本书由云南省教育厅资助项目“几类特殊的丢番图方程的整数解研究”（2018JS608）、“丽江师范高等专科学校师资队伍建设经费（教学名师、中青年学术带头人）”资助出版。

从一到哥德巴赫猜想

From one to Goldbach conjecture

——整除性的典型问题与方法

——Typical problems and methods of divisibility

赵建红◎著

云南大学出版社
YUNNAN UNIVERSITY PRESS

赵建红，云南大理人，硕士，丽江师范高等专科学校副教授，云南省高等院校名师工作室访问学者，丽江师范高等专科学校教学名师、学术带头人、骨干教师，中国少数民族数学教育研究会会员，云南、贵州两省数学教育研究会常务理事，云南省中小学教学名师——穆勒滚名师工作室顾问，云南省教师资格认定考试面试官，多届丽江市教师教育教学技能竞赛评委。研究方向是数论和数学课程与教学论，主持完成云南省教育厅科研基金项目1项、云南省教育厅“十二五”规划课题1项、校级科研和教学质量工程项目3项；参与省厅级课题研究多项；出版著作《数学教学技能训练实证研究》等3部；在《西南大学学报》（自然科学版）等期刊上发表论文30多篇。先后获云南省数学教育研究一等奖，云南省高等教育研究二等奖，优秀教师、优秀共产党员、优秀班主任、教学质量优秀教师等称号，及教学成果奖、各种课堂教学竞赛一二三等奖若干。

ISBN 978-7-5482-3541-5
9 787548 235415 >
定价：78.00元

本书由云南省教育厅资助项目“几类特殊的丢番图方程的整数解研究”（2018JS608）、“丽江师范高等专科学校师资队伍建设经费（教学名师、中青年学术带头人）”资助出版。

从一到哥德巴赫猜想

From one to Goldbach conjecture

——整除性的典型问题与方法

——Typical problems and methods of divisibility

赵建红◎著

云南大学出版社
YUNNAN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

从一到哥德巴赫猜想：整除性的典型问题与方法 / 赵建红著. —— 昆明：云南大学出版社, 2018

ISBN 978-7-5482-3541-5

Ⅰ. ①从… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①数学-研究 Ⅳ. ①O1

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第215224号

策划编辑： 万 斌

责任编辑： 万 斌

封面设计： 王婳一

从一到哥德巴赫猜想

From one to Goldbach conjecture

——整除性的典型问题与方法

——Typical problems and methods of divisibility

赵建红◎著

出版发行： 云南大学出版社

印　　装： 廊坊市海涛印刷有限公司

开　　本： 787mm×1092mm 1/16

印　　张： 21.75

字　　数： 546千

版　　次： 2018年12月第1版

印　　次： 2018年12月第1次印刷

书　　号： ISBN 978-7-5482-3541-5

定　　价： 78.00元

社　　址： 昆明市一二一大街182号（云南大学东陆校区英华园内）

邮　　编： 650091

发行电话： 0871-65033244 65031071

网　　址： http://www.ynup.com

E-mail： market@ynup.com

若发现本书有印装质量问题，请与印厂联系调换，联系电话：0316-2507000。

序　一

数论是一门古老而又常新的学科，从数学史的角度看数论是经典的纯粹数学，从现代日益广泛的应用的角度看数论是新兴的应用数学。

初等数论以整除理论为基础研究整数和方程（组）的一些基本性质及相关整数解，展示由古至今数学中最典型、最基本的概念、思想、方法和技巧。

《从一到哥德巴赫猜想——整除性的典型问题与方法》的逻辑结构和行文是国内首创的，具有以下两个最基本的特点和优势：

第一，《从一到哥德巴赫猜想——整除性的典型问题与方法》从初等数论的基本概念到数论的经典运算——加减乘除入手，进而详细讨论整数的整除性，由整除性引出奇数偶数、素数、合数以及最大公因数和最小公倍数，并讨论了数的进位制，然后进一步过渡到算术基本定理，由此探讨了相关的几个典型问题——勾股数组、费马大定理和哥德巴赫猜想。

