赢在思维

初中数学拉分题解题思维训练

主编：蒋忠勇 陆新生 汤婧雯

8年级

（第三版）

★ 专题整合突破提高

★ 题型贴合考试热点

★ 解题思维方法详尽

★ 答案详细重点提示

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

赢在思维

初中数学

拉分题

解题思维训练

8年级

（第三版）

主编：蒋忠勇 陆新生 汤婧雯

编委会

蒋忠勇 陆新生 秦佳艺 汤婧雯 陈文瑜
郑春雷 刘露邑 奚祉妍 瞿 霞 何胜男
曹佳琦 汪 韩 张伊凡

（排名不分先后）

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP) 数据

初中数学拉分题解题思维训练. 8 年级/蒋忠勇，陆新生，汤婧雯主编. —3 版. —上海：华东理工大学出版社，2018. 5

(赢在思维)

ISBN 978 - 7 - 5628 - 5425 - 8

Ⅰ. ①初… Ⅱ. ①蒋… ②陆… ③汤… Ⅲ. ①中学数学课-初中-题解 Ⅳ. ①G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 067172 号

策划编辑/ 郭　艳

责任编辑/ 牛　东　赵子艳

装帧设计/ 视界创意

出版发行/ 华东理工大学出版社有限公司

地　址：上海市梅陇路 130 号，200237

电　话：021-64250306

网　址：www. ecustpress. cn

邮　箱：zongbianban@ecustpress. cn

印　　刷/ 常熟市新骅印刷有限公司

开　　本/ 787mm×1092mm　1/16

印　　张/ 13. 5

字　　数/ 372 千字

版　　次/ 2018 年 5 月第 3 版

印　　次/ 2018 年 5 月第 1 次

定　　价/ 35. 00 元

初中拉分题系列图书

初中数学 解题思维训练+专项训练300题

初中物理 解题思维训练+专项训练300题

初中化学 解题思维训练+专项训练300题

初中数学几何 解题思想与方法：几何篇+几何专项训练

前　言

“初中数学拉分题”系列从出版到现在，经过多次重印修订，其间我们收到很多来自读者的反馈，做了多次细节方面的改进，同时我们越来越明显地体会到，在初中数学的各类练习和考试中，每道大题的最后 1～2 个小题，也就是“拉分题”，通常成为拉开总分差距的决定性要素.

本次改版我们力争做到以下几点.

1. 参考多地教材，强调广泛性

为了使本书更具有广泛的适用性，编者在改版工作中参考了大量版本的教材，尽量使更多的读者受益.

2. 精选例题习题，强调典型性

本书所选每一道题都蕴含了丰富的数学思想与数学方法，充分体现了拓展思维、培养数学素养的编写思想. 同学们在学习例题的过程中，除了需要掌握基础知识与技能，发展应用数学的意识与能力，还要增强学好数学的愿望与信心.

本次改版，所选例题没有重复，并且专项训练题的设置保证了学生在学习例题之后能及时复习，便于了解学习情况，巩固解题技巧，加深对题目的理解，从而达到举一反三的目的. 拓展提高训练多选自全国各地重点高中自招题. 本丛书的习题量不大，但每个题目都能使认真思考者有所收获，并且方便一线教师在教学中灵活使用.

另外，通过对中考题型的研究，本次改版涵盖了各种中考重点题型，并且有缜密的思维分析过程，使学生们能够准确判断所属题型，并运用相应解题方法清晰答题.

3. 深度剖析例题，强调思维性

本书编写的立足点并不是题海战术，而是对每一类题目的解法的透彻理解和掌握. 通过“思维点评”指导学生学会思维方法，引导学生将每种方法和思路逐步转化为自己的理解，掌握一些常用的解题思路、策略和方法，将思维融于探究之中.

相信读者们只要按编者的编写思路进行学习、巩固、拓展，必然会取得进步. 我们坚信这本书能够让你夯实基础、拓展思维、掌握技巧，成为你取得优异数学成绩的基石.

我们也恳请教育战线的前辈与同仁给予指导和推荐，同时更希望能够得到读者的建议与批评，使我们不断改进、不断进步.

