学在七中 乐在其中

乐学七中

高中数学必修 5

策划 许 勇 曹杨可 魏 华

主编 廖学军 祁祖海

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

乐学七中. 高中数学必修 5 / 廖学军，祁祖海主编.
—成都：电子科技大学出版社，2014. 3
ISBN 978-7-5647-1977-7

Ⅰ. ①乐… Ⅱ. ①廖…②祁… Ⅲ. ①中学数学课－高中－

教学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 242841 号

乐学七中. 高中数学必修 5

策划 许勇 曹杨可 魏华

主编 廖学军 祁祖海

出　　版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑：罗　雅
责任编辑：罗　雅
主　　页：www.uestcp.com.cn
电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：四川煤田地质印刷厂
成品尺寸：205mm×282　　印张 16.5　　字数 470 千字
版　　次：2014 年 3 月第一版
印　　次：2014 年 3 月第一次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-1977-7
定　　价：38.80 元

前 言

成都七中，作为一所百年名校，在校本教材的开发和利用上从未停止探索的步伐. 2013年四川省迎来首次新课程高考，内容要求和题型结构已初步成型. 经过三年一轮的教学实践，成都七中数学组对新课程高中数学教学进行了系统的反思和研究，形成了独特而完备的指导思想. 为了将这一集体智慧渗透到学校的常规教学中，七中数学组群策群力、全员参与，编写了教学辅导同步用书《乐学七中》. 该书既可以满足七中教育集团广大师生的日常教学需要，也可以作为兄弟学校师生了解成都七中课堂教学的一个窗口.

成都七中的数学教学一直坚持发挥学生的主体作用. 孔子有云：知之者不如好之者，好之者不如乐之者. “乐学”是七中教师对学生主体更加积极的期许状态，学生的这一状态并非一蹴而就，而是需要耐心引导的. 发现问题并解决问题所带来的成就感往往是学生“乐学”的内在动因，而数学教育中“怎样解题”则成为教师引导的关键所在. 为了构建和完善“怎样解题”的引导平台，教辅用书的选择和使用贯穿了整个高中数学教学过程.

为了提高教学工作的有效性，由成都七中名优教师牵头，依托学校丰富的教育教学资源，七中数学组教师共同编写了教辅同步用书《乐学七中》，以供学校师生使用. 该书有以下特点：

1. 章节排布与成都七中实际教学进度一致，为教师的课堂教学与作业布置带来了便利，增加了该书的可操作性.

2. 衔接内容和延拓专题一并刊出，弥补了教材内容与高考要求的脱节，为师生的教与学提供了必要的蓝本.

3. “课标要求”与“知识要点”言简意赅、点到为止，为教师讲解，学生冥思留下空间.

4. “典型例题”重视课本例题的使用和挖掘，源于教材，但不拘泥于教材. 为了保证课堂训练的针对性和有效性，强调一讲一练，所选题目既能体现知识的内涵和外延，也能兼顾方法的呈现和过手.

5. “备选例题”一方面可作为教师授课的后备题库，另一方面也为学有余力者的拓展训练抛砖引玉.

6. “小结与反思”为培养学生的归纳辩证思维而留白.

7. “练习”遵循“紧扣课堂、难度适中、梯度呈现”的原则.

基于此，《乐学七中》作为高中数学教学同步辅导用书，有其独特的优势和推广价值. 热忱欢迎兄弟学校师生参考或使用该书.

由于编写时间紧，该书难免存在一些不足，恳请广大师生批评指正，以便今后修订时更加完善.

编 者

2013年11月

目 录

第一章 解斜三角形

1.1　正弦定理和余弦定理

§1.1.1　正弦定理

一、课标要求

1. 掌握正弦定理的推导方法；

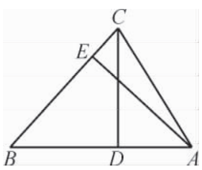
2. 理解熟记正弦定理；

3. 掌握正弦定理可以解决的两类基本问题.

