

小学数学基础理论

陈建 主编



江西高校出版社



图书在版编目(CIP)数据

小学数学基础理论 / 陈建主编. —南昌: 江西高校出版社, 2017.7

教师教育专业系列教材

ISBN 978 - 7 - 5493 - 5904 - 2

I. ①小… II. ①陈… III. ①小学数学课—教学理论—师资培训—教材 IV. ①G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 191012 号

出版发行	江西高校出版社
社 址	江西省南昌市洪都北大道 96 号
总编室电话	(0791) 88504319
销售电话	(0791) 88500223
网 址	www.juacp.com
印 刷	南昌市光华印刷有限责任公司
经 销	全国新华书店
开 本	787mm × 1092mm 1/16
印 张	11
字 数	175 千字
版 次	2017 年 7 月第 1 版 2017 年 7 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978 - 7 - 5493 - 5904 - 2
定 价	28.00 元

赣版权登字 - 07 - 2017 - 907

版权所有 侵权必究

图书若有印装问题,请随时向本社印制部(0791 - 88513257)退换

前言

小学阶段的数学课程是学生学习的重要基础,对其进一步学习和发 展是必不可 少的。随着新一轮基础教育课程改革的发 展,小学阶段的数学教育 质量越来越受到大家的关注,这必然对小学 数学教师的专业知识和能力提出了更高的要求。“小学 数学基础理论”是小学教育专业的一门必修课程,对培养合格的小学 数学教师非常重要。

正所谓“知其然,还要知其所以然”,很多问题看似简单,但不经过专业学习未必能够解决。比如,0 为什么不能做除数?为什么自然数 1 后面紧接着的自然数是 2? 1 为什么既不是质数也不是合数?为什么长方形的面积是长乘以宽?频率和概率有什么区别?很多这样的问题看着理所应当,其实这些简单的背后体现了数学的知识和思想方法。《小学 数学基础理论》不仅可以为我们解决很多这样看起来简单的数学问题,而且可以帮助我们进一步理解小学 数学,形成严谨的科研态度和端正的科学精神。通过这门课程的学习,学生能够更好地理解抽象的数学概念,也可以锻炼自己对数学公式的灵活运用能力。同时,在对一些基本的数学定理和推理进行证明的过程中,师范生的数学思维能力得以培养,变得更为敏锐和准确。

本书按照我国高等职业教育发展的需要,结合《小学教师专业标准(试行)》以及《小学教师资格考试标准(试行)》的要求,在继承前人

丰富的学术思想和研究成果的基础上进一步发展,以提高教师数学素养为基本目的,精选教材内容,构建符合逻辑的高等职业教育小学数学基础理论课程内容新体系。除系统地传授相关的数学基础理论之外,本教材还结合丰富的数学案例,帮助学生理解抽象的数学概念,并重视定理证明的思路和方法,为后面相关的数学课程打下良好和坚实的基础。

《小学数学基础理论》由四部分构成,即“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”。本书较全面地解析了小学数学的核心内容,这不仅有利于帮助师范生加强对小学数学课程与教材的认识,还可以指导师范生科学合理地设计与实施有效的小学数学教学。在小学教师职前培养中,通过对数学基本思想与方法的学习与思考,“透视”小学数学的本质,以便日后帮助小学生建构数学新知,从而激发小学生的学习兴趣,提高数学教学效果。此外,本书对于其他数学工作者和爱好者来说,也是非常有益的。

本书在编写过程中,参考了同类著作的有关研究成果,这些研究成果为本书的构想和编写提供了十分有力的帮助。Ω,向原作者表示真诚的感谢!本书在编写和出版过程中,江西高校出版社的编辑以及兄弟院校给予了大力支持,提出了许多宝贵的意见。Ω,我们特别向为本书编写和出版付出辛勤努力的一线教师及出版社编辑致以衷心的感谢。

尽管在编写的过程中注意吸收新的研究成果和教改经验,并多次集体讨论研究,但由于编者水平有限,书中难免有疏漏和错误之处。因此,敬请使用本书的教师和学生提出宝贵的意见,以便我们进行修正和完善。