第二，全书行文口语化与数学化相结合，既重视初等数论这一数学分支的数学性，又注重读者的可读性。将生涩难懂的数学用一种平和的语言娓娓道来，通读全书有种让人既身处其中又不感其难的感觉。另一方面，从数学的角度来说，书中介绍了初等数论中整除性的很多典型问题，并从方法论的角度进行了相应的归纳，最后又介绍了作者对相关研究的最新成果，如 *One kind hybrid character sums and their upper bound estimates* 和 *Some symmetric identities involving Fubini polynomials and Euler numbers* 是发表在 SCI 期刊的两篇创新性较高的文章，还有其他一些发表在 EI 或国内数学类权威核心期刊的文章。这些都是作者长期从事数论，尤其是初等数论教学和研究工作的成果，是值得祝贺的，也是值得数学界同行参考学习的。

西北大学博士生导师、二级教授　张文鹏

2018 年 12 月

序　二

收到《从一到哥德巴赫猜想——整除性的典型问题与方法》的书稿，感到非常欣慰。2014 年，赵建红的处女作——《数学教学技能训练实证研究》也请我作了序，当时感觉他是一个“数学教育”的实践者。于是在后期的讨论中，我和他谈到了一个问题——数学与数学教育的关系，没想到才三年多时间，赵建红就能找到切入点并深入推进数论的研究。

通读《从一到哥德巴赫猜想——整除性的典型问题与方法》全书，发现一个很有意思的地方：用教学法将初等数论的核心内容进行了变革。具体来说，几乎所有的初等数论方面的教材或著作，都具有传统纯数学的基本特征——抽象性、严谨性。而这部著作却从阅读者的角度出发，用通俗易懂的语言来表述抽象的数学概念和讨论一些定理的证明，并以此来介绍数学中的方法论，从另一个角度来看初等数论。

那么是不是《从一到哥德巴赫猜想——整除性的典型问题与方法》就不够“数学”了？书中以初等数论中的一些典型问题来体现其数学本质，但数学类相关专业的大学师生亦可从中汲取知识和智慧。在最后一部分，以附录的形式将作者近期研究的典型成果展示给读者，其中有一些成果甚至是数学类专业的硕士、博士也要花费些时间和精力才能完全理解的。

简言之，这部著作的可读性非常强，不管你是中小学生或其他没有数学专业背景的读者，也不管你是数学专业背景下的大学生或更高层次的学者，都可以有选择地读一读、学一学这部著作中的另一角度的数学。

云南大学博士生导师、二级教授　李永昆

2018 年 12 月

目　　录

第 1 章　绪　论…………………………………………………………………（1）
1.1　数论是什么 ………………………………………………………………（3）
1.2　初等数论及其研究 ………………………………………………………（3）
1.2.1　初等数论的研究对象 …………………………………………………（3）
1.2.2　初等数论的研究内容 …………………………………………………（5）
1.2.3　初等数论的研究方法 …………………………………………………（6）
1.3　整数最基本的性质 ………………………………………………………（7）

第 2 章　整数的加减乘除运算……………………………………………………（9）
2.1　整数的加法及其运算……………………………………………………（11）
2.1.1　整数的加法运算规则…………………………………………………（11）
2.1.2　特殊的“0” …………………………………………………………（12）
2.1.3　整数的加法运算律……………………………………………………（12）
2.2　整数的减法及其运算……………………………………………………（15）
2.2.1　整数的减法运算规则…………………………………………………（16）
2.2.2　整数减法的方法论意义………………………………………………（16）
2.3　整数的乘法及其运算……………………………………………………（16）
2.3.1　整数的乘法运算规则…………………………………………………（17）
2.3.2　特殊的“1” …………………………………………………………（17）
2.3.3　整数的乘法运算律……………………………………………………（17）
2.3.4　整数的乘方……………………………………………………………（17）
2.4　整数的除法及其运算……………………………………………………（18）
2.4.1　整数除法的可能性……………………………………………………（19）
2.4.2　与零有关的除法运算…………………………………………………（19）
2.4.3　运算规则………………………………………………………………（19）
2.4.4　整数除法的方法论意义………………………………………………（19）
2.5　典型问题…………………………………………………………………（20）
2.5.1　典型例题………………………………………………………………（20）
2.5.2　典型练习题……………………………………………………………（21）