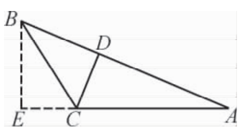
二、知识要点

1. 正弦定理的推导方法

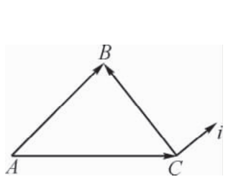
方法一：当△ABC 是锐角三角形时，$CD=a\sin B=b\sin A$，$AE=b\sin C=c\sin B$.



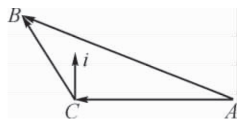
当△ABC 是钝角三角形时，$CD=a\sin B=b\sin A$，$BE=a\sin(\pi-C)=a\sin C=c\sin A$.



方法二：当△ABC 是锐角三角形时，作 $\boldsymbol{j}\perp\overrightarrow{CB}$，$|\boldsymbol{j}|=1$，$\because\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$，$\therefore\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}$，$\therefore|\overrightarrow{AC}|\cos(90^\circ-C)+|\overrightarrow{CB}|\cos 90^\circ=|\overrightarrow{AB}|\cos(90^\circ-B)$，$\therefore b\sin C=c\sin B$；

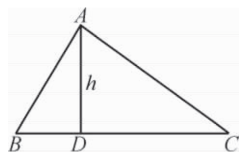


当△ABC 是钝角三角形时，$\boldsymbol{j}\perp\overrightarrow{AC}$，$|\boldsymbol{j}|=1$，$\therefore\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}$，$\therefore|\overrightarrow{AC}|\cos 90^\circ+|\overrightarrow{CB}|\cos(90^\circ-C)=|\overrightarrow{AB}|\cos(90^\circ-B)$，$\therefore a\sin C=c\sin A$.

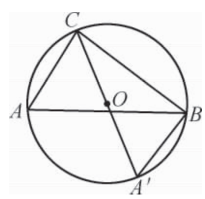


方法三：$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$，

同时除以 abc 得到$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.



方法四：$a=2R\sin A=2R\sin A$，$\therefore\frac{a}{\sin A}=2R$，即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.



2. 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

3. 正弦定理可以解决两类解三角形问题

(1)已知两角和任一边；

(2)已知两边和其中一边的对角.

三、典型例题

例1　在△ABC 中，角 A、B、C 对应三边分别为 a、b、c，$A=32^\circ$，$B=81.8^\circ$，$a=42.9\text{cm}$，解此三角形.

变式1 在$\triangle ABC$中，角A、B、C对应三边分别为a、b、c，已知$A=105^\circ$，$C=30^\circ$，$c=\sqrt{2}$，解此三角形.

例2 （教材P4 例2）在$\triangle ABC$中，角A、B、C对应三边分别为a、b、c，$a=20\text{cm}$，$b=28\text{cm}$，$A=40^\circ$，解此三角形.

变式2 (1)在$\triangle ABC$中，角A、B、C对应三边分别为a、b、c，$A=45^\circ$，$a=2$，$b=\sqrt{2}$求B.

(2)在$\triangle ABC$中，$A=60^\circ$，$a=4$，$b=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$求B.

例3 在$\triangle ABC$中，角A、B、C对应三边分别为a、b、c，$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$A=60^\circ$.

(1)求角C和边c；

(2)求外接圆半径R及三角形面积.

变式3 在$\triangle ABC$中，角A、B、C对应三边分别为a、b、c，若$a=2$，$C=\dfrac{\pi}{4}$，$\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，求$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$的面积.

四、备选例题

1. 在$\triangle ABC$中，角A、B、C对应三边分别为a、b、c，

(1)若$A=\dfrac{\pi}{3}$，$a=3$，则$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$______________.

(2)若$a+b=6+6\sqrt{3}$，$A=\dfrac{\pi}{6}$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，则边c的长为____________.

2. 已知$\triangle ABC$，角A、B、C对应三边分别为a、b、c，若$\dfrac{\cos B}{\cos A}=\dfrac{a}{b}$且$\dfrac{\cos B}{\cos C}=\dfrac{c}{b}$，试判断$\triangle ABC$的形状.