目　录

专题 1　三角形

专题 2　整式

专题 3　因式分解

专题 4　分式

专题 5　二次根式

专题 6　几何证明

专题 7　四边形

专题 1　三角形

编者引言

三角形的学习主要包含等腰（边）三角形与全等三角形，我们同时引入了一些直角三角形的知识点作为扩展内容，进行延伸．三角形的学习除了最基础的点（特殊点）、线（角度）、面（面积）之外，还要结合图形的平移、旋转与翻折，也需要掌握一些图形的构建方法．

经典拉分题 解析

题 1

（二次全等）如图 1－1 所示，已知$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，M 是 AC 的中点，$AD\perp BM$ 交 BC 于点 D，交 BM 于点 E．求证：$\angle AMB=\angle DMC$．

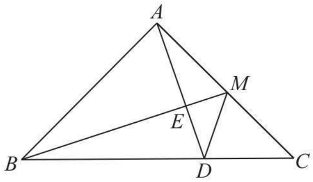


图 1－1

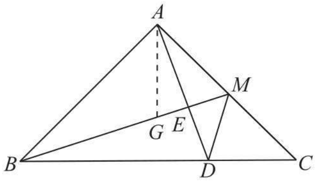


图 1－2

满分证明

如图 1－2 所示，作$\angle BAC$ 的平分线 AG 交 BM 于点 G．

由条件 $AB=AC$、$\angle BAG=\angle ACD=45°$、$\angle ABG=\angle CAD$，可证得$\triangle BGA\cong\triangle ADC$，从而得到 $AG=CD$．

由条件 $AG=CD$、$AM=CM$、$\angle MAG=\angle MCD=45°$，可证得$\triangle AMG\cong\triangle CMD$．

因此，$\angle AMB=\angle DMC$．

技巧贴士

证明不在同一个三角形内的两个角相等，通常有两种方法，即找出第三个角作为中间桥梁，或是证明这两个角所在三角形全等．从图中可以观察到，$\angle AMB$ 与$\angle DMC$ 所在的两个三角形$\triangle AME$ 与$\triangle CMD$ 显然不全等，但是这两个三角形中有其他相等元素，即 $AM=CM$．结合这个条件，算上结论，全等三角形条件有两个，因此我们想到通过添加辅助线，构造两个全等三角形，即$\triangle AMG$ 和$\triangle CMD$，从而得到$\angle AMB=\angle DMC$．

另外，二次全等，就是通过两次三角形全等，解决题目中涉及的角度、线段间的关系. 自然全等三角形是一种手段与工具. 它能用于证明角、边的等量关系，因此证明边、角相等，往往就是证明边、角所在的两个三角形全等. 所以，对于角、边的关系，一定要将其置于某个载体，如两个全等三角形中. 此外，解决二次全等往往使用逆推的思路. 在题 1 贴士中所构造的$\triangle AMG \cong \triangle CMD$所缺少的条件是$AG=CD$，通过$\triangle BGA \cong \triangle ADC$来提供.

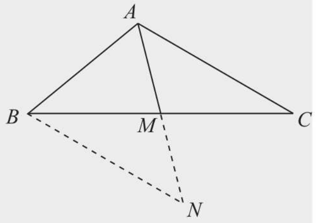


图 1－3

题 2

(中线倍长)如图 1－4 所示，已知在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，延长AB至D使$BD=AB$，E为AB中点. 求证：$CD=2EC$.

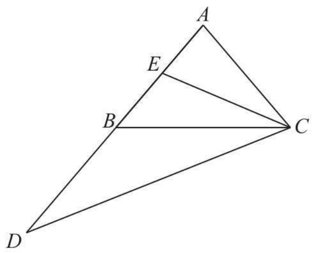


图 1－4

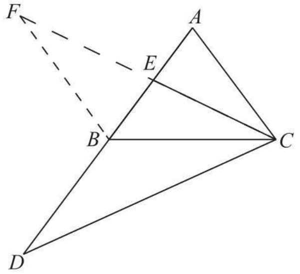


图 1－5

满分证明

如图 1－5 所示，延长CE至点F使$CE=EF$，再连接BF.

易证$\triangle ACE \cong \triangle BFE$，从而可得$AC=BF$、$\angle CAE=\angle FBE$.

由$\angle CBD=\angle CAE+\angle ACB$、$\angle CBF=\angle FBE+\angle ABC$，可得$\angle CBD=\angle CBF$.

由条件$BD=AB=AC=BF$，$BC=BC$，易证$\triangle CBF \cong \triangle CBD$.

因此，$CD=CF=2EC$.

技巧贴士

本题还可用三角形中位线定理解答(三角形中位线是指连接三角形两边中点的线段，即三角形的中位线平行于第三边并且等于它的一半). 取AC的中点G，连接EG、BG，由$AB=AC$，E、G分别为AB、AC中点，得出$BE=CG$，从而$\triangle BEC \cong \triangle CGB$. 故$CE=BG$. 由中位线定理可知$BG=\frac{1}{2}CD$，所以$CE=\frac{1}{2}CD$.

题 3

(中线倍长)如图 1－6 所示，已知在$\triangle ABC$外作正方形$ABDE$和$ACGF$，M是BC的中点. 求证：$AM=\frac{1}{2}EF$.

