GAODENG SHUXUE

高等数学

下

主　编　杨英杰　颜宝平
副主编　龙红兰　戴祥军

重庆大学出版社

高等数学

（下册）

主　编　杨英杰　颜宝平
副主编　龙红兰　戴祥军

内容简介

本书分上、下两册.上册内容包括函数、极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,积分及其应用,空间解析几何等;下册内容包括多元函数微分学及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,微分方程等.全书基本上涵盖了现行理工科类院校"高等数学"课程的全部教学内容,内容深浅适宜,注意与中学数学的衔接,例题充分结合教学内容,难易适中,特别注重将建模思想融入课程内容之中.

本书可供高等院校理工科类各专业作为教材使用,也可作为理工科学生考研参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下 / 杨英杰, 颜宝平主编. -- 重庆 : 重庆大学出版社, 2018.9

ISBN 978-7-5689-1322-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①杨… ②颜… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 190758 号

高等数学(下)

主　编　杨英杰　颜宝平

副主编　龙红兰　戴祥军

策划编辑:何　梅　范　琪

责任编辑:文　鹏　　版式设计:范　琪

责任校对:谢　芳　　责任印制:张　策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:易树平

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023) 88617190　88617185(中小学)

传真:(023) 88617186　88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆荟文印务有限公司印刷

*

开本:787mm×1092mm　1/16　印张:14.5　字数:355千

2018 年 9 月第 1 版　　2018 年 9 月第 1 次印刷

印数:1—2 000

ISBN 978-7-5689-1322-5　定价:38.00 元

前言

《高等数学》(上、下册)是根据教育部提出的“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”精神,结合普通高等学校本科专业类教学质量国家标准的要求与铜仁学院建设高水平教学服务型大学的目标,围绕近几年全国高校工科数学教学指导委员会工作会议的意见,作为铜仁学院精品课程建设,强调高等数学要为专业教育服务而编写的一套教材.全书分上、下两册,上册内容包括函数、极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,积分及其应用,空间解析几何等;下册内容包括多元函数微分法及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,微分方程等.本书各章节配有习题和总练习题,利用总练习题检测学习效果,题目难易适中,层次分明.

本书注重将数学素质的培养融合到教学内容之中,突出微积分的基本思想和方法.在内容上力求实用,简洁易懂.在使用过程中注意以问题驱动教学,带着问题教学,为解决问题而引入新知识、新方法是编写本书的另一初衷.本书在编写过程中借鉴了传统高等数学的体例结构,同时也做了一定尝试,例如将传统的不定积分这一章融入定积分之中,改为积分及其应用.

本书由杨英杰、颜宝平主编,参加编写的还有龙红兰、戴祥军,其中杨英杰承担第九、十章的编写工作,龙红兰承担第六、七章的编写工作,戴祥军承担第八章的编写工作,杨英杰、颜宝平负责统稿.本书得到了铜仁学院大数据学院的全体老师的支持,在此致以谢意.

限于编者水平,本书疏漏之处在所难免,恳请专家同行及读者批评指正,编者联系方式:1265094565@ qq. com.

编　者

2018 年 5 月

目录

第六章
多元函数微分法及其应用

在第二章到第四章中，所讨论的函数都是只有一个自变量，但在许多实际问题中往往需要考虑自变量个数是两个甚至更多个的情形，这就是多元函数. 本章将在一元函数的微分法及其应用的基础之上，讨论多元函数的微分法及其应用. 由于从一元函数到二元函数有许多本质的变化，而从二元函数到二元以上的函数只有自变量的个数不同，没有本质的区别，完全可以将有关的内容类推. 因此，本章讨论以二元函数为主要对象. 多元函数微分法是一元函数微分法的推广和发展，学习时要注意两者的区别和联系.