五、小结与反思

§1.1.2　余弦定理

一、课标要求

1. 掌握余弦定理的推导方法.

2. 熟记余弦定理的两种形式.

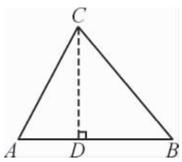
3. 掌握用余弦定理能解决的三类基本问题.

二、知识要点

1. 余弦定理的推导方法

方法一:(几何方法)

(1)当$\triangle ABC$为锐角三角形,如图所示,

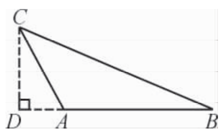


$CD=b\sin A$,$AD=b\cos A$,

Rt$\triangle CBD$中,$a^2=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2$,

整理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

(2)当$\triangle ABC$为钝角三角形,如图所示,



$CD=b\sin A$,$AD=-b\cos A$,

Rt$\triangle CBD$中,$a^2=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2$,

整理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

(3)当$\triangle ABC$为直角三角形,$\cos A=0$,根据勾股定理有

$a^2=b^2+c^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

方法二:(向量方法)

由于$|\overrightarrow{AB}|=c$,$|\overrightarrow{BC}|=a$,$|\overrightarrow{AC}|=b$,且$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$,

两边平方可以得到$\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}^2$,

根据向量内积性质,上式即为:$b^2+c^2-2bc\cos A=a^2$.得证.

2. 余弦定理

$\cos A=$________,$a^2=$________;

$\cos B=$________,$b^2=$________;

$\cos C=$________,$c^2=$________.

3. 余弦定理能解决的三类解三角形问题

(1)________________________________

(2)________________________________

(3)________________________________

三、典型例题

例1　在$\triangle ABC$中,$a=1+\sqrt{3}$,$c=2$,$B=\frac{\pi}{3}$,求边b和角C.

变式1　在$\triangle ABC$中,$a=1$,$b=\sqrt{3}$,$c=\sqrt{5}$,

(1)求$\cos C$;(2)判断$\triangle ABC$的形状.

例2　在$\triangle ABC$中,根据下列条件,求边c.

(1)$a=10$,$b=10\sqrt{3}$,$A=30°$;

(2)$A=45°$,$a=2$,$b=\sqrt{2}$;

(3)$A=60°$,$a=4$,$b=\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

变式2　已知$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$,$c=2$,$C=\frac{\pi}{3}$,求边a,b的值.

例3 在△ABC中,已知下列条件,求角C.

(1)$a^2+b^2-ab=c^2$;

(2)$c^2=a^2+b^2+\sqrt{3}ab$;

(3)$c^2=a^2+b^2-\sqrt{2}ab$.

变式 3 在△ABC中,$A=30°$,$b=\frac{\sqrt{3}}{2}c$.求角B和角C.

四、备选例题

例1 在△ABC中,$c^2+b^2-bc=a^2$,$\frac{c}{b}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$,求角$A$和$\tan B$.

例2 某人制作一个三角形.要求它的三条边上高的长度分别为$\frac{1}{13}$,$\frac{1}{11}$,$\frac{1}{5}$,则此人 ( )

A. 不能做出这样的三角形;

B. 能做出一个锐角三角形;

C. 能做出一个直角三角形;

D. 能做出一个钝角三角形.

五、小结与反思

____

____

____

____

____

§1.1.3 正弦定理与余弦定理在三角形中的初步应用

一、课标要求

1. 能利用正弦定理、余弦定理解三角形中有关度量与证明问题;

2. 能综合运用正、余弦定理,三角函数公式及三角形有关性质求解解三角形问题.

二、知识要点

1. 边角转化

①$\sin A=\frac{a}{2R}$,$\sin B=$________,$\sin C=$________;

②$a=2R\sin A$,________,________;

③$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$;

④$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,______________,______________.

2. 三角形面积公式

$S=\frac{1}{2}ab\sin C=$___________$=$___________.