编 者
2017 年 7 月

目 录

第一部分 数与代数

第一章 整数	002
第一节 整数的认识	002
第二节 整数的四则运算	006
第三节 整数应用题	015
第四节 整数的性质	022
拓展空间	029
第二章 分数	033
第一节 分数的认识	033
第二节 分数的四则运算	039
第三节 分数应用题	048
拓展空间	052
第三章 小数	053
第一节 小数的认识	053

第二节 小数的四则运算	057
第三节 百分数	072
第四节 比和比例	075
拓展空间	079

第四章 代数初步	081
第一节 式与方程	081
第二节 探索规律	088
拓展空间	093

第五章 量与计量	094
第一节 量的概念与计量	094
第二节 名数	098
拓展空间	102

第二部分 图形与几何

第六章 平面几何	105
第一节 平面几何的认识	105
第二节 平面几何的计算	113
拓展空间	118

第七章 立体几何	120
第一节 立体几何的认识	120
第二节 立体几何的计算	123
拓展空间	126

第三部分 统计与概率

第八章 统计初步	131
第一节 统计的认识	131
第二节 统计表与统计图	136
拓展空间	142
第九章 概率初步	145
第一节 概率的认识	145
第二节 随机现象	149
拓展空间	152

第四部分 综合与实践

第十章 综合与实践	155
第一节 综合	155
第二节 实践的形式	158
拓展空间	163
附表 10000 以内质数表	164
参考文献	168

第一部分 数与代数

“数与代数”是小学数学知识体系的基础,是深入学习其他内容的工具性知识。“数与代数”构成了小学阶段 60%的数学内容,其重要性不言而喻。

本部分共分为五章:整数、分数、小数、代数初步以及量与计量。其中整数一章包括整数的认识、整数的四则、整数应用题、整数的性质等内容;分数一章包括分数的认识、分数的四则、分数应用题等内容;小数一章包括小数的认识、小数的四则、百分数、比与比例等内容;代数初步包括式与方程、探索规律等内容;量与计量一章包括量的概念与计量以及名数等方面的知识。

第一章 整数



整数的概念是在人类的劳动中发展起来的,整数是数学最基本的研究对象,整数的基本理论是认识分数、小数的基础,它是小学数学学习的主要内容。本章主要讨论整数的认识、整数四则运算的定义、运算性质、运算法则等内容,都是小学数学教师必须掌握和研究的内容。

第一节 整数的认识

【学习目标】

- 1.了解自然数的产生,理解自然数的两重属性。
- 2.理解基数和序数理论。
- 3.理解应用位值原则记数的方法和十进制制,掌握十进制制数的读写方法。
- 4.掌握多位数的大小比较方法。

一、整数的概念

(一)自然数的产生

自然数是在人类的劳动中逐渐产生的。在人类社会发展的初期,人们用一个对一个人的方法进行计数。例如,计算天数,过一天就打一个绳结。



图 1-1-1 结绳计数/记事

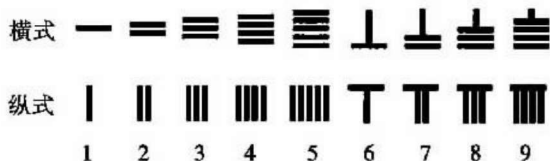


图 1-1-2 古代算筹计数的摆法

随着社会发展,人类发现数可用来数各种集合中的对象的个数,数和对象特有的性质无关。例如,数“五”是从所有包含五个物体的实际集合中抽象出来的。在中国古代,有种算筹计数法,这种方法以纵横两种排列方式来表示单位数目,其中1~5均分别以纵横方式排列相应数目,6~9则以上面的算筹再加下面相应的算筹来表示。以后,随着文字的发展,在用刻线表示数的基础上,逐渐创造了抽象的符号。例如,“|”“||”发展为“一”“二”等等。

(二) 基数和序数

自然数用来表示集合中元素的个数时,叫作基数。例如:“18 个学生”中的 18 是基数。

自然数用来表示某个有序集合中每个元素所占的位置时,叫作序数。例如:“小林站在第 3 排第 2 个”中的“3”“2”都是序数。

有时候自然数可以同时具有两重意义。例如,我们让一列学生从前面第一位开始报数,最后一位报出“九”,那么这个学生就是第九号。这里的“九”既可以表示这队学生有九个人,也可以表示最后一位学生是第九号。

