

周 齐◎编著

# 九年数学 教与学参考

——青年数学教师教学素养提升教程  
(几何初步)



华东理工大学出版社  
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

**周 齐** 上海市数学特级教师



曾经担任初高中数学教师、区数学教研员  
上海市一期课改的初中数学新教材编写组成员  
上海市首轮试点学科初中数学中心教研组组长  
区教师专业发展研修班学科引领导师  
上海市教育考试院特聘数学学科专家组专家(2006~2010)  
多次参加上海市中考数学命题工作及担任命题组组长  
两次参加上海市中考数学命题审题工作  
三次担任上海市中考网上统一阅卷的数学阅卷中心组组长  
曾获上海市教育科研成果二等奖  
上海市优秀教研员论文评选二等奖  
上海市数学教育研究会论文评选二等奖  
上海市计算机教育研究会论文评选二等奖  
区第五届教科研成果一等奖  
全国部分中学数学期刊优秀论文  
上海市第五届教研员论文评选三等奖  
上海市第七届教科研成果三等奖  
全国数学教研会论文评选三等奖

周 齐◎编著

# 九年数学 教与学参考

——青年数学教师教学素养提升教程  
(几何初步)



华东理工大学出版社  
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

· 上海 ·

## 图书在版编目(CIP)数据

九年数学教与学参考:青年数学教师教学素养提升教程.几何初步 /  
周齐编著. —上海:华东理工大学出版社, 2017.11

ISBN 978-7-5628-5190-5

I. ①九… II. ①周… III. ①几何课-初中-师资培训-教材  
IV. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 234749 号

---

项目统筹 / 郭 艳

责任编辑 / 郭 艳

装帧设计 / 戚亮轩

出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司

地 址: 上海市梅陇路 130 号, 200237

电 话: 021-64250306

网 址: [www.ecustpress.cn](http://www.ecustpress.cn)

邮 箱: [zongbianban@ecustpress.cn](mailto:zongbianban@ecustpress.cn)

印 刷 / 常熟市华顺印刷有限公司

开 本 / 710 mm×1000 mm 1/16

印 张 / 15.75

字 数 / 280 千字

版 次 / 2017 年 11 月第 1 版

印 次 / 2017 年 11 月第 1 次

定 价 / 45.00 元

---

版权所有 侵权必究

# 序

本书积累了作者在几十年的工作经历中遇到的各种讨论和争论后的研究结果.有的是在做教师培训时教师提出的问题,有的是在考试阅卷时阅卷教师争论的问题,有的是在课堂教学中学生表现出的困惑,有的是在教研活动听课时发现的问题,有的是在课程教材改革过程中发现的问题,有的是教学方法的问题,还有对如何减轻学生题海训练量的思考.每当作者把一些研究思考的内容在各种培训、研讨、教学活动时阐述后,总能得到与会教师或学生的高度认可.他们常问:“老师,你讲的这些从哪里可以找到?”有的同行常称作者的讲解为“句号”.有的学生说:“我第一次听到这样好的课.”作者并不敢认为这些是多大的学问,但是产生了想法:这些问题以后还是会在其他地方或其他人中产生,趁自己脑子还清楚的时候把它们写下来,供青年教师参考,也可以给学生和家长使用.基于这样的想法,作者从2013年末开始系统撰写,陆续修改,历时3年半基本完成.

数学的基本特征是:(1)有应用的广泛性和描述的精确性;(2)有高度的抽象性和严密的逻辑性.

数学是科学和技术的语言和工具,数学的概念、公式和理论已经渗透在其他学科中,许多数学方法被写成软件,成为产品高科技含量的核心.另外,数学在经济学、系统科学、管理学中也占据重要的位置,通过数学建模和数学推演探求规律,数学成为研究的基本工具.

中小学数学教育最主要的目的之一在于提高学生的逻辑思维能力.小学教育中的数学学科的教学要重视初中数学教学内容中的本性知识的教学,不能碎片化.数学学科的本质是工具学科,数学教学需要重视数学的应用,但是相比物理、化学等应用型学科是有区别的,工具学科更注重工具的原理和科学性,如果基础数学只注意加强应用却忽视基本原理,那么就有可能造成教与学中有些问题得不到合理解释.数学基础教育不宜过分追求计算的熟练度,否则会加重学生的学业负担.

