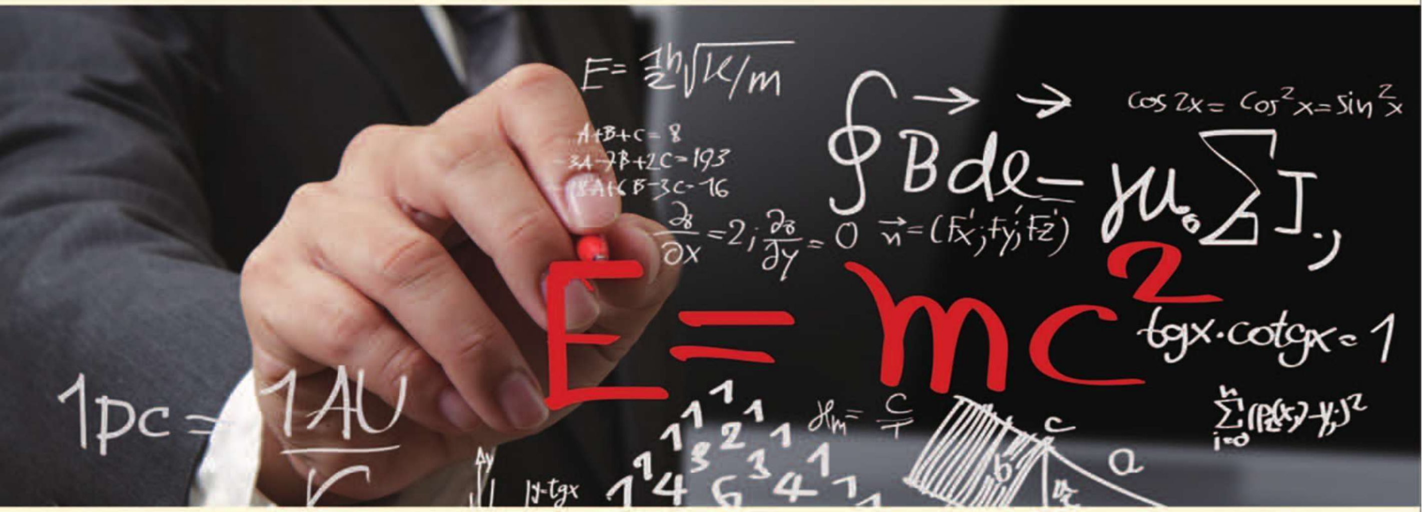
中学数学实验读本



中学数学实验案例选编

王　芳　何瑞娟　李光俊　编著

电子科技大学出版社

中学数学实验读本

中学数学实验案例选编

王 芳 何瑞娟 李光俊 编著

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

中学数学实验案例选编 / 王芳, 何瑞娟, 李光俊编著. -- 成都：电子科技大学出版社, 2017.10

ISBN 978-7-5647-5207-1

Ⅰ. ①中… Ⅱ. ①王… ②何… ③李… Ⅲ. ①中学数学课-教学研究 Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 251257 号

书　　名　中学数学实验案例选编
编　　著　王　芳　何瑞娟　李光俊

策划编辑　万晓桐　徐守铭
责任编辑　万晓桐　徐守铭

出版发行　电子科技大学出版社
　　　　　成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼　邮编 610051
主　　页　www.uestcp.com.cn
服务电话　028-83203399
邮购电话　028-83201495

印　　刷　成都市川侨印务有限公司
成品尺寸　185 mm × 260 mm
印　　张　16
字　　数　400 千字
版　　次　2017 年 10 月第一版
印　　次　2017 年 10 月第一次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5647-5207-1
定　　价　39.80 元

前 言

数学实验是以实验器材为工具，学习数学或应用数学的一种方式。早在20世纪70年代末80年代初，英国一些高校就开设了“数学实验”课。随后，美国高校也在20世纪90年代开设了“数学实验”课。21世纪初，我国的清华大学、电子科技大学、哈尔滨工业大学等学校也相继开设了“数学实验”课。

基于计算机的广泛应用及计算机软件的有效开发，数学实验这一门新兴课程应运而生。特别是Matlab软件的开发为数学实验奠定了基础。然而，在当前新课程改革的背景下，数学实验作为一门中学数学教学课程来开设，有一定的难度。我们认为，无论是教师还是学生，由于计算机及其软件应用能力的局限，在中学阶段，开设中学数学实验教学课程举步维艰。其一，目前，一般中学数学教师对计算机及其相关软件的应用大多停留在利用计算机网络查询资料，简单使用Excel、Word、几何画板、GeoGebra等应用软件的水平上。像Matlab等类的软件大多未接触过。其二，高考竞争的现实情况，使广大中学生不愿意将有限的时间和精力用于学习非高考必考的计算机知识，对数学实验没有兴趣。