(三) 自然数的理论

1. 自然数的基数理论

自然数的基数定义是建立在集合论的基础之上的。表示集合中元素个数的数叫作基数。有限集合的基数叫作自然数。

例如,集合{4,5,6}和集合{中国、印度、埃及}都具有相同的基数(元素个数相同),我们用自然数 3 表示这个基数。

2. 自然数的序数理论(皮亚诺公理)

满足下列五条公理的集合 N 叫作自然数集合, N 的元素就叫作自然数。

- (1) N 中至少有一个元素,记作 1,即 $1 \in N$;
- (2) 设 $a \in N$, a 的后继记作 a' ,则 a' 存在且唯一,即 $a=b$,则 $a'=b'$;
- (3) 1 不是任何元素的后继;
- (4) N 中的任何元素至多是一个元素的后继,即 $a'=b'$,则 $a=b$;
- (5) 若 $M \subseteq N$,且① $1 \in M$,②若 $a \in M$,有 $a' \in M$,则 $M=N$ 。

皮亚诺用公理方法从顺序的角度揭示了自然数的意义,按其最初的计法,自然数从 1

开始,不包含0。而我们现在公认自然数从0开始,因此在使用的时候需要把公理中的1换成0。从上述公理中,我们容易发现:1是构成自然数的单位,前一个数加1得到后一个数,即 $a+1=a'$ 。

(四) 整数

自然数又叫作整数。在小学里,整数的意义是通过自然数的意义进行表述。随着数系进一步扩大后,正整数、零和负整数统称整数。

二、十进制计数法

(一) 十进制计数法

在十进位制中,我们用0,1,2,3,...,9,这十个数字来记数。对于十以前的数,这十个数字是够用的。对于较大的数,例如“三百六十五”可表示为“365”。“365”的含义是:

$$365 = 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0。$$

这里3,6,5的意义依赖于每个数字所在的位置,不同的位置计数单位也不同。用这种方法,我们可以把任意一个正整数表示为:

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0。$$

在十进制中,数“10”是选出作为基底的,其实,任何大于1的正整数都可以用来做基底。例如,计算机常采用的二进制的基底为“2”,“101”的含义是:

$$101 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0。$$

对于十进制,我们规定,从右起第一位上的数字表示几个一,这一位叫作个位,第二位上的数字表示几个十,这一位叫作十位,以下依次是百位、千位、万位……用这种方法记数。每个数字除了它本身所表示的数值以外,还有位置值,这就是记数的位值原则。应用位值原则记数时,数字所占的位置:个位、十位、百位……统称为数位。

数位的排列顺序如下表:

表 1-1-1 数位顺序表

级名		亿级	万级	个级
数位名称	……	千百十亿 亿亿亿 位位位	千百十万 万万万 位位位	千百十个 位位位
计数单位	……	千百十 亿亿亿 亿亿亿	千百十 万万万 万万万	千百十一

有了这个数位顺序表,一切自然数都可以很方便地用数字写出来。

(二) 多位数的读法

根据十进制的计数法,可以得到如下的读数法:

1. 四位和四位以内的数,从最高位起,按照数位顺序一位一位读出来。

例如: 3 456 读作 三千四百五十六。

2. 四位以上的数,先从右向左四位分级,再从最高位起,顺次读出各级里的数和它们的级名。

例如: 345 678 读作 三十四万五千六百七十八;

35 744 252 425 读作 三百五十七亿四千四百二十五万二千四百二十五。

3. 一个数末尾的“0”和每一级末尾的“0”都不读出来;其他数位上有一个“0”或连续几个“0”,都只读一个“0”。

例如: 5 400 读作 五千百;

3 309 000 读作 三百三十万九千;

20 170 060 读作 二千零十七万零六十。

(三) 多位数的大小比较

(1) 位数多的数大,位数少的数小;

例如: $17\ 531 > 9\ 877$

(2) 位数相同,则从左起第一对相同数位上的不同数字进行比较,该数字大的数大。

例如: $A = 28\ 856$, $B = 28\ 567$, 它们都是五位数,但是

A 的百位是 8, B 的百位是 5

$\because 8 > 5$, $\therefore A > B$ 。

【学习思考】

七进制数的乘法口诀表如何编写?