中小学数学教师在进入基础教育领域担任教学工作之后,有必要对初等数学作系统性的研究,这是教师在专业发展过程中十分重要但却往往被忽视的部分.

教师的学科素养是学科教师对自己所教学科拥有的知识、能力与思维模式;教师的教学素养是学科教师在教学过程中累积的经验、技能与技巧.在提升学科素养的基础上进一步提升教学素养,是青年教师走向成功的不可避免的课题.

基于此,在编写本丛书之前,还有必要讨论以下问题.

一、什么样的基础课教材是最好的?作者十分赞同以下观点:

1. 每套教材自身要尽量保持系统性,即尽量保证系统、有序、清晰、易懂.教材要以学生为中心,尽可能满足不同学习水平的学生,包括需要以跳跃式的方式学习的人.

2. 每套教材自身都要保证它的完整性.

3. 基础课教材一定要包含练习、测验以及答案.

二、什么样的基础课教学是最好的?

马卡连柯用两句话概括——尽可能多地要求学生,尽可能多地尊重学生.

学习始于模仿.在传授知识的过程和培养学生自主探索的过程中,传授知识与自主探索不应该是二律背反的互斥的两个过程,而应该是相辅相成的有机结合的一个过程,有思维价值的问题可以成为有机结合的纽带.在这个意义上说,叙述式、讲解式、示范式、启发式等教学方式的有机结合可以成为高效的教学方式.

三、什么样的教学有利于学生可持续的发展?

作者的感悟是:要用质疑引起思维、争论.思维基于经验之上,教学中如果完全没有设置思维障碍,学生的发展就会萎靡;如果问题过于困难,学生会不由自主地走上机械记忆的道路.高效的教学就是要在学生的不同起点上建立不同的“最近发展区”,促使每个学生的最佳发展.

在上述观点的前提下,作者编写了“九年数学教与学参考”,全套分为三册:《代数初步》(包含《代数基础》即《小学算术》)、《几何初步》和《综合题解析》.其中《小学算术》主要供家长参考,所以写得简洁.为顾全系统性并方便查阅,把《小学算术》作为代数基础放在《代数初步》的第一部分.《代数初步》和《几何初步》从源头开始详细推理,帮助读者知其然且知其所以然,并用例题形式帮助读者理解.《综合题解析》主要侧重于数学思想方法的具体运用,兼顾问题类型的归纳,帮助教师指导学生提高分析综合能力,提高解题水平.《代数初步》《几何初步》是根,《综合题解析》是叶,根深才能叶茂.

总之,本书的编写十分注意知识内容的顺序性、完整性,避免碎片化.本书努力在基础数学的本源性知识方面做些认知拓宽的补充与归纳,愿此书能对读者有所帮助.

本书如有疏漏和不当之处,欢迎批评指正.

# 前 言

平面几何是最古老的数学分支之一,其特点是具有图形的直观性和逻辑的严谨性,因此成为培养和考查一个人的逻辑思维能力、空间想象能力和推理论证能力的上好题材.

《几何原本》(欧几里得著,兰纪正、朱恩宽译,陕西科学技术出版社 2003 年 6 月第二版)的逻辑结构如下:

第 I 卷 给出了 23 个定义、5 个公设、5 个公理.其实欧几里得说的“公设”就是我们后来所说的“公理”,他的公理是关于量的计算和证明的公理.分别是:

公理 1: 等于同一个量的量相等(这里的“量”原文是“thing”).

公理 2: 等量加等量,其和仍相等.

公理 3: 等量减等量,其差仍相等.

公理 4: 彼此能重合的物体是相等的(包含了全等的情况).

公理 5: 整体大于部分.

他给出的 5 个公设也就是后来我们教科书中的公理.分别是:

公设 1: 任意一点到另外任意一点可以画直线.

公设 2: 一条有限线段可以继续延长.

公设 3: 以任意点为圆心及任意的距离可以画圆.

公设 4: 凡直角都彼此相等.

公设 5: 同平面内一条直线和另外两条直线相交,若在某一侧的两个内角和小于两个直角的和,则这两条直线经无限延长后在这一侧相交.