第一节　多元函数

一、多元函数概念

(1) 区域

设 $P_0(a,b)$ 是直角坐标平面上一点，δ 是某一正数. 与点 $P_0(a,b)$ 的距离小于 δ 的所有点 $P(x,y)$ 的集合，称为点 $P_0(a,b)$ 的 δ 邻域，记为 $U_\delta(P_0)$，即

$$U_\delta(P_0)=\{P\,|\,|P_0P|<\delta\}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\right\}.$$

$U_\delta(P_0)$ 在几何上表示直角坐标平面上以点 $P_0(a,b)$ 为圆心、以 δ 为半径的圆内的所有点. 如果去掉邻域的中心，称为点 $P_0(a,b)$ 的去心的 δ 邻域，记为 $\mathring{U}_\delta(P_0)$，即

$$\mathring{U}_\delta(P_0)=\{P\,|\,0<|P_0P|<\delta\}=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\right\}.$$

如果不考虑邻域的半径，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某一邻域，$\mathring{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的某一去心邻域.

设 E 是平面点集，P 是平面上一点. 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$，使 $U(P)\subset E$，则称

点 P 是 E 的**内点**. 显然,$P\in E$(见图6.1).

如果点集 E 的任意点都是内点,则称 E 是**开集**. 例如 $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$. E 中所有点都是 E 的内点,所以 E 是开集.

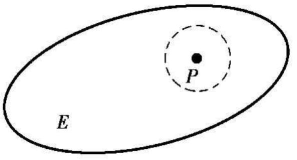

图6.1

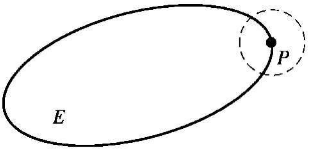

图6.2

如果在点 P 的任意邻域内,既有点属于 E,同时又有点不属于 E,则称点 P 是 E 的**边界点**(见图6.2). E 的所有边界点组成的集合,称为 E 的**边界**. 例如 $E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$ 的边界是圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=2$. 由此可见,点集 E 的边界点(或边界)可能属于 E,也可能不属于 E.

设 E 是开集. 如果 E 内任意两点都能用属于 E 的折线连接起来,则称开集 E 是**连通的**.

连通的开集称为**开区域**. 开区域添上它的边界一起,称为**闭区域**. 例如$\{(x,y)\mid x^2+y^2>1\}$是开区域,$\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\}$是闭区域.

有时为简便起见,并在不致引起混淆的情况下,将开区域和闭区域都笼统地简称为**区域**.

设 E 是平面点集. 如果存在某一正数 R,使 $E\subset U_R(O)$,点 O 为原点,则称 E 是**有界集**. 否则,称 E 为**无界集**. 例如$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$是**有界开区域**,$\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1\}$是无界闭区域.

(2) n 维空间

在空间解析几何中引入直角坐标系后,空间的点与有序的三元数组(x,y,z)一一对应. 从而,有序三元数组(x,y,z)的全体表示空间一切点的集合,称为(三维)空间. 一般地,有序 n 元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体称为 ***n* 维空间**,记为 R^n(n 为自然数). 其中每个有序 n 元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为 ***n* 维空间的一个点** P,记为 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,数 x_1 称为点 P 的**第 *i* 个坐标**. 当 $n=1$ 时,R^1 表示数轴;当 $n=2$ 时,R^2 表示平面;当 $n=3$ 时,R^3 表示空间.

设 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$为 R^n 中任意两点,两点间的距离定义为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

关于平面点集给出的一系列概念,可完全推广到 n 维空间. 例如邻域概念,设点 $P_0\in R^n$,δ 是某一正数,则 R^n 中与点 P_0 的距离小于 δ 的所有点 P 的集合,称为点 P_0 的 δ 邻域,即

$$U_\delta(P_0)=\{P\mid |P_0P|<\delta,P\in R^n\}.$$

(3) 二元函数概念

定义1 **设 D 是平面上的一个点集. 如果对于每个点 $P(x,y)\in D$,变量 z 按着一定的法则总有唯一确定的值与之对应,则称 z 是变量 x,y 的二元函数(或点 P 的函数),记为 $z=f(x,y)$(或 $z=f(P)$),其中 x,y 称为自变量,z 称为因变量,点集 D 称为函数的定义域. 数集 $W=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为函数的值域.**

表示函数对应关系的记号 f 也可用其他字母表示,如函数 $z=\varphi(x,y)$,$z=u(x,y)$等.