通过“中学数学建模”与“高中数学实验”等课题的研究，我们逐步认识到，中学数学实验的目的是要让学生深入体会所学数学知识的内涵。为达到这一目的，在教学过程中，有必要让学生理解数学知识产生的背景及过程。数学实验正是利用实验器材客观展现数学知识产生的过程。

数学实验过程中所使用的实验器材，既指传统的纸、笔、直尺、圆规、三角板、绳子等，也指现代的计算机及其网络和应用软件，更指无形的实验器材——人脑。实际教学中，初学除法试商、验证圆锥与圆柱体积之关系的倒沙实验、野外测量河宽山高、不等式证明中寻求等号成立的条件等，又何尝不是数学实验在数学知识习得过程中的体现呢？在教学实践中，这样来理解数学实验，把数学实验作为一种教学模式加以运用，有着不可估量的实际意义。实践证明，数学实验教学模式有利于激发学生数学学习的热情，培养学生的动手能力、想象力、创造力，增强学生的创新意识。

本书所选编的数学实验案例源自于我们的课题研究和华南师范大学数学学院课题研究。这些实验案例的设计理念、实验过程略显稚嫩，但实验设计目的明确，富有针对性、实用性、启发性，难易适当，契合该年龄段学生的认知特点。书后附录了笔者在不同时期所教学生的 4 篇论文，其目的是为了激励后学者学习数学的激情。

本书在编写过程中得到华南师范大学数学学院和西华师范大学数学学院拾遗补缺，裨益不少。在出版过程中，得到了西充中学杨明校长的大力支持。我的学生封小波、何友鸿在本书的编辑与出版中，也作了热情的鼓励与帮助。在此一并致谢！

数学实验在中学阶段的发展前景虽堪忧，但我们毕竟迈出了有意义的一步。在数学实验的文山书海中，我们的研究犹如沧海之一滴。而海不辞水，故能成其大，涓涓细流汇归大海，方能扬其波。因此我们编写这本书，给数学实验爱好者提供参考。如读者能从中受到一点启迪，那将是对我们最大的激励。诚恳地希望专家和读者指正。

作　者

二〇一七年五月于四川省西充中学

目 录

第 1 章　基于计算机软件的数学实验

1.1　几何画板

1.1.1　利用信息技术完善导数概念的构建

刘　徽

1. 导数的起源

虽然微积分成为一门学科是在 17 世纪,但是,微分和积分的思想在古代就已经产生了. 公元前三世纪,古希腊的阿基米德在解决抛物弓形的面积、球和球冠面积、螺线在第一个周转和初始线之间所包围的面积,以及旋转双曲体的体积的问题中,就隐含着近代积分学的思想. 作为微分学基础的极限理论来说,早在古代就有比较清楚的论述. 比如我国的庄周所著的《庄子》一书的"天下篇" 中,记有"一尺之棰,日取其半,万世不竭." 三国时期的刘徽在他的割圆术中提到"割之弥细,所失弥小,割之又割,以至于不可割,则与圆周和体而无所失矣." 这些都是朴素的、也是很典型的极限思想.

2. 导数的发展

到了 17 世纪,有许多科学问题需要解决,这些问题就成了促使微积分产生的因素. 归结起来,大约有四种主要类型的问题:

第一类问题是研究物体运动的时候出现的求瞬时速度的问题;

第二类问题是求曲线的切线问题;

第三类问题是求函数最大值和最小值的问题;

第四类问题是求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心、一个体积相当大的物体作用于另一物体上的引力的问题.

费尔马

17 世纪许多著名的数学家、天文学家、物理学家都为解决上述几类问题做了大量的研究工作,如法国的费尔马、笛卡尔、罗伯瓦、笛沙格;英国的巴罗、瓦里士;德国的开普勒;意大利的卡瓦列利等人都提出许多很有建树的理论. 为微积分的创立做出了贡献. 17 世纪下半叶,在前人工作的基础上,英国大科学家牛顿和德国数学家莱布尼茨分别在自己的国度里独自研究和完成了微积分的创立工作,虽然这只是十分初步的工作,但他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起,一个是切线问题(微分学的中心问题),另一个是求积问题(积分学的中心问题).

(1) 早期 —— 导数概念的萌芽

从 1629 年费尔马的书信中发现,费尔马引进差分 $F(x+\varepsilon)-F(x)$ 作出了抛物线的切线. 分析学家拉格朗日说道:"我可以认为费尔马是这种新计算的第一个发明人". 牛顿说:"我从费尔马的切线作法中得到了启示,我推广了它 ……" 所以有人认为

费尔马差一点就完成了微积分的发明，现在普遍认为费尔马是导数概念建立的奠基人.

(2)17 世纪 —— 广泛使用的“流数术”

17 世纪生产力的发展推动了科学和技术的发展，在前人创造性研究的基础上，大数学家牛顿、莱布尼茨等从不同的角度开始系统地研究微积分. 牛顿的微积分理论被称为“流数术”，他称变量为流量，称变量的变化率为流数. 牛顿的有关“流数术”的主要著作是《求曲边形面积》《运用无穷多项方程的计算法》和《流数术和无穷级数》，流数理论的实质为：构造变量的变化与函数值的变化的比，然后求这个比当变化量趋于零时的极限.