从欧几里得《几何原本》建立公理化体系以后,数学上各个分支都进行了公理化处理.1899 年希尔伯特在《几何基础》这本书里,给出五组二十条公理:

## 第一组 接合公理

$I_1$  通过任意给定的两点有一直线.

$I_2$  通过任意给定的两点至多有一直线.

$I_3$  每一直线上至少有两点;至少有三点不同在一直线上.

$I_4$  通过任意给定的不共线三点有一平面;每一平面上至少有一点.

$I_5$  至多有一平面通过任意给定的不共线三点.

$I_6$  若直线  $a$  的两点  $A, B$  在平面  $\alpha$  上,则  $a$  上所有点都在  $\alpha$  上.这时直线

$a$  称为在平面  $\alpha$  上,或平面  $\alpha$  通过或含有  $a$ .

I<sub>7</sub> 若两平面有一公共点,则至少还有一公共点.

I<sub>8</sub> 至少有四点不同在一平面上.

### 第二组 顺序公理

II<sub>1</sub> 若点  $B$  介于两点  $A, C$  之间,则  $A, B, C$  是一直线上的互异点,且  $B$  也介于  $C, A$  之间.

II<sub>2</sub> 对于任意两点  $A, B$ ,直线  $AB$  上至少有一点  $C$  存在,使  $B$  介于  $A, C$  之间.

II<sub>3</sub> 在共线三点中,一点介于其他两点间的情况不多于一次.

II<sub>4</sub> (帕须公理)设  $A, B, C$  是不共线的三点, $a$  是平面  $ABC$  上不通过  $A, B, C$  中任一点的一直线,则若  $a$  有一点介于  $A, B$  之间,那么它必还有一点介于  $A, C$  之间或介于  $B, C$  之间.

### 第三组 合同公理

III<sub>1</sub> 设  $A, B$  为一直线  $a$  上两点, $A'$  为同一或另一直线  $a'$  上的点,则在  $a'$  上点  $A'$  的给定一侧有且只有一点  $B'$  使线段  $AB$  合同于或等于线段  $A'B'$ ,即  $AB = A'B'$ .并且对于每一线段,要求  $AB = BA$ .

III<sub>2</sub> 设线段  $A'B' = AB, A''B'' = AB$ ,则也有  $A'B' = A''B''$ .

III<sub>3</sub> 设  $AB$  和  $BC$  是直线  $a$  上没有公共内点的两线段,而  $A'B'$  和  $B'C'$  是同一或另一直线  $a'$  上的两线段,也没有公共内点.如果这时有  $AB = A'B', BC = B'C'$ ,则也有  $AC = A'C'$ .

III<sub>4</sub> 在平面  $\alpha$  上给定  $\angle(h, k)$ ,在同一或另一平面  $\alpha'$  上给定直线  $a'$ ,而且在平面  $\alpha'$  上指定了关于直线  $a'$  的一侧.设  $h'$  是直线  $a'$  上以一点  $O'$  为原点的射线,那么在平面  $\alpha'$  上直线  $a'$  的指定一侧,有一条且只有一条以  $O'$  为原点的射线  $k'$  使  $\angle(h, k) = \angle(h', k')$ .每个角都要求与自身合同,即  $\angle(h, k) = \angle(k, h)$  以及  $\angle(h', k') = \angle(k', h')$ .即是说:每个角可以唯一地放在给定平面上给定射线的给定一侧.

III<sub>5</sub> 设  $A, B, C$  是不共线三点,而  $A', B', C'$  也是不共线三点,如果这时有  $AB = A'B', AC = A'C', \angle BAC = \angle B'A'C'$ ,那么也就有  $\angle ABC = \angle A'B'C', \angle ACB = \angle A'C'B'$ .

### 第四组 连续公理

IV<sub>1</sub> (阿基米德公理)设  $AB$  和  $CD$  是任二线段,那么在直线  $AB$  上存在着有限个点  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,排成这样: $A_1$  介于  $A$  和  $A_2$  之间, $A_2$  介于  $A_1$  和  $A_3$  之间,以下类推,并且线段  $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ ,都合同于线段  $CD$ ,而且  $B$  介于  $A$  和  $A_n$  之间.