第 3 章　整除性 …………………………………………………………… (23)
3.1　整　除 …………………………………………………………… (25)
3.1.1　整　除 …………………………………………………………… (25)
3.1.2　整除的方法论意义 ……………………………………………… (26)
3.2　整除性 …………………………………………………………… (27)
3.2.1　整除性 …………………………………………………………… (27)
3.3　带余除法 ………………………………………………………… (29)
3.3.1　带余除法 ………………………………………………………… (30)
3.3.2　带余除法的方法论意义 ………………………………………… (31)
3.4　典型问题 ………………………………………………………… (32)
3.4.1　典型例题 ………………………………………………………… (32)
3.4.2　典型练习题 ……………………………………………………… (52)

第 4 章　奇数与偶数 ………………………………………………………… (55)
4.1　奇数偶数 ………………………………………………………… (57)
4.1.1　奇数偶数 ………………………………………………………… (57)
4.1.2　奇数偶数的方法论意义 ………………………………………… (59)
4.2　奇数偶数的加减乘除 …………………………………………… (62)
4.2.1　加减运算 ………………………………………………………… (62)
4.2.2　乘法运算 ………………………………………………………… (63)
4.2.3　除法运算 ………………………………………………………… (63)
4.3　“$3x+1$”问题 ………………………………………………… (64)
4.4　典型问题 ………………………………………………………… (65)
4.4.1　典型例题 ………………………………………………………… (65)
4.4.2　典型练习题 ……………………………………………………… (76)

第 5 章　素数与合数 ………………………………………………………… (79)
5.1　素数合数 ………………………………………………………… (81)
5.1.1　素数合数 ………………………………………………………… (81)
5.1.2　素数合数的方法论意义 ………………………………………… (82)
5.2　厄拉多塞筛法 …………………………………………………… (83)
5.2.1　找出素数 ………………………………………………………… (83)
5.2.2　厄拉多塞筛法 …………………………………………………… (85)
5.3　素数的分布 ……………………………………………………… (86)
5.4　关于素数的一些探索 …………………………………………… (87)
5.4.1　素数的个数 ……………………………………………………… (87)
5.4.2　素数的表达式 …………………………………………………… (88)
5.4.3　费马数 …………………………………………………………… (91)
5.4.4　梅森数 …………………………………………………………… (92)

5.4.5　孪生素数猜想……………………………………………………………（95）
5.4.6　哥德巴赫猜想……………………………………………………………（96）
5.5　典型问题………………………………………………………………（96）
5.5.1　典型例题………………………………………………………………（96）
5.5.2　典型练习题 ……………………………………………………………（104）

第 6 章　最大公因数………………………………………………………………（107）
6.1　公因数 …………………………………………………………………（109）
6.2　最大公因数 ……………………………………………………………（110）
6.2.1　最大公因数 ……………………………………………………………（110）
6.2.2　互　素 …………………………………………………………………（111）
6.3　欧几里得算法 …………………………………………………………（111）
6.3.1　欧几里得算法 …………………………………………………………（111）
6.3.2　欧几里得算法的方法论意义 …………………………………………（113）
6.4　裴蜀定理 ………………………………………………………………（114）
6.4.1　裴蜀定理 ………………………………………………………………（114）
6.4.2　相关推论 ………………………………………………………………（115）
6.5　典型问题 ………………………………………………………………（116）
6.5.1　典型例题 ………………………………………………………………（116）
6.5.2　典型练习题 ……………………………………………………………（138）