【同步训练】



基础训练

1. 请举至少三个元素个数为“4”的集合。

2. 判断下面的数是基数的意义还是序数的意义?

(1) 一排树共 10 棵,从左数第 2 棵是柳树,再往后数 3 棵也是柳树。

(2) 一趟航班每天 9:30 从南昌出发,航班在起飞前 30 分钟停止办理登机手续。

(3) 2017 年时,小红 6 岁。再过 12 年,小红就满 18 岁了。

3. 写出下列各数。

(1) 江西辖境面积约为十七万平方公里。

(2) 地球赤道周长为四千零七万五千七百米。

(3) 某学校在校人数为六千零五十七人。

(4) 日地距离约为一亿四千九百五十九万七千八百七十千米。

4. 先说出下面的数是几位数,最高位是什么位,再读出来。

(1) 505 660, 300 000 601, 104 280 959 400。

(2) 42 756, 560 348 040, 23 236 220 200。

(3) 光(电磁波)在真空中的传播速度。2013 年公认值为 $C=299\ 792\ 458$ 米/秒。

(4) 滕王阁主体建筑净高 5 750 厘米,建筑面积 130 000 000 平方厘米。

(5) 中华人民共和国陆地面积约 960 万平方公里,内海和边海的水域面积约 470 多万平方千米。海域分布有大小岛屿 7 600 多个,其中台湾岛最大,面积 35 798 平方千米。



拓展训练

1. 用 3 个 6, 3 个 0 写出三个不同的六位数,一个零都不读的写法有哪些? 只读一个零的写法有哪些?

2. 有的儿童学写数时,会把二十三写成 203,这在知识上是由于什么原因造成的?

3. 把二进制 1 011 化成十进数。

4. 把十进数 29 化成二进制和七进数。

第二节 整数的四则运算

【学习目标】

1. 理解加法、减法、乘法和除法的定义。
2. 理解四则运算的运算性质,并能用以四则运算及其简便计算。
3. 掌握四则混合运算的顺序和括号的使用。
4. 掌握常用的估算的方法。

一、整数的加法和减法

(一) 整数的加法

1. 定义

求两个数的和的运算叫作加法,记作“ $a+b=c$ ”,读作“ a 加 b 等于 c ”。 a 与 b 都叫作加数,符号“+”叫作加号。

对于和的理解,我们可以从两个角度上看。一个是序数角度,如果数 a 与数 b 都是自然数,在自然数列中的数 a 之后再数出 b 个数来,恰好对应于自然数列中的数 c ,那么,数 c 叫作 a 与 b 的和。另一个是基数角度,设 A 、 B 是两个不相交的有限集合,它们的基数分别是 a 和 b ,如果集合 A 与 B 合并所得的并集是 C ,那么并集 C 的基数 c 就叫作 a 与 b

的和。我们可以用具体模型来理解。

$$\diamond\diamond\diamond\diamond+\diamond\diamond\diamond=\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond$$

图 1-2-1 加法

2. 加法的运算性质

(1) 加法交换律 $a+b=b+a$

两个加数相加,交换加数的位置,它们的和不变。

$$\diamond\diamond\diamond\diamond+\diamond\diamond\diamond=\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond=\diamond\diamond\diamond+\diamond\diamond\diamond\diamond$$

图 1-2-2 加法交换律

(2) 加法结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$

三个加数相加,先把前两个数相加,再加第三个数,或者先把后两个数相加,再加第一个数,它们的结果不变。

$$\begin{array}{c} \diamond\diamond\diamond\diamond \\ \diamond\diamond\diamond \end{array} + \diamond\diamond\diamond = \diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond = \diamond\diamond\diamond\diamond + \begin{array}{c} \diamond\diamond\diamond \\ \diamond\diamond \end{array}$$