例 6.1　圆柱体的体积 V 和它的底半径 r,高 h 之间的关系是

$$V=\pi r^2 h.$$

例 6.2　一定量的理想气体的压强 P 和体积 V,绝对温度 T 之间的关系是

$$P=\frac{RT}{V}\quad (R\text{ 为常数}).$$

例 6.3　设某物体在加热过程的某一瞬间时,其内部各点的温度 T 随着点的位置而变化.当点的坐标(x,y,z)确定时,就得到相应点上的温度 T. 因此 T 是点(x,y,z)的函数,即 T 是三个变量 x,y,z 的函数. 又若考虑各点温度随时间 t 而变化,则温度 T 是四个变量 x,y,z 和 t 的函数.

如果将平面点集 D 改为 n 维空间点集 $D\subset R^n\ (n\geqslant 3)$,类似地,可定义**三元函数** $u=f(x,y,z)$ 及 n **元函数** $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 当 $n=1$ 时,n 元函数为一元函数. 当 $n\geqslant 2$ 时,n 元函数统称为**多元函数**. 多元函数可简记为 $u=f(P)$,点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$.

如何求多元函数的定义域呢? 与一元函数相类似,如果多元函数是用解析式表示的,则**函数的定义域**就是使函数解析式有意义的自变量所确定的点集. 如果函数有确定的实际意义,即该函数是某个实际问题的数学模型,则它的定义域应由实际问题来确定.

例 6.4　求函数 $z=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(1-x-y)$ 的定义域.

解　x,y 应满足不等式

$$\begin{cases}x>0\\1-x-y>0\end{cases},\text{即}\begin{cases}x>0\\x+y<1\end{cases}$$

从而,定义域为 $D=\{(x,y)\mid x>0\text{ 且 }x+y<1\}$,是无界的开区域(见图 6.3).

例 6.5　求函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)+\sqrt{2-x^2-y^2}$ 的定义域.

解　x,y 应满足不等式

$$\begin{cases}2-x^2-y^2\geqslant 0\\x^2+y^2\leqslant 1\end{cases},\text{即 }x^2+y^2\leqslant 1.$$

从而,定义域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,是有界闭区域(见图 6.4).

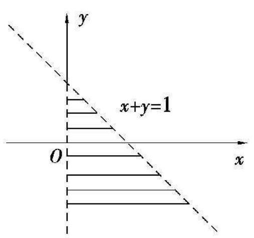

图 6.3

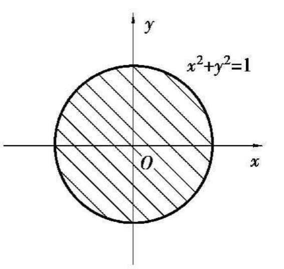

图 6.4

二元函数的图形:设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$,有确定的函数值 $z=f(x,y)$ 与之对应. 于是,以 x 为横坐标,y 为纵坐标,z 为竖坐标,在空间确定一个点 $M(x,y,z)$,所有这样确定的空间点的集合

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为**二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形**. 一般地,二元函数的图形是空间曲面,而这个曲面在 xOy 面上的投影就是该函数的定义域 D(图 6.5). 例如函数 $z=x^2+y^2$ 是定义在 xOy 面上,顶点在原点、开口向上的旋转抛物面,由方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的图形是球心在原点、半径为 a 的球面,定义域是

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}.$$

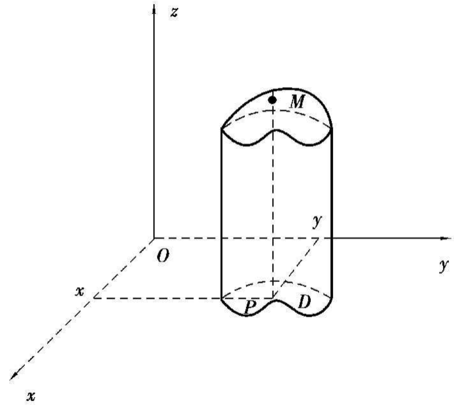

图 6.5

由 $z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 可知,对于任一点 $P(x,y)\in D$,z 有两个确定的值与之对应,因此,该函数为多值函数,其中两个单值分支 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 和 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 分别表示上半球面和下半球面. 除特别声明外,本书主要讨论单值函数.