莱布尼茨

(3)19 世纪 —— 逐渐成熟的导数理论

1750 年达朗贝尔在为法国科学院出版的《百科全书》第四版写的“微分”条目中提出了关于导数的一种观点，可以用现代符号简单表示：$\frac{dy}{dx}=\lim\frac{oy}{ox}$. 19 世纪 60 年代以后，魏尔斯特拉斯创造了 $\varepsilon-\sigma$ 语言，对微积分中出现的各种类型的极限定义重新表述，导数的定义也就获得了今天常见的形式.

达朗贝尔

3. 导数的定义及几何意义

(1) 导数的定义

我们以跳水运动员下落的瞬时速度作为研究对象. 运动员相对于水面的高度 $f(x)$ 与起跳后的时间 x 存在函数关系.

$$f(x)=-4.9x^2+6.5x+10$$

在 $x=2$ 前后取一个时刻 $2+\Delta x$，在几何画板中输入 Δx 的值，即可得到运动员在下落时 Δx 内的平均速度. 如 1.1 - 1 所示.

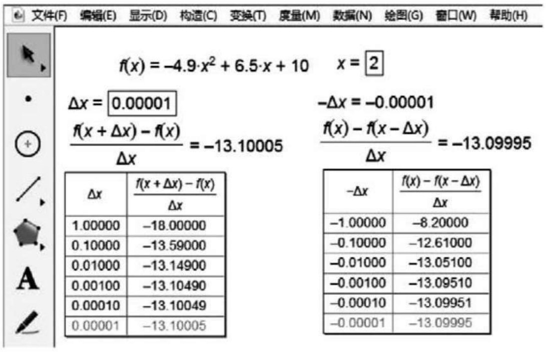


图 1.1 - 1

这时导数的定义就是物体运动到某时刻的瞬时速度.

(双侧) 导数的定义如下：

设 $y=f(x)$ 在某个 $U(x_0)$ 上有定义. 若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称 $y=f(x)$ 在 x_0 可导(或导数存在、有导数)，并且称此极限为 $y=f(x)$ 在 x_0 的导数，可记为

$$y'\Big|_{x=x_0},\ f'(x_0),\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0},\ \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

单侧导数有下述表达式.

左导数：$y'_-\Big|_{x=x_0}=f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

右导数：$y'_+\Big|_{x=x_0}=f'_+(x_0)$

双侧、单侧导数的关系：$f'(x_0)=A$(或 ∞，$\pm\infty$)$\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$(或 ∞，$\pm\infty$)，可导性是局部性质.

(2) 区间上可导性的定义

若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点 x_0 都存在导数，这时，对区间内每一点 x_0 有唯一确定的导数 $f'(x_0)$ 与之对应，因此导数仍是定义在区间 (a,b) 上的一个函数，称之为原来的函数 $y=f(x)$ 的导函数，可记作 $y'=f'(x)$，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{df(x)}{dx}$.

(3) 导数的几何意义

我们知道导数 $f'(x_0)$ 表示函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率，反映了函数在 x_0 附近的变化情况. 下面我们来探究一下导数 $f'(x_0)$ 的几何意义.

设函数为 $f(x)=2^x$，如图 1.1－2 所示. 在其上任选一点 A，求得 $f'(x_A)$ 的值，再在曲线上取一动点 B，计算直线 AB 的斜率.

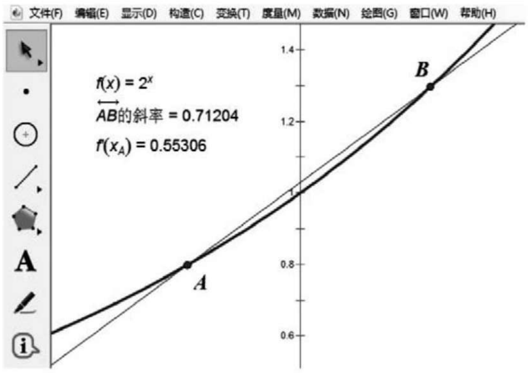


图　1.1－2

让 B 点继续慢慢靠近 A 点，AB 的斜率继续变化，如图 1.1－3 所示.

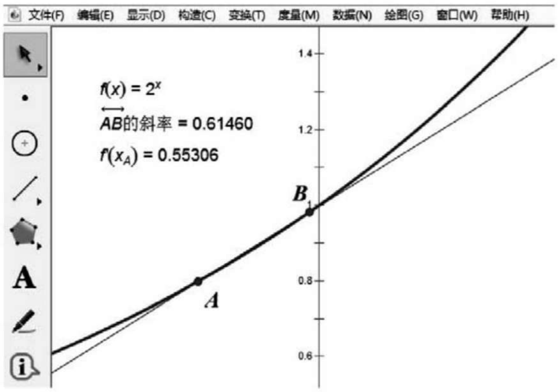


图　1.1－3

在 B 点逐渐靠近 A 点的过程中，可以看出，AB 的斜率与 $f'(x_A)$ 越来越接近，如图 1.1－4 所示.