IV<sub>2</sub> (康托公理)设在一直线  $a$  上有由线段组成的一个无穷序列  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ , 其中在后的每一线段都被包含在前一个内部, 并且任意给定一线段, 总有一足码  $n$  使线段  $A_nB_n$  比它小, 那么在直线  $a$  上存在一点  $X$  落在每个线段  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$  的内部.

### 第五组 平行公理

通过直线外一点至多可引一直线平行于该直线.

1899年D.希尔伯特在《几何基础》这本书里, 还给出证明一个公理对别的公理的独立性以及一个公理体系确实为完备的普遍原则. 为完善欧几里得几何公理系统、各公理组间的逻辑关系, 希尔伯特提出了几何公理体系的3个基本原则, 那就是公理体系须具有相容性、独立性和完备性.

(1) 相容性. 在公理系统中如果不能推导出两个互相矛盾的命题(即互为反命题的命题), 这个公理系统就称为相容的或无矛盾的, 也称和谐的. 一个公理体系如果有矛盾, 它在逻辑上就不正确, 更谈不上在现实中的应用, 这种公理体系就不能成为一种理论, 因此要求任何公理体系必须是相容的.

(2) 独立性. 公理体系的独立性是指该公理体系中的每条公理都有其存在的必要, 即每条公理都不是其余公理的推论. 否则, 将此条公理去掉不会影响该公理体系的结论. 所以独立性的问题就是在保留同样多的推论的前提下, 公理体系中公理个数最少的问题.

(3) 完备性. 公理体系的完备性就是该体系中有足够个数的公理, 并以之为依据可推导出该体系的全部结论.

后人评述, 公理化处理是一件伟大的事情, 也是一件极其艰难的事情.

公理化就是抽象化. 几何空间是叫作几何元素的“对象”或“物”的集合, 它们相互间的关系满足一定的公理要求. 这样, 所谓欧几里得空间可以看作满足欧几里得几何公理要求的元素的集合, 所谓罗巴切夫斯基空间可以看作满足罗巴切夫斯基几何公理要求的元素的集合.

作为初等教育课程的平面几何建立在怎样的公理体系下呢?

苏联十年制学校数学教材《几何》(安·尼·柯尔莫柯洛夫主编, 刘远图、余至甫等译, 人民教育出版社1978年7月第一版)的逻辑结构如下:

1. 列出不加定义的基本概念: 点、直线、平面、两点间的距离(除了这四个概念外, 其他所有的几何概念都给出定义).

2. 用基本概念给出其他几何概念的定义(如点的集合叫作几何图形等).

3. 给定公理(如两点间距离的性质、两点确定一直线等).

4. 以公理和定义为基础证明定理.

苏联十年制学校数学教材《几何》的初始阶段主要内容顺序如下:

几何的基本概念

度和数

图形的合同与位移:平行、旋转、轴对称

几何作图

等腰三角形的性质

两圆周相交

三角形全等的判定(在两圆周相交与图形的合同的基础上论证)

角平分线的性质

互逆命题和互逆定理

平行公理

方向、射线、方向之间的角

三角形的内角和

直线平行的判定

平行线等分线段定理

三角形的中位线

多边形(三角形、四边形、等)

此教材基本延续欧氏几何的精髓,定义、公理、定理、运算公式等成为这门学科的理论支撑。

在当前课程改革的,为解决几何教学入门难问题,不少教材采取了公理扩大化的做法:

1984年(课改以前)人民教育出版社统编教材中的公理:

- (1) 两点确定一条直线
- (2) 两点间线段最短
- (3) 过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行
- (4) 同位角相等,两直线平行
- (5) 边角边
- (6) 角边角
- (7) 矩形面积等于底乘以高

1993年(一期课改)上海教育出版社教材中的公理:

- (1) 两点确定一条直线
- (2) 两点间线段最短
- (3) 过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行
- (4) 两直线平行,同位角相等

2006年(二期课改)上海教育出版社教材中的公理:

- (1) 两点间线段最短

(2) 过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行

(3) 过一点有且只有一条直线与已知直线垂直

(4) 同位角相等, 两直线平行

(5) 两直线平行, 同位角相等

注意: 其中(3)、(4)、(5)是定理, 缺失了公理“两点确定一直线”。

在三角形全等的四条判定定理(ASA、AAS、SAS、SSS)和直角三角形全等判定(HL)中,

1983年《几何》第一册(人民教育出版社)处理为“2公理3定理”