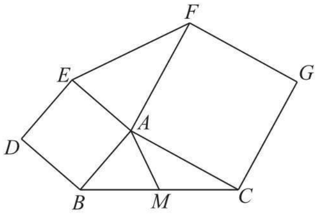


图 1－6

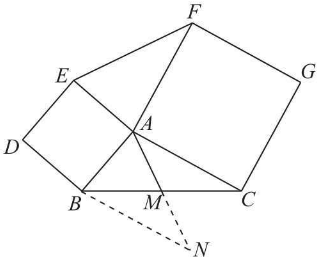


图 1－7

满分证明

如图 1－7 所示，延长 AM 至点 N，使 $MN=AM$，连接 BN.

易证$\triangle ACM\cong\triangle NBM$，从而可得$\angle ACB=\angle NBC$.

由$\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180^\circ$，可得$\angle ABC+\angle NBC+\angle BAC=180^\circ$，即$\angle ABN+\angle BAC=180^\circ$.

再由$\angle EAF+\angle EAB+\angle BAC+\angle CAF=360^\circ$，得到$\angle EAF+\angle BAC=180^\circ$，即$\angle ABN=\angle EAF$.

结合条件 $EA=AB$，$BN=CA=AF$，易证$\triangle ABN\cong\triangle EAF$.

因此，$EF=AN=2AM$，即 $AM=\frac{1}{2}EF$.

技巧贴士

已知条件中出现了中点以及 $AM=\frac{1}{2}EF$ 形式，这暗示了可使用“中线倍长”的方法. 通过将中线 AM 延长一倍后，证明 $AN=EF$，找到 AN、EF 所在的$\triangle ABN$、$\triangle EAF$，证明两个三角形全等即可.

中线倍长，是初中数学几何中常见的一种添加辅助线的方法. 若题目出现中点、中线，要求证或出现“$A=2B$”，一般延长一倍的中线. 如图 1－7 所示，通过$\triangle ACM\cong\triangle BNM$，从而实现“$A=2B$”.

题 4

(截长补短)(1) 如图 1－8 所示，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，BD 为边 AC 上的高，P 为线段 BC 边上的动点(且不与 B、C 两点重合)，过点 P 分别作 AB、AC 边上的垂线且与 AB、AC 分别交于 M、N 两点，求证：$BD=PM+PN$.

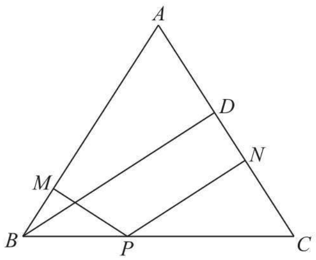


图 1－8

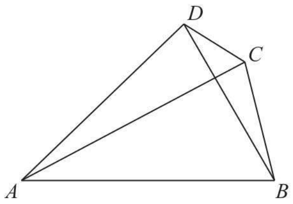


图 1－9

(2) 如图 1－9 所示，在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=AC$，$\angle ABD=60^\circ$，$\angle ADB=76^\circ$，$\angle BDC=28^\circ$，求$\angle DBC$ 的度数.

1 三角形
2 整式
3 因式分解
4 分式
5 二次根式
6 几何证明
7 四边形
8 一次函数
参考答案与提示

满分解答

(1) 如图 1－10 所示，在 NP 的延长线上截取 $PE=PM$，连接 BE.

由条件 $PE=PM$、$\angle MPB=\angle EPB$（在 Rt$\triangle BMP$ 与 Rt$\triangle PNC$ 中，由于 $\angle MBP=\angle C$，因此 $\angle MPB=\angle NPC$. 又 $\angle BPE$ 与 $\angle NPC$ 为对顶角，因此 $\angle MPB=\angle EPB$），$BP=BP$，易证 $\triangle BPM\cong\triangle BPE$，从而可得 $\angle BEP=90°$.

因此四边形 $BEND$ 为矩形，可得 $EN=BD$.

由 $EN=EP+PN$ 得 $BD=PM+PN$.

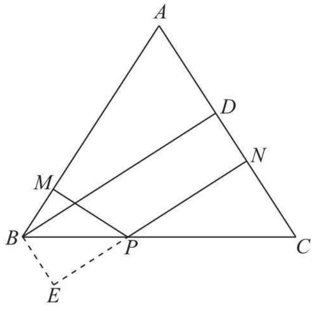


图 1－10

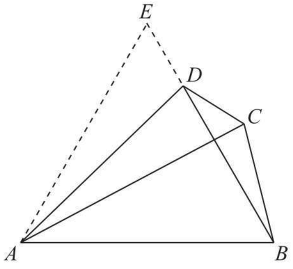


图 1－11

(2) 如图 1－11 所示，延长 BD 至点 E，使 $DE=DC$，连接 AE. $\angle ADE=180°-\angle ADB=104°$，$\angle ADC=\angle ADB+\angle BDC=104°$，故两角相等. 再结合已知条件易证 $\triangle ADE\cong\triangle ADC$，$AE=AC$，从而得到 $AE=AB$，故 $\triangle ABE$ 为等边三角形. $\angle CAD=180°-\angle ADC-\angle ACD=16°$，$\angle CAB=\angle EAB-\angle CAD-\angle EAD=28°$. 从而 $\angle ABC=\dfrac{1}{2}(180°-\angle CAB)=76°$，所以 $\angle DBC=\angle ABC-\angle ABD=16°$.