3. 可利用余弦定理判断三角形形状

①A为钝角$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2<0$;

②A为锐角$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2>0$;

③A为直角$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=0$.

三、典型例题

例1 在△ABC中,$a=2b\cos C$,试判断三角形的形状.

变式 1　在$\triangle ABC$中，若$\frac{1-\cos A}{1-\cos B}=\frac{b}{a}$，试判断$\triangle ABC$的形状.

例2　在$\triangle ABC$中，$\cos B=-\frac{5}{13}$，$\cos C=\frac{4}{5}$.

(1)求$\sin A$的值；

(2)若$\triangle ABC$的面积为$\frac{33}{2}$，求BC的长.

变式 2　在$\triangle ABC$中，已知$\frac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\frac{2c-a}{b}$，

(1)求$\frac{\sin C}{\sin A}$的值，(2)若$\cos B=\frac{1}{4}$，$b=2$，求$S_{\triangle ABC}$.

例3　在$\triangle ABC$中，已知$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|=3|\overrightarrow{BC}|^2$，求角$A,B,C$.

变式 3　已知$\triangle ABC$，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且向量$\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},\cos(\pi-A)-1)$，$\boldsymbol{n}=(\cos(\frac{\pi}{2}-A),1)$，$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$.

(1)求角A；(2)若$a=2$，$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，求$b$的长.

四、备选例题

例1　在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$C=90^\circ$，角A,B,C的对边分别为a,b,c满足$a+b=cx$，求x的取值范围.

例2　如图，在正三角形ABC中，$AB=a$，O为其中心，过点O的直线交AB于点M，交AC于点N，求$\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}$的最大值和最小值.

五、小结与反思

1.2 应用举例

§1.2.1 测量距离、高度、角度(1)

一、课标要求

1. 能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些有关测量距离、高度、角度的实际问题；

2. 了解仰角、俯角、坡度等常用的测量相关术语.

二、知识要点

1. 测量从一个可到达点到一个不可到达点之间的距离；

2. 测量两个不可到达点间的距离问题；

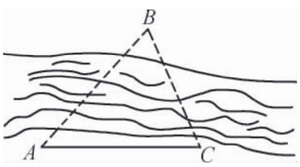
3. 测量底部不可到达的建筑物的高度问题；

4. 方位角是指从某正方向________转到目标方向的夹角；

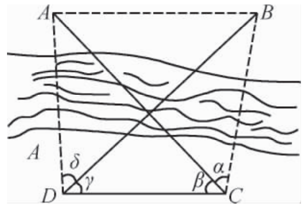
5. 视线在水平方向上方的角叫做________，视线在水平方向下的角叫俯角.

三、典型例题

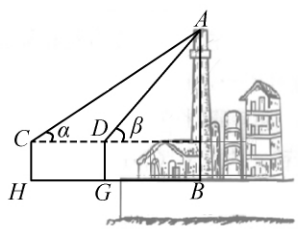
例1 （教材 $P11$ 例 1）设 A,B 两点在河的两岸，要测量两点间的距离，测量者在 A 的同侧，在 A 所在的河岸边选定一点 C，测出 AC 的距离是 55 m，$\angle BAC=51°$，$\angle ACB=75°$，求 A,B 两点间的距离.



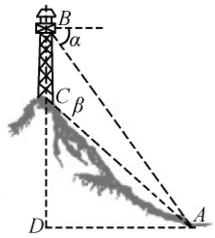
变式1 （教材 $P11$ 例 2）A,B 两点都在河的对岸（不可到达），设计一种测量 A,B 两点间的距离的方法.



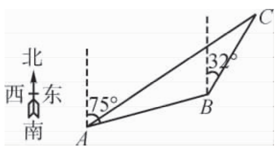
例2 （教材 $P13$ 例 3）AB 是底部 B 不可到达的一个建筑物，A 为建筑物的最高点，设计一种测量建筑物高度 AB 的方法.