2004年《义务教育课程标准实验教科书·数学》11月第一版八年级上册(人民教育出版社)处理为“4公理1定理”

2007年版九年义务教育课本《数学》(北京师范大学出版社)七年级下册处理为“3公理2定理”

2007年版九年义务教育课本《数学》(华东师范大学出版社)处理为“3公理2定理”

公理扩大化的代价是牺牲了公理体系的独立性, 如此随意地规定公理, 使得课堂教学中出现种种问题. 例如, 有的教材把三角形全等的判定定理全部作为公理, 有的教材用操作实验(按已知条件画一个三角形剪下, 与另一个同学剪下的三角形能重合, 就得出定理)替代定理证明, 这两种处理, 前者混淆了公理和定理, 造成公理之间可以互推, 违背了公理体系的独立性原则; 后者则停留在探索实验阶段, 根本没有进入论证几何.

这样的做法造成以后在勾股定理教学中, 有教师让学生画一个边长分别为3cm、4cm、5cm的三角形, 然后量得最大角为 $90^\circ$ , 于是得出勾股定理及其逆定理. 当本书作者提问这样教是否符合论证几何教学要求时, 教师的答复是: 教材里三角形全等判定定理就是用这样的方法得出的.

无独有偶, 在相似三角形判定定理的教学中, 有教师为了腾出更多课时进行题海训练, 在新授课的定理引进环节中, 对定理不予以证明, 只是指出: 与全等三角形判定定理类似, 相似三角形判定定理可对应地记忆, 即“三边对应相等则两三角形全等”对应“三边对应成比例则两三角形相似”; “两边对应相等且夹角相等则两三角形全等”对应“两边对应成比例且夹角相等则两三角形相似”; “两角及一边对应相等则两三角形全等”对应“两角相等则两三角形相似”; “两直角三角形的斜边直角边对应相等则全等”对应“两直角三角形的斜边直角边对应成比例则相似”, 然后就进入例题讲解和练习环节. 这样的教学或许能节约课时(如果课本上对定理有清晰的证明, 或许学生可以自己阅读), 如果教材内也不出现证明过程, 那么这些定理就被默认为公理了.

教材的随意性可能造成师生对知识形成过程的错误认识.公理规定的随意性破坏了几何论证的有序性.试想如果对上述定理都认定为“基本事实”而不证,是否在三角形全等判定之后甚至之前就可以进行相似三角形判定的教学?勾股定理可以在任意篇章内出现,定理与定理之间是否出现循环论证也无从查实,那么,几何论证的核心价值——逻辑何在?

在初等教育的平面几何课程中,公理扩大化造成混乱,不是个办法.从这一点上看,二十多年来,我们接触到的各种课改教材中,还属上海一期课改教材对公理的处理比较慎重,对三角形全等的判定和性质定理是全部证明的,但是这套教材也有不足之处:一是它也有一条扩大公理“两直线平行,同位角相等”;二是这套教材的几何分为三个阶段——直观几何(一至五年级)、实验几何(六至七年级)、论证几何(八至九年级),而论证几何的理论支撑有叠合公理(或处理为线段、角相等的定义)、教材规定的4条公理和各种定义、图形的三种运动:平移、旋转、翻折(以下简称图形运动).图形运动作为实验几何阶段教材,没有经过论证进入论证几何,因此有直观的成分,默认运动结果所得图形与原图形全等.

图形运动如果基于直观和实验,会出现与公理扩大化同样的问题.如果纳入论证几何,它的理论支撑又是什么?图形运动是几何变换,一种变换结果所得图形与原图形全等必须是合同变换,平面上保持任意两点距离不变的变换是合同变换.

丘成桐教授认为:“平面几何所提供的不单是漂亮而重要的几何定理,更重要的是它提供了在中学期间唯一的逻辑训练,是每一个年轻人所必需的知识.”“最近我惊讶地听说,很多数学教育家们坚持不教证明,原因是学生们不容易接受这种思考.”“明朝利玛窦与徐光启翻译了《几何原本》这本书,徐光启认为这本书的伟大之处在于一环扣一环,能够将数学的真理解释清楚,是了不起的著作.”“怎么样训练逻辑思维比学习中学其他学科更为重要的.”