第 7 章　最小公倍数………………………………………………………………（143）
7.1　公倍数 …………………………………………………………………（145）
7.2　最小公倍数 ……………………………………………………………（145）
7.2.1　最小公倍数 ……………………………………………………………（145）
7.2.2　最小公倍数的几个性质 ………………………………………………（146）
7.3　最小公倍数的主要求法 ………………………………………………（152）
7.3.1　分解素因数法 …………………………………………………………（152）
7.3.2　提取公因数法 …………………………………………………………（152）
7.3.3　先求最大公因数法 ……………………………………………………（152）
7.4　典型问题 ………………………………………………………………（153）
7.4.1　典型例题 ………………………………………………………………（153）
7.4.2　典型练习题 ……………………………………………………………（159）

第 8 章　数的进位制………………………………………………………………（161）
8.1　计数及其原理 …………………………………………………………（163）
8.2　进位计数法 ……………………………………………………………（164）
8.2.1　十进位值制 ……………………………………………………………（164）
8.2.2　二进位值制 ……………………………………………………………（167）
8.2.3　五进位值制 ……………………………………………………………（170）

8.2.4 八进位值制 …………………………………………………………………… (171)
8.2.5 十六进位值制 …………………………………………………………………… (173)
8.2.6 六十进位值制 …………………………………………………………………… (174)
8.2.7 k 进位值制 …………………………………………………………………… (175)
8.3 典型问题 …………………………………………………………………… (176)
8.3.1 典型例题 …………………………………………………………………… (176)
8.3.2 典型练习题 …………………………………………………………………… (177)

第 9 章 算术基本定理…………………………………………………………………… (181)
9.1 因数分解 …………………………………………………………………… (183)
9.1.1 素数的整除性质 …………………………………………………………………… (183)
9.1.2 因数分解 …………………………………………………………………… (183)
9.2 算术基本定理 …………………………………………………………………… (184)
9.2.1 算术基本定理 …………………………………………………………………… (184)
9.2.2 标准分解式 …………………………………………………………………… (185)
9.3 典型问题 …………………………………………………………………… (186)
9.3.1 典型例题 …………………………………………………………………… (186)
9.3.2 典型练习题 …………………………………………………………………… (194)

第 10 章 勾股数组 …………………………………………………………………… (197)
10.1 平方数…………………………………………………………………… (200)
10.2 勾股定理…………………………………………………………………… (202)
10.3 勾股数组及其存在性…………………………………………………………………… (203)
10.4 勾股数组的个数…………………………………………………………………… (204)
10.5 本原勾股数组…………………………………………………………………… (205)

第 11 章 费马大定理 …………………………………………………………………… (211)
11.1 来 源…………………………………………………………………… (213)
11.2 费马大定理…………………………………………………………………… (213)
11.3 有关证明…………………………………………………………………… (214)
11.3.1 欧 拉…………………………………………………………………… (214)
11.3.2 热尔曼…………………………………………………………………… (214)
11.3.3 库默尔…………………………………………………………………… (215)
11.3.4 沃尔夫斯凯尔…………………………………………………………………… (215)
11.3.5 哥德尔…………………………………………………………………… (216)
11.3.6 谷村丰和志村五郎…………………………………………………………………… (216)
11.3.7 弗 雷…………………………………………………………………… (217)
11.3.8 怀尔斯…………………………………………………………………… (217)
11.3.9 其他突出贡献者…………………………………………………………………… (218)

第 12 章　哥德巴赫猜想 ……………………………………………………………（219）
12. 1　来　源……………………………………………………………………（221）
12. 2　谁来摘取“数学王冠上的明珠” ……………………………………………（222）

附件一　50000 以内的质数表 ………………………………………………………（223）

附件二　亲和数……………………………………………………………………（239）

附件三　相关研究论文………………………………………………………………（245）

第1章　绪　论

数学本身，也有无穷的美妙．认为数学枯燥无味，没有艺术性，这看法是不正确的．就像站在花园外面，说花园里枯燥乏味一样．只要你们踏进了大门，你们随时随地都会发现数学上也有许许多多趣味的东西．