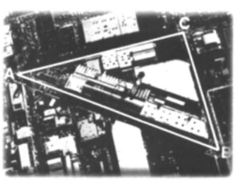
变式 2　(教材 $P13$ 例 4)如图,在山顶铁塔上 B 处测得地面上一点 A 的俯角 $\alpha=54°40'$,在塔底 C 处测得 A 处的俯角 $\beta=50°1'$。已知铁塔 BC 部分的高为 27.3 m,求出山高 CD(精确到 1 m).



例3　(教材 $P15$ 例 6)如图,一艘海轮从 A 出发,沿北偏东 75°的方向航行 67.5 n mile 后到达海岛 B,然后从 B 出发,沿北偏东 32°的方向航行 54.0 n mile 后达到海岛 C.如果下次航行直接从 A 出发到达 C,此船应该沿怎样的方向航行,需要航行多少距离?(角度精确到 0.1°,距离精确到 0.01n mile)



变式 3　(教材 $P17$ 例 8)某市在进行城市环境建设中,要把一个三角形的区域改造成市内公园.经过测量得到这个三角形区域的三条边长分别为 68m,88m,127m,这个区域的面积是多少?

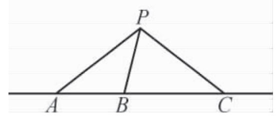


四、备选例题

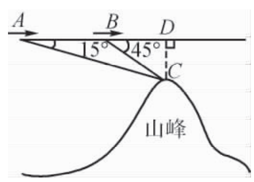
例1　如下图,在一海防警戒线上的点 A,B,C 处各有一个水声监测点,B,C 两点到点 A 的距离分别是 20 km 和 50 km,某时刻,B 受到发自静止目标 P 的一个声波信号,8 s 后,A,C 同时接受到该声波信号.已知声波在水中的传播速度是 1.5 km/s.

(1)设 A 到 P 的距离为 x km,用 x 表示 B,C 到 P 的距离,并求 x 的值;

(2)求 P 到海防警戒线 AC 的距离.



例2　如图,航空测量组的飞机航线和山顶在同一铅直平面内,已知飞机的高度为海拔 10 000 m,速度为 180 km/h,飞机先看到山顶的俯角为 15°,经过 420 s 后,又看到山顶的俯角为 45°.求山顶的海拔.(精确到 m,$\sqrt{3}\approx 1.732$)



五、小结与反思

§1.2.1　测量距离、高度、角度(2)

一、课标要求

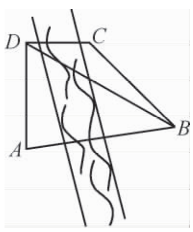
1. 掌握正弦定理,余弦定理在实际问题中的应用.
2. 能够从实际中抽离出数学问题,从而建立数学模型.

二、知识要点

解决此类实际问题的步骤:
1. 理解题意,分清已知和所求;
2. 画出图形;
3. 建立模型,确定运算路径;
4. 解三角形,给出答案.

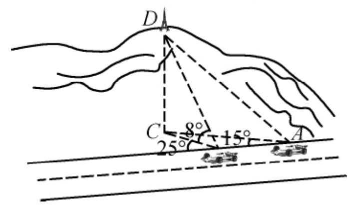
三、典型例题

例1　如下图所示,为了计算锦江岸边两景点 B 和 C 的距离,由于地形的限制,需要在对岸上选取 A 和 D 两个测量点. 观测得 $AD\perp CD$, $AD=10$ km, $AB=14$ km, $\angle BDA=60^\circ$, $\angle BCD=135^\circ$. 求两景点 B 与 C 的距离(假设 A,B,C,D 在同一平面内).

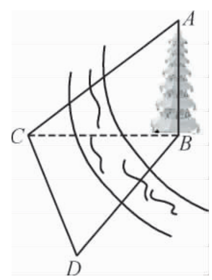


变式1　某人在汽车站 M 处北偏西 20° 的方向上的 A 处,观察到 C 处有一辆汽车沿公路向 M 站行驶,公路的走向是 M 站的北偏东 40°. 开始时,汽车到 A 的距离为 31 km. 汽车前进 20 km 后到 A 的距离缩短了 10 km. 问汽车还需行驶多远,才能到达 M 汽车站?