本书作者认为论证几何本身提供了一个公理体系以及推理的方法,并且要求推理的规则是顺序性和严密性.对欧氏几何公理体系这一文化遗产的研究方向,从科学发展的角度看,需要我们研究的是如何保持甚至改进欧氏几何这颗人类文明史上钻石的璀璨,而不是牺牲这颗钻石的品质.我们应该在保持相容性、独立性、完备性的前提下着力于研究如何尽可能减少公理的数量而非任意增加.正如我们研究数学命题时,经常考虑在保持结论不变的情况下,能否减少条件,能否简化证法.这在数学研究中是常理.

我们不能从对应试教育的否定,走向对知识本身的否定.对许多相信直觉、力求大概的学生来说,数学严密的逻辑性、严谨的精准性,恰恰是非常宝贵、非常必要的思维训练.

教材改革不能等同于课堂教学方法的花样性.真正起作用的是教学的内容的选取,知识的融会贯通、合理的顺序及流畅性.科学的内容让学生学得逻辑推理的思想方法,这是可持续发展的土壤.断章取义的教学内容必然造成死记硬背的学习.数学教学的任务是“种花”而不是“切花”.课程改革的原则之一是在保证学科科学性的前提下,删繁就简.

基于以上考虑,本书的指导思想是:抓住平面几何的本质,把它的逻辑体系讲精,把平面几何的公理体系逻辑脉络理清,环环相扣,言之有理,言必有据.简明扼要地讲透,使学生们感受到欧氏几何内在的逻辑美,感受到推理证明的巨大力量.

下面的例子中,分别阐述了本书对教材内容的处理:

1. 本书尽力用最少的公理构筑初等教育的平面几何空间.

2. 本书认为对间接证法的回避直接导致任意扩大公理体系.在几何论证中,反证法、同一法等间接证法是几何论证中不可或缺的,是重要的数学思想方法,所以需要把间接证法作为重要的学习内容之一.

3. 本书赞同我们现在的教材中,对一些实数模型类的公理,采用定义的方法给出,在不影响科学性的前提下,更易于读者理解,如:

(1) 把原来对线段和角的大小比较的合同公理改为定义的形式.

现在的教材中的定义:

1) 叠合线段  $AB$  与线段  $CD$ ,先使点  $A$  与点  $C$  重合,如果点  $B$  落在  $C$ 、 $D$  之间,就说线段  $AB$  小于线段  $CD$ ,记作  $AB < CD$  或者说线段  $CD$  大于  $AB$ ,记作  $CD > AB$ .如果点  $B$  与点  $D$  重合,就说线段  $AB$  与线段  $CD$  相等,记作  $AB = CD$ .

2) 移动  $\angle AOB$ ,使它的顶点  $O$  及一条边  $OA$  分别与另一个角  $\angle DEF$  的顶点  $E$  及一条边  $DE$  重合, $OB$  和  $EF$  都落在叠合的边的同侧,如果边  $OB$  落在  $\angle DEF$  内,就说  $\angle AOB$  小于  $\angle DEF$ ,记作  $\angle AOB < \angle DEF$  或者说  $\angle DEF$  大于  $\angle AOB$ ,记作  $\angle DEF > \angle AOB$ .如果边  $OB$  与边  $EF$  重合,就说  $\angle AOB$  与  $\angle DEF$  相等,记作  $\angle AOB = \angle DEF$ .

(2) 把存在性也包含在平行公理中.

严格的公理体系中平行公理是“通过不在直线上的一点至多可以引一条直线与该直线平行”.它只保证了平行线的唯一性而不保证存在性,现在的教材叙述为“过直线外一点有且只有一条直线与该直线平行”,把存在性也包含在平行公理中.

4. 本书认为我们现在的教材中,把线段作为默认的概念,用线段的长来定义两点间的距离是有科学性问题的:①定义“连接两点的线段的长度叫作两点间的距离”;②在例题、练习题和考试题中,规定了线段的长度不能为零,两

点间距离可以为零.于是出现矛盾:①距离是长度,长度不能为零;②距离却可以为零.这个矛盾的根源在于用取值范围小的量(线段的长度不能为零)来定义取值范围大的量(两点间距离可以为零),其实是用于概念(线段的长)来定义母概念(两点间距离).基于这个原因,本书采用了苏联教材的结构:把两点间的距离作为基本概念,用两点距离来定义线段的长.