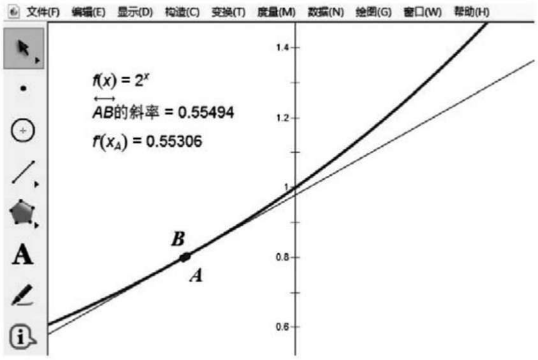


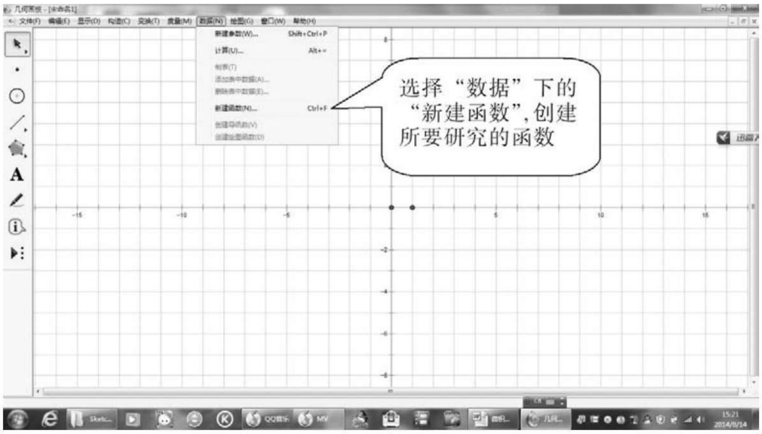
图 1.1 - 4

所以曲线在某点导数的几何意义就是曲线上该点的切线的斜率.

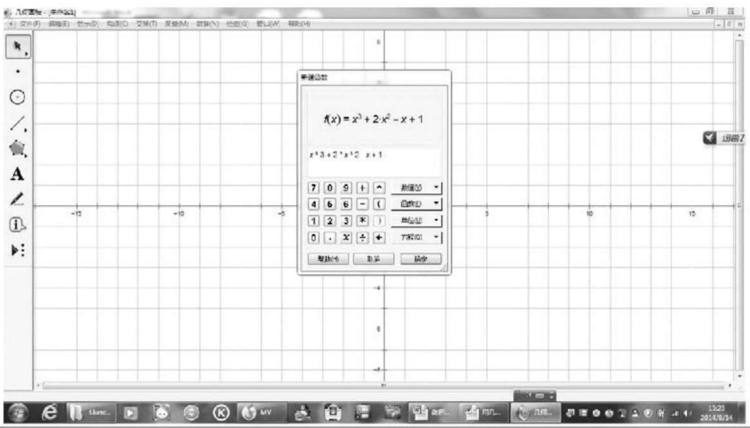
1.1.2 用几何画板探究函数的导数

例 1 用几何画板探究函数 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ 的导数.

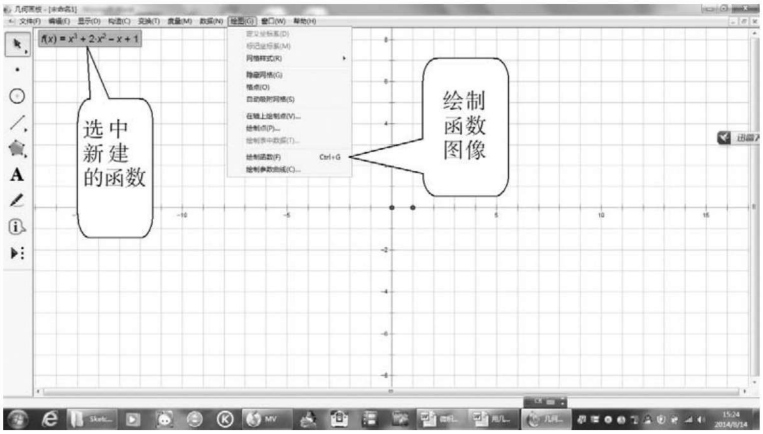
第一步 创建函数并选择点,如图 1.1 - 5 所示.