——华罗庚

有史以来，人类就对自己赖以生存的环境进行探索，进而思考和探索大至宇宙空间，小到人类自我的奥秘，每个人如此自然地进行着，像一份天职：由于对未知世界的不确定，人类就会害怕，害怕就需要寄托，于是就寄托于加倍的探索．为了弄清楚这一过程，哲学产生了．基于哲学这一基础，人类开始了各种研究，最终走向艺术．

数学，就是其中一项具有特殊地位的研究．有学者认为在哲学之下，先有数学，随后出现的科学分为社会科学和自然科学．也有学者认为哲学之下，可分社会科学、数学、自然科学．如柏拉图就认为“数学是了解宇宙本身而不是它的表面现象的真正训练”．不管怎样划分，数学在人类认识世界的过程中的地位都是显而易见且不可撼动的．

这一章主要是对本书研究的范畴进行“剥洋葱”式的介绍：认识世界—哲学—数学—数论—初等数论—整数最基本的性质．

1.1　数论是什么

数学，可以粗略地分为纯粹数学和应用数学．我们无意对数学进行概念化阐述，但有一点是明确的——数学绝对不是课程中或教科书中所指的那种肤浅观察和寻常诠释，而应该具有更为丰富有趣的内涵．

图 1.1 是有人提出的一种有关纯粹数学和应用数学关系的观点．

数论（Number Theory），顾名思义，就是指有关数的理论．其中的“数”主要是“整数”，理论主要是整数的性质和不定方程（组）的整数解．从学科的角度说，数论是纯粹数学中研究整数性质的分支之一．

纯粹数学和应用数学就像是一座冰山——水面上的是应用数学，因为它有用，大家都看得见；水底下的是纯粹数学．

图 1.1

1.2　初等数论及其研究

按研究方法不同分类，数论可以分为初等数论和高等数论，如图 1.2 所示．简单地说，用整除、同余、连分数等初等方法研究的就是初等数论．用微积分、复分析等高等方法研究的就是高等数论，典型的高等数论主要有解析数论、代数数论、计算数论等．

$$\text{数论}\begin{cases}\text{初等数论：用整除、同余、连分数等初等方法进行研究}\\ \text{高等数论：用微积分、复分析等高等方法进行研究}\end{cases}$$

图 1.2

1.2.1　初等数论的研究对象

初等数论的研究对象诸如：

$$\cdots -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\cdots$$

这样的数，也就是整数．以 0 为界，整数又可以分为正整数、零和负整数，如图 1.3 所示．

$$\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ 0\\ \text{负整数}\end{cases}$$

图 1.3

所有整数的总体称为整数集，一般记作 Z，其中的正整数部分可以记作 Z^{+}、N^{*}、N_{+}，其中 N 指的是自然数集①．

事实上，整数是我们最先认识的，也是最熟悉的数．还是小孩子的时候，父母在家里就教会我们一个人有 2 只手，一只手有 5 个手指头，以及用 1，2，3，4，5……数数，甚至还有单数、双数等．在人类文明的起始阶段，整数往往只是为人们提供数据，事实上，当时的人们没有也不需要研究和应用整数的一些其他性质：比如 8 的因数个数是多少，97 是不是素数等．这些都不能引起人们的重视．毕竟，他们在对食物、货币等进行计数的时候整数性质都是无关紧要的．

直到后来，人们逐渐意识到基础数学和应用数学的区别，才逐渐开始研究整数的性质．直至今天，整数的性质都一直引领着数学研究的潮流．于是，在学校里我们开始学习素数、合数等．初等数论还将讨论这样一些有趣的数，比如：