5. 平面几何是研究平面图形在运动、变化过程中的不变性质和不变量的科学.本书认为图形运动是建立在合同变换基础上的有科学依据的重要的数学思想方法,是足以作为推理依据的证明手段,合理结合运用欧几里得公理4(彼此能重合的物体是相等的)及反证法、同一法完全可以在初中学生理解力的范围内解决现在被扩大为公理的几个命题的证明,可以避免任意扩大公理体系.为了解决如何把原来实验几何中的三种图形运动纳入到论证几何的问题,本书采取提早定义向量,把向量作为证明平移、旋转运动符合“平面上保持任意两点距离不变的变换是合同变换”的基础,从而使图形运动纳入论证几何获得了理论支撑.由此,可以使平面几何成为在三条公理及由此推出的120条定理所构成的论证几何体系.

6. 本书认为对勾股定理这样具有“表达形式简单、记忆使用容易、证明难以提前”特点的知识,还是应该遵循知识产生的顺序性,给出严谨的证明,不宜删去部分证明过程后随意提前出现.如果提前出现,也必须事后补证.现在的一些教材中对这个问题的处理是提前出现,不完整证明,事后不补,这样既破坏定理证明的完整性又破坏教材内部结构的顺序,是不妥当的.

7. 传统的平面几何中,定义的多边形和圆都是点和线组成的封闭图形,所以在四边形之前的部分都是先对边长、周长、角进行计算.在四边形之后,定义了封闭图形的面积并论述了矩形面积公式,才进入图形面积计算.对矩形面积公式的导出也有不同的处理方式,即有的直接作为公理给出,有的作为定理证出.而现在几乎所有的教材中都不做任何交代.本书根据公理的三性原则,能证的就作定理.为避免繁琐,用“阅读”形式给出了证明过程的简述.

8. 应用性软件几何画板的出现并得到日益广泛的应用,使得古老的尺规作图的原理和思想方法有了重要的现代意义和使用价值.中学教材也应及时作出反应,把基本尺规作图作为学生应该掌握的一种技能来设计问题,使得基本尺规作图与几何知识建构具有紧密的联系.

草以绿贵,树以根贵,画以神贵,书以理贵.本书尽量把“树根”展现给读者.

# 目 录

## I 几何基础

<b>1 几何基础</b> .....	3
1.1 基本概念(不下定义的概念) .....	3
1.2 命题、公理、定义、定理 .....	4
1.3 逻辑推理 .....	7
1.4 几何证明 .....	12

## II 几何图形

<b>2 直线、线段、射线、角、平面向量(一)、图形的运动和三角形</b> .....	21
2.1 直线、线段、射线、角、平面向量(一)和图形的运动 .....	21
2.2 三角形 .....	38
2.3 等腰三角形 .....	43
2.4 全等三角形 .....	46
2.5 直角三角形 .....	52
2.6 一个三角形中的边角不等关系 .....	55
2.7 尺规作图 .....	56
<b>3 轨迹</b> .....	63
3.1 命题与逆命题 .....	63
3.2 点的基本轨迹 .....	70
3.3 交轨法作图 .....	71
<b>4 四边形</b> .....	74
4.1 平行四边形 .....	74
4.2 梯形 .....	84
4.3 四边形的复习与归纳 .....	90
<b>5 多边形的面积、勾股定理</b> .....	98
5.1 多边形的面积 .....	98
5.2 勾股定理 .....	102

---

---

<b>6</b>	<b>平面向量(二)</b> .....	109
<b>7</b>	<b>比例线段</b> .....	113
<b>8</b>	<b>相似形</b> .....	141
	8.1 全等三角形与相似三角形 .....	141
	8.2 相似三角形的基本图形 .....	146
	8.3 锐角三角比 .....	160
<b>9</b>	<b>圆</b> .....	183
	9.1 圆的基本性质 .....	183
	9.2 直线与圆 .....	197
	9.3 两圆位置关系 .....	211
	9.4 两圆公切线 .....	219
	9.5 正多边形与圆 .....	223
	9.6 圆的度量 .....	227



# I 几何基础