二、二元函数的极限

类似于一元函数的极限概念,二元函数的极限也是反映当点 $P(x,y)$ 越来越趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$(但 $P(x,y)\neq P_0(x_0,y_0)$)时,对应的函数值 $f(x,y)$ 的变化趋势.

定义 2　设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义,A 为常数. 如果对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得满足不等式

$$0<|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)$,都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时的(二重)极限,记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,$$

或

$$f(x,y)\to A\quad(P\to P_0).$$

注意:$P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 是从任何方向,以任意方式进行的. 这一点有别于一元函数的极限. 如果当点 $P(x,y)$ 以两种不同的方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数值趋向于两个不同的常数,则可以肯定函数的极限不存在.

关于二重极限的运算,有类似于一元函数极限的运算法则.

例 6.6　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

解　分子、分母同乘以因式 $\sqrt{xy+1}+1$,得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{xy+1}+1)=2.$$

例 6.7　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[\frac{\sin\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\right]^2 \cdot \frac{x^2+y^2}{2e^{x^2y^2}}=1\cdot 0=0.$$

例 6.8　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

解　因为当 $xy\neq 0$ 时,有

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{|x|+|y|}{2|xy|}=\frac{1}{2|y|}+\frac{1}{2|x|}\to 0\,(x\to\infty,y\to\infty),$$

由夹逼定理可知,

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2}=0.$$

例 6.9　证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

证明　当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于点 $P_0(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}0=0,$$

但是,当点 $P(x,y)$ 沿抛物线 $y=\sqrt{x}$ 趋于点 $P_0(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\sqrt{x}}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

三、二元函数的连续性

与一元函数的连续性相类似,在多元函数极限的基础上,我们将研究多元函数的连续性.

定义 3　**设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上有定义,点 $P_0(x_0,y_0)\in D$(P_0 是 D 的内点或边界点).如果**

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

如果函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的每一点都连续,则称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上是**连续函数**.

关于二元函数连续性的概念,可完全推广到 n 元函数 $u=f(P)$ 上去.

如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不连续,则称点 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的**间断点**.

例如函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

虽然 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处有定义,但是当 $x\to 0,y\to 0$ 时,函数的极限不存在,所以点 $(0,0)$ 是该函数的一个间断点.

又如函数 $z=\dfrac{xy}{y-2x^2}$ 在抛物线 $y=2x^2$ 上没有定义,所以抛物线上的点都是该函数的间断点.

由此可见,二元函数的间断点有时可能形成一条或几条曲线.

类似于一元初等函数的定义,所谓**多元初等函数**,就是由常数和自变量(如 x,y 等)利用基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的函数. 例如 $\cos\dfrac{x^2+y^2}{2}$, $\ln\dfrac{x^2+y^2}{1+xy}$ 等都是多元初等函数.

由于多元函数也有类似于一元函数的极限运算法则,根据这些运算法则及连续函数的定义,可证得如下结论:

①多元连续函数的和、差、积均为连续函数,连续函数的商在分母不为零处也连续.

②多元连续函数的复合函数仍为连续函数.

③一切多元初等函数在其定义域内是连续的.

利用多元初等函数的连续性,可以求某些多元函数的极限. 设 $f(p)$ 是多元初等函数,而点 P_0 是 $f(P)$ 的定义域内的一点,则

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0).$$

例 6.10 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\cos(x-e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 函数 $f(x,y)=\dfrac{\cos(x-e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是初等函数,而点 $P_0(1,0)$ 在其定义域内,所以 $f(x,y)$ 在点 P_0 处连续,即

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\cos(x-e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=f(1,0)=1.$$

闭区间上连续函数的性质可推广到多元连续函数上去.

定理 1(最值性)　如果多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(P)$ 在 D 上一定有最小值和最大值. 即在闭区域 D 上至少存在两点 P_1,P_2,使得 $f(P_1)$ 为最小值,$f(P_2)$ 为最大值.