奇数：1，3，5，7，9，11，13，15，…

偶数：2，4，6，8，10，12，14，16，…

素数：2，3，5，7，11，13，17，19，…

合数：4，6，8，9，10，12，14，15，…

三角数（如图 1.4）：1，3，6，10，15，21，28，36，…

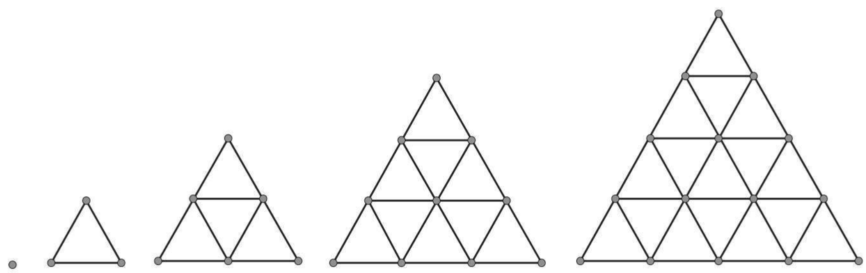

图 1.4

① 自然数集是否包含“0”的争议：有人认为按照“自然数是用以计量事物的件数或表示事物次序的数”及其出现顺序来说，自然数应为正整数，即“0”不属于自然数集．也有人认为自然数为非负整数，即“0”属于自然数集．到 21 世纪关于这个问题也尚无一致意见．在国外，有些国家的教科书是把“0”也算作自然数的．这本是一种人为的规定，我国为了推行国际标准化组织（ISO）制定的国际标准，早日和国际接轨，定义自然数集包含元素“0”．现行九年义务教育教科书和高级中学教科书等都把非负整数集叫作自然数集，明确指出“0”也是自然数集的一个元素．

平方数（也叫正方形数，如图 1.5）：1，4，9，16，25，36，49，64，…

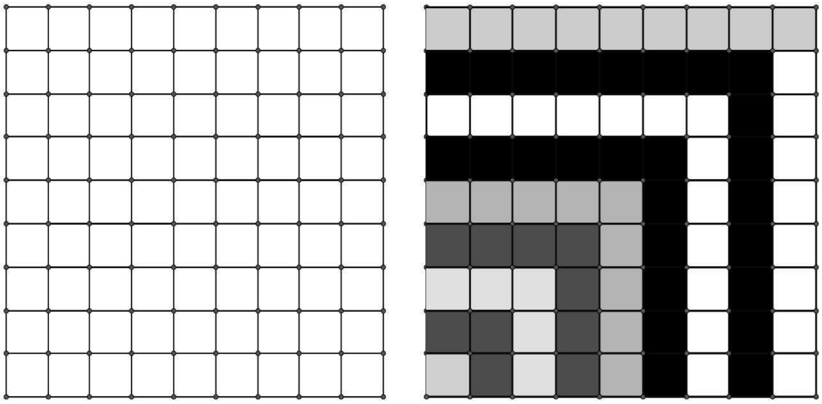

图 1.5

立方数（如表 1.1 所示）：1，8，27，64，125，216，343，512，…

表 1.1

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

完美数：6，28，496，8128，33550336，…

之所以称之为完美数，是因为 6 的因数有 1，2，3，而 $1+2+3=6$；28 的因数有 1，2，3，7，14 而 $1+2+3+7+14=28$……

你能把 496，8128，33550336 的因数全找出来吗？尝试着把这些因数全部相加，看看是不是相同的结论？

下一个完美数是多少呢？

1.2.2　初等数论的研究内容

初等数论主要研究整数最基本的性质，如整除性．

例 1.1　显然，2 整除 4，4 整除 12，而 2 也整除 12；3 整除 9，9 整除 18，而 3 也整除 18．其中是否有某种关系呢？比如是因为“2 整除 4，4 整除 12”，所以“2 整除 12”．这样的因果关系是否成立？如果成立，能否推而广之？比如对任意整数 a，b，c 都有：若 b 是 a 的倍数，c 是 b 的倍数，则 c 是 a 的倍数，也就是：

$$a \mid b, b \mid c \Rightarrow a \mid c$$

等等．事实上，这就是整除的传递性．

数论的中心内容是以算术基本定理和最大公约数理论为基础的整除理论，核心是同余理论．

例 1.2　我们知道 4，6，8，9，10，12 是合数，而：