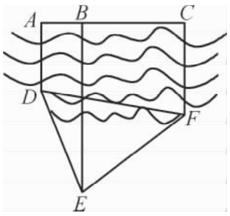
例2　(教材 $P14$ 例题 5)如图所示,一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶,到 A 处时测得公路北侧远处一山顶 D 在西偏北 15° 的方向上,行驶 5 km 后到达 B 处,测得此山顶在西偏北 25° 的方向上,仰角为 8°,求此山的高 CD(精确到 1 m).



变式2　如下图,测量河对岸的塔高 AB 时,可以选与塔底 B 在同一水平面内的两个测点 C 和 D,观测得 $\angle BCD=\alpha$, $\angle BDC=\beta$, $CD=s$. 并在点 C 测得塔顶 A 的仰角为 θ,求塔高 AB.



例3　如图，为了解某海域海底构造，在海平面内一条直线上的 A,B,C 三点进行测量，已知 $AB=50$ m，$BC=120$ m，在 A 处测得水深 $AD=80$ m，在 B 处测得水深 $BE=200$ m，在 C 处测得水深 $CF=110$ m. 求 $\angle DEF$ 的余弦值.

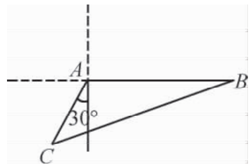


变式 3　设 A,B 是两个底部不能达到的建筑物的尖顶，设计测量两者距离的方法.

四、备选例题

例1　设计一种借助于两个观测点 C,D(已知 C,D 的距离是 d)，测量航船 A 的航向与速度的方法.

例2　如图，当甲船位于 A 处时获悉，在其正东方向相聚 20 海里的 B 处有一艘渔船遇险等待营救. 甲船立即前往救援，同时把消息告知在甲船的南偏西 $30°$，相距 10 海里的 C 处的乙船. 试问，乙船应朝北偏东多少度的方向沿直线前往 B 处救援？(角度精确到 $1°$)



五、小结与反思

§1.2.2　三角形中的计算与证明(1)

一、课标要求

1. 掌握三角形面积公式及其简单应用.

2. 会利用正余弦定理证明三角形中的边角之间的等量关系.

3. 会利用正余弦定理判定一定条件下的三角形形状.

二、知识梳理

1. 正弦定理和余弦定理：

(1)正弦定理：在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等.

正弦定理：________ $=$ ________ $=$ ________ $=2R$，其中 R 是三角形外接圆的半径. 由正弦定理可以变形为：

①$a:b:c=$________；②$a=$________，$b=$________，$c=$________；③ $\sin A=$________，$\sin B=$________，$\sin C=$________等形式，以解决不同的三角形问题.

形式一：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$(2$R$ 为△ABC 外接圆的直径)；

形式二：$\sin A=\frac{a}{2R}$；$\sin B=\frac{b}{2R}$；$\sin C=\frac{c}{2R}$；(角到边的转换)；

形式三：$a=2R\cdot\sin A$，$b=2R\cdot\sin B$，$c=2R\cdot\sin C$；(边到角的转换)；

形式四：$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$；(求三角形的面积).

(2)余弦定理：$a^2=$__________，$b^2=$__________，$c^2=$__________. 余弦定理可以变形为：$\cos A=$__________，$\cos B=$__________，$\cos C=$__________.

2. 在$\triangle ABC$中，$A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow\sin A>\sin B\Leftrightarrow\cos A<\cos B$.

3. 在$\triangle ABC$中，$A+B+C=\pi$，$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\Rightarrow\sin(A+B)=\sin C$，$\cos(A+B)=-\cos C$，$\tan(A+B)=-\tan C$，$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$.

4. 若$\triangle ABC$为锐角三角形，则$A+B>\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow A>\frac{\pi}{2}-B\Leftrightarrow\sin A>\cos B\Leftrightarrow\cos A<\sin B$.