图 1-2-3 加法结合律

推论一 若干个加数相加,任意交换加数的位置,或者先把其中任意几个加数作为一组加起来,再与其他加数相加,它们的和不变。

推论二 若干个数的和加若干个数的和,可以先把第一个和中的数分别加第二个和中的数,再把所得的和加起来。

$$\text{即: } \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)。$$

3. 加法的运算法则

相同数位对齐,从低位加起,哪一位上的数相加满十,就向前一位进一。例如:

$$\begin{aligned} 256+128 &= (2 \text{ 个百}+5 \text{ 个十}+6)+(1 \text{ 个百}+2 \text{ 个十}+8) \\ &= (2 \text{ 个百}+1 \text{ 个百})+(5 \text{ 个十}+2 \text{ 个十})+(6+8) \\ &= (2 \text{ 个百}+1 \text{ 个百})+(5 \text{ 个十}+2 \text{ 个十}+1 \text{ 个十})+4 \\ &= 3 \text{ 个百}+8 \text{ 个十}+4 \\ &= 384 \end{aligned}$$

为了简便书写,通常采用竖式计算。上例如下:

$$\begin{array}{r} 256 \\ + 128 \\ \hline 384 \end{array}$$

(二) 整数的减法

1. 定义

已知两个数 a 、 b , 求一个数 c , 使 c 与 b 的和等于 a , 这种运算叫作减法, 记作“ $a-b=c$ ”, 读作“ a 减 b 等于 c ”。 a 叫作被减数, b 叫作减数, c 叫作 a 与 b 的差, 符号“-”叫作减号。

由定义可以知道,加法和减法为互逆运算。减法可以看作已知和与一个加数求另一个加数。

$$\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond-\diamond\diamond\diamond=\diamond\diamond\diamond\diamond$$

图 1-2-4 减法

2. 减法的运算性质

$$(1) a-(b+c)=a-b-c$$

一个数减去两个数的和,等于从这个数中依次减去和里的每一个加数。

$$\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond-\begin{matrix} \diamond\diamond\diamond \\ \diamond\diamond \end{matrix}=\diamond\diamond=\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond-\diamond\diamond\diamond-\diamond\diamond$$

图 1-2-5 减法性质一

$$(2) a-(b-c)=a+c-b=a-b+c$$

一个数减去两个数的差,等于这个数先加上差里的减数,再减去差里的被减数,或者等于先减去差里的被减数,再加上差里的减数。

$$\diamond\diamond\diamond\diamond-(\diamond\diamond\diamond-\diamond\diamond)=\diamond\diamond\diamond=\diamond\diamond\diamond\diamond-\diamond\diamond\diamond+\diamond\diamond$$

图 1-2-6 减法性质二

推论 若干个数的和减去若干个数的和,等于第一个和中的各个加数,分别减去第二个和中不比它大的加数,再把所得的差加起来。

$$\text{即: } \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i), (a_i \geq b_i)。$$

3. 减法的运算法则

相同数位对齐,从低位减起,哪一位上的数不够减,就从它的前一位退一作十,和本位上的数合并在一起,再减。例如:

$$\begin{aligned} 256-128 &= (2 \text{ 个百}+5 \text{ 个十}+6)-(1 \text{ 个百}+2 \text{ 个十}+8) \\ &= (2 \text{ 个百}-1 \text{ 个百})+(4 \text{ 个十}-2 \text{ 个十})+(16-8) \\ &= 1 \text{ 个百}+2 \text{ 个十}+8 \\ &= 128 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ -128 \\ \hline 26 \end{array}$$

为了简便书写,通常采用竖式计算。上例如下:

二、整数的乘法和除法

(一) 整数的乘法

1. 定义

求两个数的积的运算叫作乘法,记作“ $a \times b = c$ 或 $a \cdot b = c$ ”,读作“ a 乘 b 等于 c ”。 a 与 b 都叫作积的因数,简称因数。符号“ $\times$ ”或“ $\cdot$ ”叫作乘号。 $a \times b$ 也可以简写成 ab 。

a 与 b 的积是指 b 个相同加数 a 的和。即： $a \times b = \underbrace{a+a+\cdots+a}_{b\text{个}a} = c$ 。由积的定义可以看出，乘法是一种连加运算。我们可以用具体模型来理解。