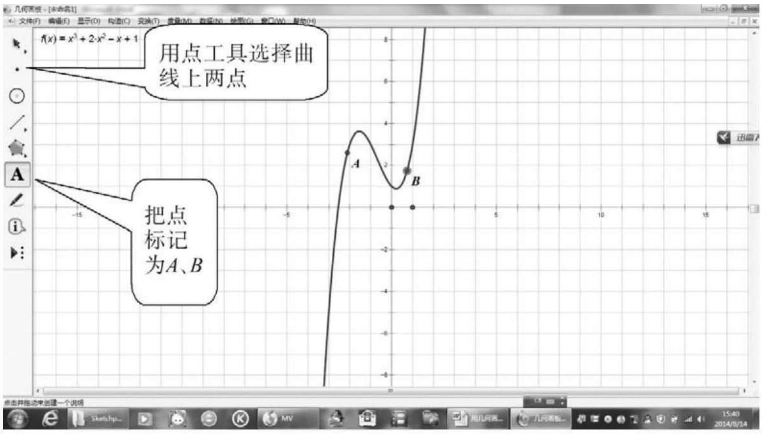
(a)



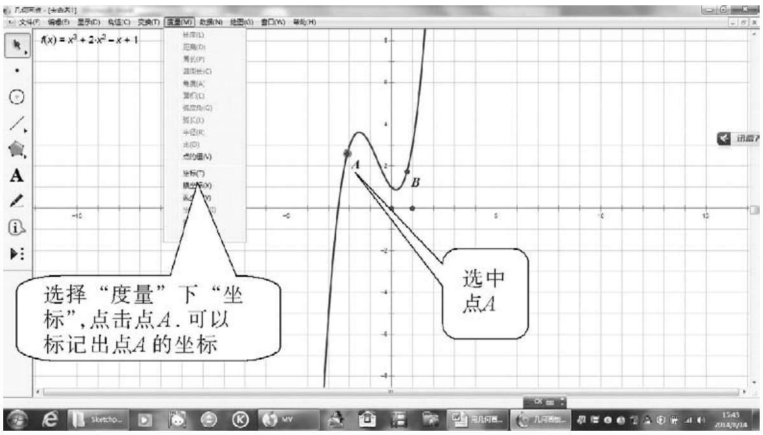
(b)


f(x) = x³ + 2·x² − x + 1
选中新建的函数
绘制函数图像

(c)


f(x) = x³ + 2·x² − x + 1
用点工具选择曲线上两点
把点标记为A、B
A
B

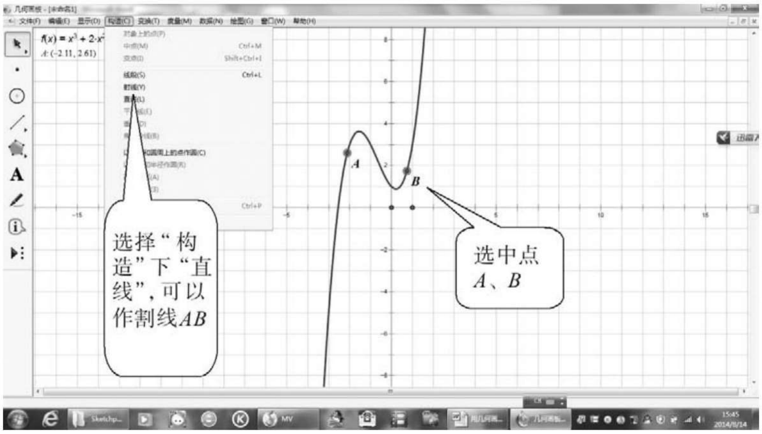
(d)


f(x) = x³ + 2·x² − x + 1
选择“度量”下“坐标”,点击点A. 可以标记出点A 的坐标
选中点A
A
B

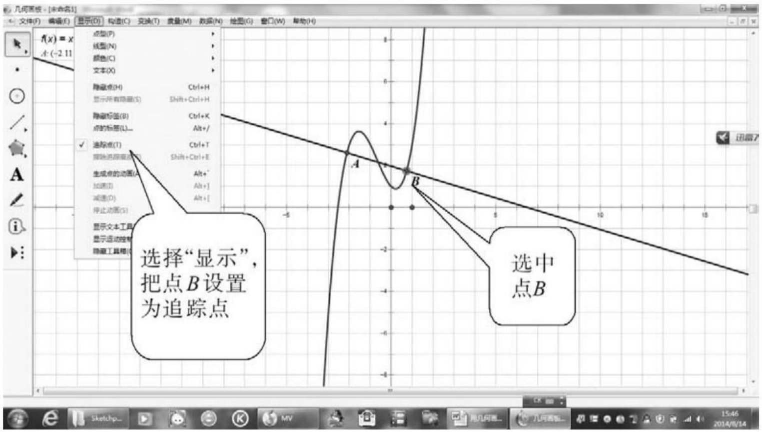
(e)