5. $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ah_a$（$h_a$表示$a$边上的高).

6. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$则$\triangle ABC$的外接圆半径$R=\frac{c}{2}$，内切圆半径$r=\frac{a+b-c}{2}$.

三、典型例题

例1 (1)已知$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，且$B=\frac{\pi}{6}$，求$\triangle ABC$的面积；

(2)已知$\triangle ABC$中三边长分别为$a=2$，$b=3$，$c=\sqrt{7}$，求$\triangle ABC$的面积.

变式1 (1)在三角形ABC中，边a比边b长2，边b比边c长2，且最大角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，求三角形ABC的面积.

(2)在锐角三角形中，边a、b是方程$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$的两根，角A、B满足$2\sin(A+B)-\sqrt{3}=0$，求角C的度数，边c的长度及$\triangle ABC$的面积.

例2 在三角形ABC中，求证：(1) $\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}$；

(2)$a=b\cos C+c\cos B$，$b=c\cos A+a\cos C$，$c=a\cos B+b\cos A$.

变式2 在三角形ABC中求证：

(1)$\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{\sin B}{\sin A}$；

(2)$c(a\cos B-b\cos A)=a^2-b^2$；

(3)$a^2\sin 2B+b^2\sin 2A=2ab\sin C$.

例3　已知三角形 ABC 的三个内角 A、B、C 的对边分别为 a,b,c,若 $a+c=2b$,且 $2\cos 2B-8\cos B+5=0$.求角 B 的大小并判断三角形 ABC 的形状.

变式3　在三角形 ABC 中已知 $2a=b+c$,$\sin^2 A=\sin B\sin C$,试判断三角形 ABC 的形状.

四、补充例题

例1　已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB=2$,$BC=6$,$CD=DA=4$,求四边形 $ABCD$ 的面积.

例2　已知 A、B、C 是△ABC 的内角,a,b,c 分别是其对边长,向量 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},\cos(\pi-A)-1)$,$\boldsymbol{n}=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right),1\right)$,$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$.

(1)求角 A 的大小;

(2)若 $a=2$,$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$,求 b 的长.

五、小结与反思

____

____

____

____

____

§1.2.2　三角形中的计算与证明(2)

一、课标要求

1. 会利用正弦定理,余弦定理根据已知条件计算三角形中的边和角.

2. 会利用正弦定理,余弦定理结合三角变换求某些边角关系的最值.

二、知识梳理

1. 正弦定理和余弦定理.

2. 和差角公式:$\sin(A\pm B)=$________;$\cos(A\pm B)=$________.

3. 辅助角公式 $a\sin A+b\cos A=$________$=$________.

三、典型例题

例1　△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c.已知 $a\sin A+c\sin C-\sqrt{2}a\sin C=b\sin B$.

(1)求 B　(2)若 $A=75°$,$b=2$,求 a,c.

【思路点拨】第(1)问由正弦定理把正弦转化为边,然后再利用余弦定理即可解决.

(2)在(1)问的基础上知道两角一边可以直接利用正弦定理求解.

变式1 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a，b,c，已知$B=C,2b=\sqrt{3}a$.

(1)求$\cos A$的值；

(2)$\cos\left(2A+\frac{\pi}{4}\right)$的值.

例2 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b，c.已知$\sin A+\sin C=p\sin B(p\in\mathbf{R})$，且$ac=\frac{1}{4}b^2$.

(1)当$p=\frac{5}{4}$，$b=1$时，求a,c的值；

(2)若角B为锐角，求p的取值范围.

变式2 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a，b,c，且满足$c\sin A=a\cos C$.

(1)求角C的大小；

(2)求$\sqrt{3}\sin A-\cos\left(B+\frac{\pi}{4}\right)$的最大值，并求取得最大值时角$A,B$的大小.

例3 半径为R的圆外接于$\triangle ABC$，且$2R(\sin^2A-\sin^2C)=(\sqrt{3}a-b)\sin B$.

(1)求角C；

(2)求$\triangle ABC$面积的最大值.