定理 2(介值性)　设多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续. 如果 $f(P)$ 在 D 上取得两个不同的函数值 μ_1,μ_2,则 $f(P)$ 在 D 上一定取得介于 μ_1 和 μ_2 之间的任何值 μ 至少一次. 特别地,如果 μ 介于函数 $f(P)$ 的最小值 m 和最大值 M 之间,则在 D 上至少存在一点 P_0,使 $f(P_0)=\mu$.

习题 6.1

1. 设 $z=x+y+f(x-y)$,若当 $y=0$ 时,$z'=x^2$,求函数 f 及 z.

2. 设 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,求 $f(x,y)$.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $z=\sqrt{2x^2-y}$　　(2) $z=\ln[x\ln(y-x)]$

(3) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}+\arcsin(1-x^2-y^2)$　　(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

(5) $u=\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{z-x^2-y^2}}$　　(6) $u=\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$

4. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}\cos\sqrt{|xy|-1}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin xy}{x}$　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)$

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to k}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x (k\neq0)$　　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

5. 证明下列极限不存在.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x-y^2}{x+y^2}$　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2xy^3}{x^2+y^6}$

6. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 的连续性.

7. 指出下列函数的间断点.

(1) $z=\dfrac{\sin x\sin y}{x+y}$　　(2) $z=\dfrac{1}{\cos(x^2+y^2)}$

第二节　偏导数

在第二章中讨论了一元函数的变化率问题,并引进了函数的导数的概念. 本节将以此为

基础讨论多元函数关于其中一个自变量的变化率问题,并引进偏导数的概念. 下面就二元函数给出偏导数的定义、计算方法以及高阶偏导数.

一、偏导数的定义

定义 **设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义. 先固定 $y=y_0$,当 x 在 x_0 处有增量 Δx 时,相应地,函数有关于 x 的偏增量,记为 Δz_x,即**

$$\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

如果
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 x 的偏导数,记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\text{或}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\text{或}\left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\text{或}f_x(x_0,y_0).$$

即
$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\tag{6.1}$$

同样,**先固定 $x=x_0$,函数关于 y 的偏增量记为 Δz_y,即 $\Delta z_y=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$,函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于 y 的偏导数定义为**

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z_y}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\text{或}\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\text{或}\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\text{或}f_y(x_0,y_0).$$

即
$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}\tag{6.2}$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在开区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在,则在 D 内定义了一个新的二元函数,称为函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导函数(偏导数),记为 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},z_x,f_x(x,y)$.

同理,可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对 y 的偏导函数(偏导数),记为 $\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},z_y,f_y(x,y)$.

二元函数的偏导数定义可以推广到二元以上的函数. 例如三元函数 $u=f(x,y,z)$,如果函数 $f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 某一邻域内有定义,则在点 (x,y,z) 处关于 x 的偏导数定义为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}.$$

类似地,可定义函数关于 y 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及关于 z 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial z}$.

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处偏导数的几何意义:一般地,二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形为空间曲面. 由偏导数的定义可知,函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $z=f(x,y_0)$ 在点 x_0 处的导数,而一元函数 $z=f(x,y_0)$ 的几何图形是曲

面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线,因此偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率. 同理,偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线在点 M_0 处的切线对 y 轴的斜率(图 6.6).

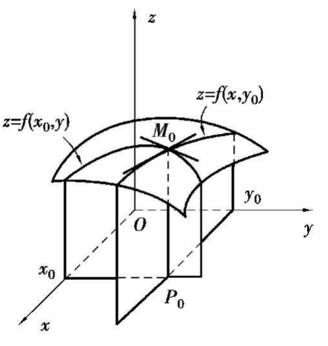

图 6.6

对于一元函数来说,如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,则 $y=f(x)$ 在点 x_0 处一定连续. 但是,如果多元函数在某点处各偏导数都存在,则函数在该点却不一定连续. 这是因为偏导数在点 P_0 处存在,只能说明点 P 沿着平行于坐标轴的方向趋于点 P_0 时,函数值 $f(P)$ 趋于 $f(P_0)$,而当点 P 沿其余任何方式趋于 P_0 时,函数值 $f(P)$ 不一定都趋于 $f(P_0)$. 例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

在点(0,0)处对 x 的偏导数为

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

对 y 的偏导数为

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0+\Delta y,0)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

但是,由例 6.9 知,函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)处不连续.