图　1.1 − 5

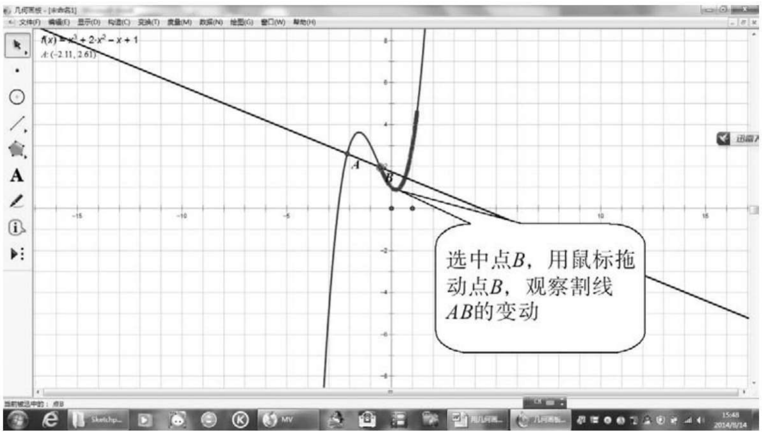
第二步　作割线,如图 1.1 - 6 所示.



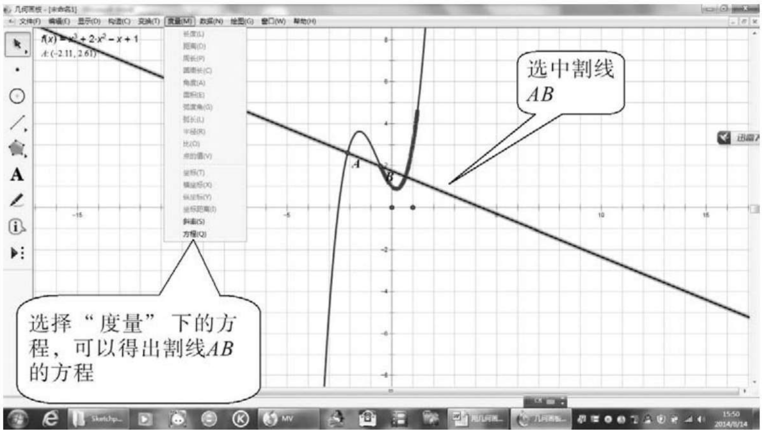
(a)



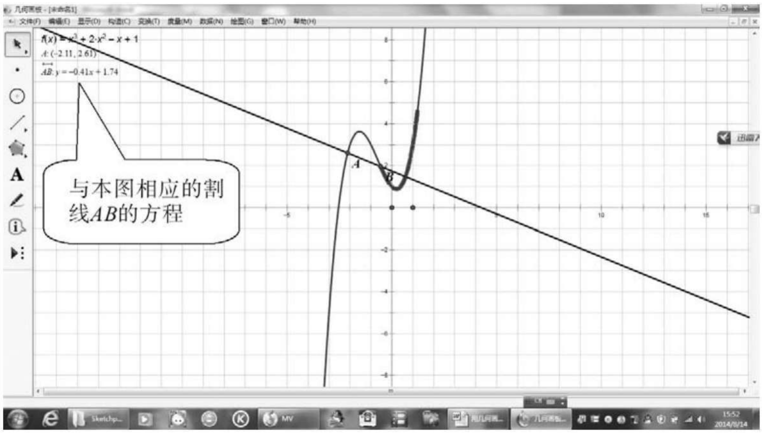
(b)



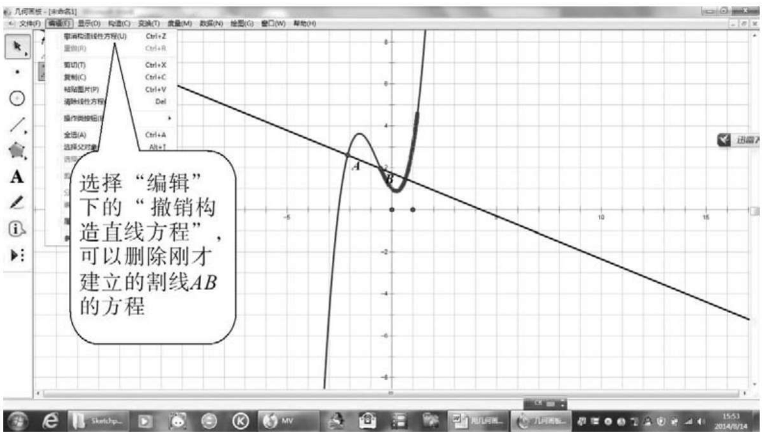
(c)


