphi[f(x)]$.

解 (1)因为$D_f=(-\infty,+\infty)$,$R_\varphi=(-\infty,+\infty)$,满足函数复合的条件$R_\varphi\subset D_f$,所以复合函数为

$$f[\varphi(x)]=\sin\ln x,$$

定义域为$D_\varphi=(0,+\infty)$.

(2) 因为$D_\varphi=(0,+\infty)$,$R_f=[-1,1]$,不满足复合条件$R_f\subset D_\varphi$,但此时有$D_\varphi\cap R_f=(0,+\infty)\cap[-1,1]=(0,1]$,因此复合函数$\varphi[f(x)]=\ln\sin x$的定义域只能是开区间$(2n\pi,(2n+1)\pi)$($n=0,\pm1,\pm2,\cdots$).

注意 并非任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如,$f(u)=\arcsin u$与$u=x^2+2$不能复合成一个复合函数,因为$R_\varphi\cap D_f=\varnothing$.

求两个函数的复合函数称为函数的复合运算.

例6 设$f(x)=\begin{cases}x, & x>1,\\ \dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$,求复合函数$f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解 函数$f(x)$,$g(x)$符合函数复合条件,所以有

$$f[g(x)]=\begin{cases}g(x), & g(x)>1,\\ \dfrac{1}{g(x)}, & 0<g(x)\leqslant1,\end{cases}=\begin{cases}e^x, & x>0,\\ e^{-x}, & -\infty<x\leqslant0,\end{cases}$$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^x, & x>1,\\ e^{\frac{1}{x}}, & 0<x\leqslant1.\end{cases}$$

2. 反函数

设$f(x)$的定义域为D,值域为R,由$y=f(x)$所确定的x关于y的函数称为已知函数

$y=f(x)$（直接函数）的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$ 或 $x=\varphi(y)$.

反函数与直接函数的定义域与值域正好相反，即反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域为 R，值域为 D.

注意　这里"反函数"的"反"表示 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的对应法则相反. 从几何图形上看，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像在同一坐标系下为同一条曲线. 例如，$y=x$ 与其反函数 $x=y$ 的图像为同一条直线（Ⅰ，Ⅲ象限的角平分线）. x 表示自变量，y 表示因变量，所以经常把函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记作 $y=f^{-1}(x)$. 因此，直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在同一坐标系下的图像就不是同一条曲线了，它们关于直线 $y=x$ 对称（见图 1-8）.

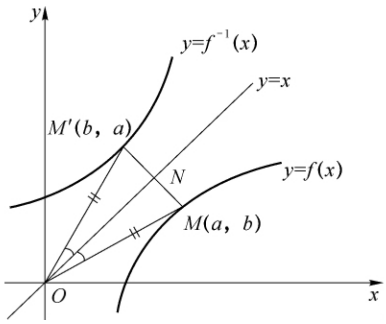


图 1-8

四、初等函数

1. 基本初等函数

在初等数学中，常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 它们分别是：

（1）常数函数 $y=C, D=(-\infty,+\infty)$；

（2）幂函数 $y=x^{\alpha}$，α 是常数，$D=(0,+\infty)$；

（3）指数函数 $y=a^{x}, a>0, a\neq 1, D=(-\infty,+\infty)$，（$a=\mathrm{e}$ 时，$y=\mathrm{e}^{x}$）；

（4）对数函数 $y=\log_a x, a>0, a\neq 1, D=(0,+\infty)$，（$a=\mathrm{e}$ 时，$y=\ln x$）；

（5）三角函数

正弦函数 $y=\sin x, D=(-\infty,+\infty)$，

余弦函数 $y=\cos x, D=(-\infty,+\infty)$，

正切函数 $y=\tan x, D=\left\{x\,\middle|\,x\in(-\infty,+\infty), x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right\}$，

余切函数 $y=\cot x, D=\{x\mid x\in(-\infty,+\infty), x\neq n\pi, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$，

正割函数 $y=\sec x, D=\left\{x\,\middle|\,x\in(-\infty,+\infty), x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right\}$，

余割函数 $y=\csc x, D=\{x\mid x\in(-\infty,+\infty), x\neq n\pi, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$；

（6）反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x, D=[-1,1]$，

反余弦函数 $y=\arccos x, D=[-1,1]$，

反正切函数 $y=\arctan x, D=(-\infty,+\infty)$，

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x, D=(-\infty,+\infty)$.