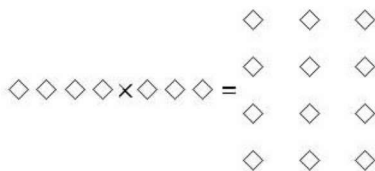


图 1-2-7 乘法

2. 乘法的运算性质

(1) 乘法交换律 $a \times b = b \times a$

两个数相乘，交换乘数的位置，乘积不变。

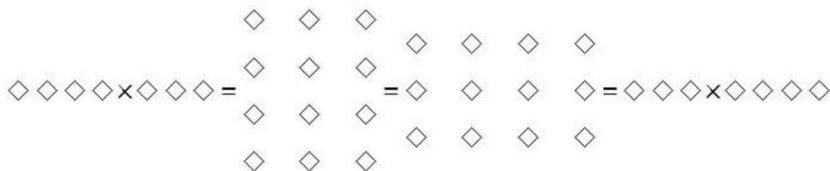


图 1-2-8 乘法交换律

(2) 乘法结合律 $(ab)c = a(bc)$

三个数相乘，先把前两个数相乘，再与第三个数相乘，或者先把后两个数相乘，再与第一个数相乘，它们的积不变。

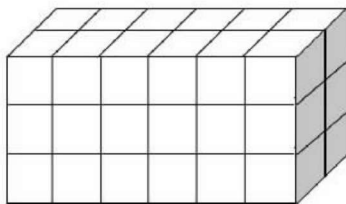


图 1-2-9 乘法结合律

(3) 乘法分配律 $(a+b)c = ac+bc$

两个数的和与一个数相乘的积，等于和里的每一个加数与这个数相乘，再把所得的积加起来。

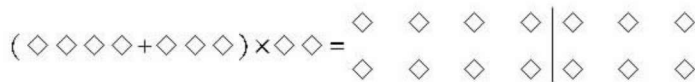


图 1-2-10 乘法分配律

乘法分配律还有一种形式：两个数的差与一个数相乘的积，等于被减数与减数分别与这个数相乘，再把所得的积相减。即 $(a-b)c = ac-bc$ 。

推论 若干个数的和与一个数相乘的积，等于和中的每一个加数分别与这个数相乘，再把所得的积加起来。

$$\text{即: } \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \times b = \sum_{i=1}^n (a_i \times b)。$$

3. 乘法的运算法则

先用一个因数每一位上的数分别去乘另一个因数各个数位上的数,用因数哪一位上的数去乘,乘得的数的末尾就对齐哪一位,然后把各次乘得的数加起来。例如:

$$\begin{aligned} 256 \times 128 &= 256 \times (100 + 20 + 8) \\ &= 256 \times 100 + 256 \times 20 + 256 \times 8 \\ &= 25600 + 5120 + 2048 \\ &= 32768 \end{aligned}$$

为了简便书写,通常采用竖式计算。上例如下:

$$\begin{array}{r} 2 \ 5 \ 6 \\ \times 1 \ 2 \ 8 \\ \hline 2 \ 0 \ 4 \ 8 \\ 5 \ 1 \ 2 \\ 2 \ 5 \ 6 \\ \hline 3 \ 2 \ 7 \ 6 \ 8 \end{array}$$

(二) 整数的除法

1. 定义

定义 1 已知两个数 a 、 b , 求一个数 q , 使 q 与 b 的积等于 a , 这种运算叫作除法, 记作“ $a \div b = c$ ”, 读作“ a 除以 b (或 b 除 a) 等于 q ”。 a 叫作被除数, b 叫作除数, q 叫作 a 与 b 的商, 符号“ $\div$ ”叫作除号。

由这个定义可以知道, 除法是乘法的逆运算。除法可以看作已知积与一个因数求另一个因数。

$$\begin{array}{c} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{array} \bigg| \begin{array}{c} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{array} \div \begin{array}{c} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{array} = \begin{array}{c} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{array}$$

图 1-2-11 除法

对于这个定义, 我们其实会发现两个问题: 除数是否可以为零? “ $27 \div 5$ ” 这样的不算整数除法吗?

我们先来解决第一个问题。如果除数 $b=0$, 那么

①当 $a \neq 0$ 时, 由于任何数乘 0 都不可能等于整数 a , 所以 $a \div 0$ 的商是不存在的;

②当 $a=0$ 时, 因为任何数乘 0 都是等于 0, 所以 $a \div b$ 的商是不确定的, 也就是结果不唯一, 这对于计算来说是不利的。

因此, 我们规定: 在除法运算中, 除数不能为零。