选中割线
AB
选择“度量”下的方程，可以得出割线AB的方程

（d）


与本图相应的割线AB的方程

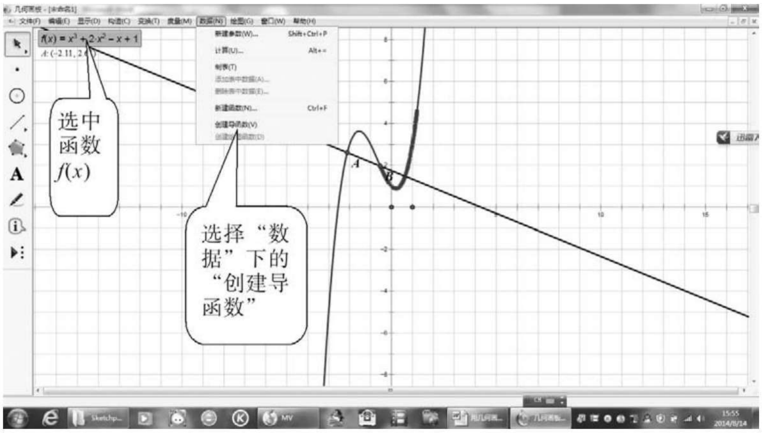
（e）


选择“编辑”下的“撤销构造直线方程”，可以删除刚才建立的割线AB的方程

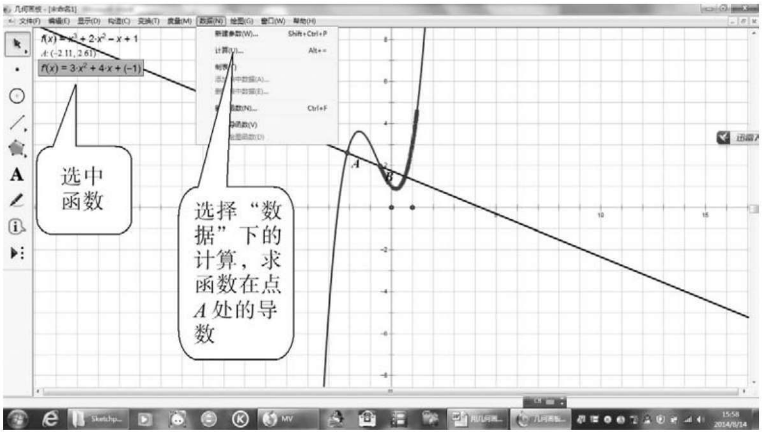
（f）

图　1.1－6

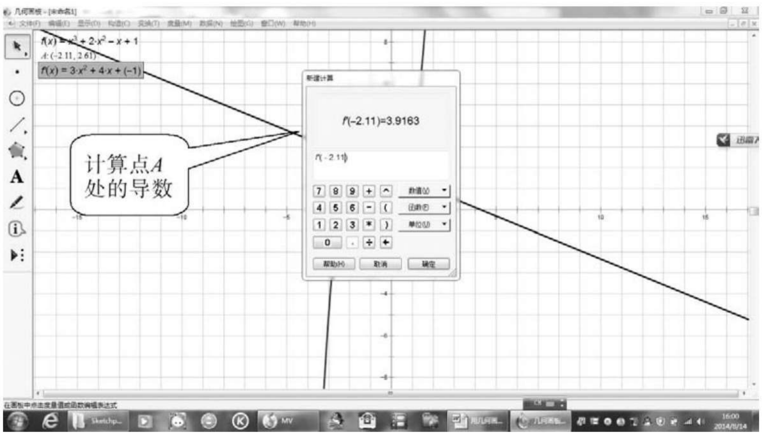
第三步　创建函数的导函数,如图 1.1 - 7 所示.



(a)



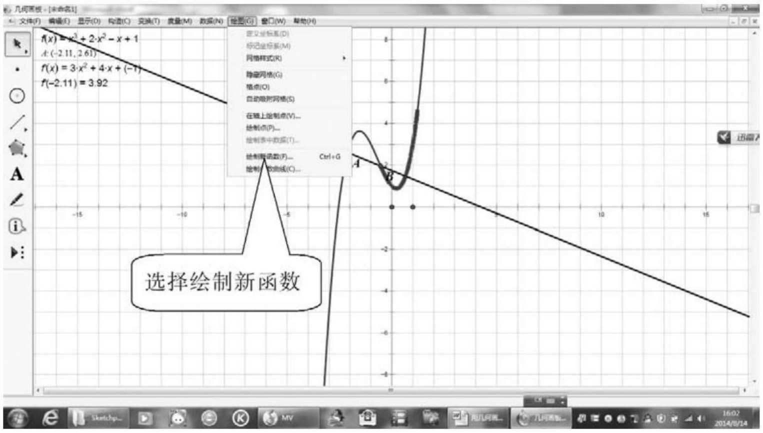
(b)