变式3 在$\triangle ABC$中，已知角A、B、C所对的边分别是a、b、c，边$c=\frac{7}{2}$，且$\tan A+\tan B=\sqrt{3}\tan A\cdot\tan B-\sqrt{3}$，又$\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求$a+b$的值.

四、备选例题

例1 研究一下，是否存在一个三角形具有以下性质：(1)三边是连续的三个自然数；(2)最大角是最小角的2倍.

例2 (1)证明：在三角形ABC中，AC边上的角平分线BD交AC边于点D.求证：$\frac{BA}{BC}=\frac{AD}{DC}$；

(2)已知四边形$ABCD$为平行四边形，求证：$AC^2+BD^2=AD^2+DC^2+CB^2+BA^2$.

五、小结与反思

小结与复习

一、课标要求

1. 通过对任意三角形边长和角度关系的探索，掌握正弦定理、余弦定理，并能解决一些简单的三角形度量问题；

2. 能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

二、知识要点

- 解三角形
  - 正弦定理
    - (1)公式：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$
    - (2)变形公式：
      - (1) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$
      - (2) $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$
      - (3) $\sin A=\dfrac{a}{2R}, \sin B=\dfrac{b}{2R}, \sin C=\dfrac{c}{2R}$
  - 余弦定理
    - (1)公式：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, b^2=a^2+c^2-2ac\cos B, c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
    - (2)变形公式：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
  - 正、余弦定理在解三角形中的应用 → 实际应用
    - (1)正弦定理解决两类问题：
      - A. 已知两边及任一边，求其他边角
      - B. 已知两边及一边的对角，求其他边角
    - (2)余弦定理解决两类问题：
      - A. 已知两角及夹角问题
      - B. 已知三边问题

1. 已知两角和一边（如 A、B、c），由 $A+B+C=\pi$ 求 C，由正弦定理求 a、b.

2. 已知两边和夹角（如 a、b、C），应用余弦定理求 c 边；再应用正弦定理先求较短边所对的角，然后利用 $A+B+C=\pi$，求另一角.

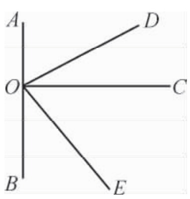
3. 已知两边和其中一边的对角（如 a、b、A），应用正弦定理求 B，由 $A+B+C=\pi$ 求 C，再由正弦定理或余弦定理求 c 边，要注意解可能有多种情况.

4. 已知三边 a、b、c，应用余弦定理求 A、B，再由 $A+B+C=\pi$，求角 C.

总之，在利用正余弦定理解题时，已知条件中角多用正弦定理，边多用余弦定理.

5. 方向角一般是指以观测者的位置为中心，将正北或正南方向作为起始方向旋转到目标的方向线所成的角（一般指锐角），通常表达成正北或正南，北偏东××度，北偏西××度，南偏东××度，南偏西××度.

6. 俯角和仰角的 H ：在视线与水平线所成的角中，视线在水平线上方的角叫仰角，视线在水平线下方的角叫俯角. 如图中 OD、OE 是视线，$\angle DOC$ 是仰角，$\angle EOC$ 是俯角.



7. 坡度：坡面与水平面所成的角（二面角）的度数.

8. 关于三角形面积问题

①$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c$（$h_a$、$h_b$、$h_c$ 分别表示 a、b、c 上的高）；

②$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$；

③$S_{\triangle ABC}=2R^2\sin A\sin B\sin C$.（$R$ 为外接圆半径）；

④$S_{\triangle ABC}=\dfrac{abc}{4R}$；

⑤$S_{\triangle ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$；

⑥$S_{\triangle ABC}=rs$，（r 为 $\triangle ABC$ 内切圆的半径 $\left(s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$）.

三、典型例题

例1　在$\triangle ABC$中，$\cos B=-\dfrac{5}{13}$，$\cos C=\dfrac{4}{5}$.

(1)求 $\sin A$ 的值；

(2)设$\triangle ABC$的面积 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{33}{2}$，求 BC 的长.