二、偏导数的计算

由偏导数的定义可知,求函数对其中一个自变量的偏导数,其余的自变量暂时看作常量. 这时,求函数的偏导数相当于一元函数的求导问题. 因此,一元函数的求导公式、求导法则仍然适用. 如二元函数 $z=f(x,y)$,求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 时,可把 y 暂时看作常量而对 x 求导;求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 时,可把 x 暂时看作常量而对 y 求导.

例 6.11　求函数 $f(x,y)=x^2y-xy+x^3$ 在点(1,2)处的偏导数.

解　将 y 看作常量对 x 求导,得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy-y+3x^2,$$

将 x 看作常量对 y 求导,得

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2-x.$$

将点(1,2)代入偏导数中,得

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=5,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=0.$$

例 6.12 设 $f(x,y)=y\sin xy$,求$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=y\cos xy\cdot y=y^2\cos xy$,

$\frac{\partial f}{\partial y}=\sin xy+y\cos xy\cdot x=\sin xy+xy\cos xy$.

例 6.13 设 $z=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$,证明 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

证明 因为$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$,

所以
$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z.$$

例 6.14 求 $u=x^{\frac{y}{z}}$的偏导数.

解 把 y,z 都看作常量对 x 求导,得
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}.$$

同理
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x,\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x.$$

例 6.15 理想气体的状态方程是 $PV=RT$(R 为常数),证明
$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证明 由 $P=\frac{RT}{V}$,得$\frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$.

由
$$V=\frac{RT}{P},得\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{P},由\ T=\frac{PV}{R},得\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{V}{R}.$$

所以
$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-\frac{PT}{V^2}\cdot\frac{R}{P}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{PT}{PV}=-1.$$

对于一元函数来说,导数记号$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$可看作函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商. 例 6.15 说明,偏导数记号$\frac{\partial z}{\partial x}$是一个整体记号,不可看作分子$\partial z$ 与分母∂x 之商.

三、高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在开区间 D 内存在偏导数.
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y).$$

一般地,这两个偏导数 $f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$ 仍是 x,y 的二元函数,如果这两个函数的偏导数也存在,则称它们为二元函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数. 二元函数的二阶偏导数有如下 4 个,记为$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$或 $f_{xx}(x,y)$,$f_{xy}(x,y)$,$f_{yx}(x,y)$,$f_{yy}(x,y)$,即
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

其中偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$称为**二阶混合偏导数**.

类似地,二阶偏导数的偏导数称为函数$f(x,y)$的三阶偏导数,$n-1$ 阶偏导数的偏导数称为函数$f(x,y)$的 n 阶偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**.

例 6.16　设函数 $z=xy^2+\sin\frac{x}{y}$,求二阶偏导数.

解　由$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2+\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}, \frac{\partial z}{\partial y}=2xy-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}$.

得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=2y-\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x}{y^3}\sin\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=2y-\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x}{y^3}\sin\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x+\frac{2x}{y^3}\cos\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^4}\sin\frac{x}{y}.$$

由例 6.16 可见,两个混合偏导数相等,即偏导数与求导次序无关. 一般地,如果函数满足一定条件,这一结论一定成立,即有如下定理.

定理　**如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$,$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$在区域 D 内连续,则在该区域 D 内有$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.**

简单地说,二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关. 定理证明从略.

关于高阶偏导数的定义及上述结论,可以推广到二元以上的函数上去.

例 6.17　设函数 $z=\arctan\frac{y}{x}$,求二阶偏导数.

解　由$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$,

于是　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

例 6.18　验证函数 $u=\frac{1}{r}$满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad 其中\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

解　由$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{x}{r^3}$,

从而　$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}.\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$.