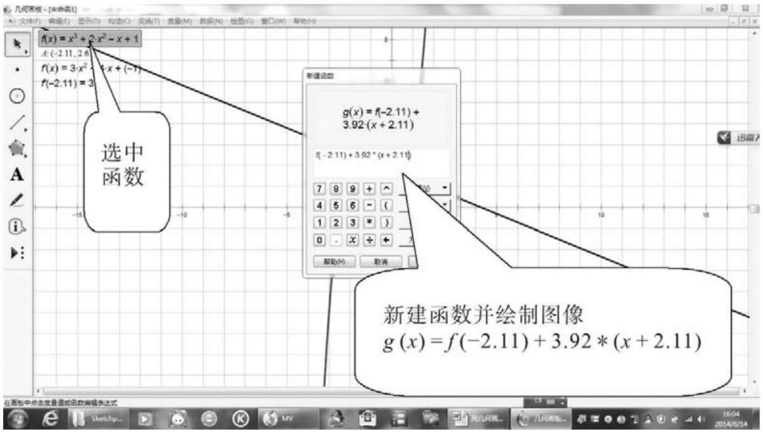
(c)

图　1.1 - 7

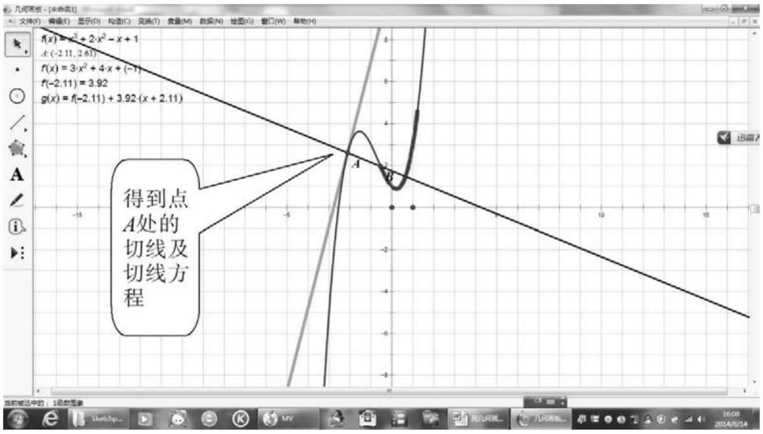
第四步　求切线方程并绘制切线,如图 1.1 - 8 所示.



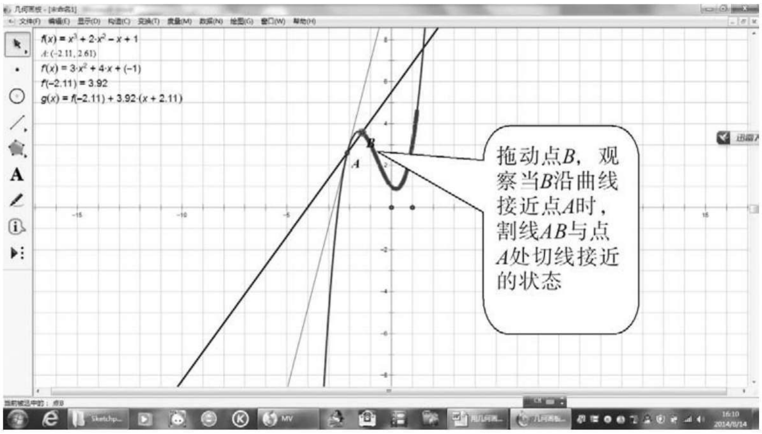
(a)



(b)



(c)



(d)

图　1.1－8

1.1.3　三角函数图像的变换

1. $y=\sin x$ 图像的形成

在人教版普通高中课程标准实验教科书《数学》必修4的1.4.1中,作出了 $y=\sin x$ 的图像,如图1.1－9所示.

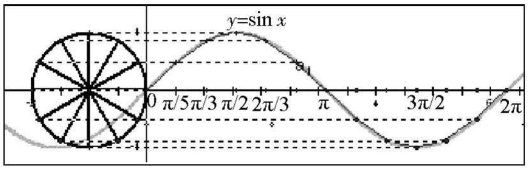


图　1.1－9

2. 将 $y=\sin x$ 的图像转换成 $y=\cos x$ 的图像

因为 $\cos x=\sin(\dfrac{\pi}{2}+x)$,所以要得到 $y=\cos x$ 的图像,只需要将 $y=\sin x$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位即可. 如图1.1－10所示.

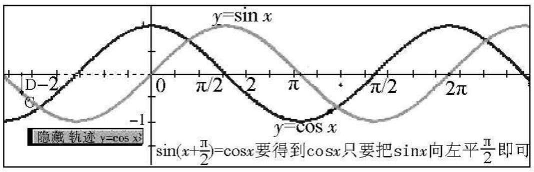


图　1.1－10

(1) 作 $y=\sin x$ 的轨迹.

(2) 构造 $y=\cos x$ 的轨迹. 选中 $y=\sin x$ 的轨迹,选中 < 构造/对象上的点 > 得到点 A,在 x 轴上选中点 $\dfrac{\pi}{2}$ 和原点,选中 < 变换/标记向量 >,选中 A 点,选中 < 变换/平移/标