技巧贴士

本题是运用“补短法”，把所要求的 $BD=PM+PN$ 中的 PM“补”到 PN 所在的直线上. 接着，只需证明四边形 $BEND$ 为矩形，结合已有的两个直角，只需证明 $\angle BEP=90°$，从而便能证明 $\triangle BPM\cong\triangle BPE$（本分析思路仍为逆向思维，可见在证明几何问题中，逆向思维出现较多）. 当然，本题还可用“截长法”和“面积法”来做. “面积法”思路如下：连接 AP，由于 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，再运用 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APC}$，即可得证. 再对题(1)的“截长法”做如下简述：在 BD 上截取线段 BF，使 $BF=PM$，可证得 $\triangle BPF\cong\triangle PBM$，从而得到 $BF=PM$，$PF\perp BD$，即可求得四边形 $PFDN$ 为矩形，得到 $PN=DF$，即可得证. 对于第(2)问，本题使用了“补短法”，补短法通常运用在证明边的关系上，而此题为大家拓展了另一种思路，即在求解角的问题上也可以考虑用“截长补短法”. 本题中我们发现若能将 $AB=AC$ 和 $\angle ABD=60°$这两个条件结合到同一三角形中，便能构造出一个等边三角形，以便于我们解决角度的问题. 接着再观察题目给出的另外两个角度关系，我们发现延长 BD 后会出现两个相等的角，故考虑延长 BD 至点 E，使 $DE=DC$，从而构造出一对“翻折型”的全等三角形.

题 5

(截长补短)如图 1－12 所示，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 DC 的延长线上，点 F 在 CB 的延长线上，$\angle EAF=45°$，求证：$DE-BF=EF$.

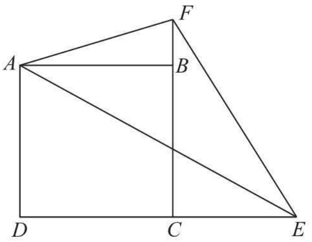


图 1－12

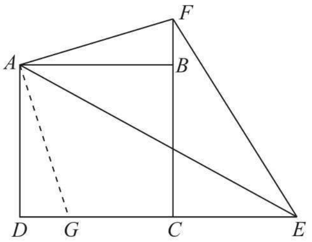


图 1－13

满分证明

如图 1－13 所示，在 DC 上截取 DG，使得 $DG=BF$，连接 AG.

由四边形 $ABCD$ 是正方形，可得$\angle ADG=\angle ABF=90°$，$AD=AB$.

又由于 $DG=BF$，可得$\triangle ADG\cong\triangle ABF$，故$\angle GAD=\angle FAB$，$AG=AF$.

$\angle DAB=90°=\angle DAG+\angle GAB=\angle BAF+\angle GAB=\angle GAF$，即$\angle GAE=\angle GAF-\angle EAF=45°$，$\angle GAE=\angle FAE=45°$.

又因为 $AG=AF$、$AE=AE$，故$\triangle EAG\cong\triangle EAF$，即得

$EF=EG=ED-GD=DE-BF$.

技巧贴士

本题运用"截长法"，在 DC 上截取 $DG=BF$，可得$\triangle ADG\cong\triangle ABF$. 而在有正方形的题目中看到$\angle EAF$，即使$\angle EAF\neq45°$，也要证明存在一对含$\angle EAF$ 的全等三角形，即题中的$\triangle EAG\cong\triangle EAF$. 可见，"截长法"有两种常见情况，即构造全等和转移边长. 另外，由$\angle EAF=45°$(正方形中容易有 45°)联想到角平分线，通常意味着存在"翻折型"全等三角形.

一般问题中出现"$A=B+C$"，且 B、C 不在同一直线上的形式，就可以考虑"截长补短". 即把不同的线段通过辅助线联系起来，最终得到所要求的等量关系. 事实上，"截长补短"代表着两种方法：一是"截长"(在 A 上截取 B 或 C)，二是"补短"(在 B 上延长 C 得 A 或在 C 上延长 B 得 A). 这两种方法在三角形中基本上是互补的，截长补短不适用的情况主要在圆中才有体现(详见 9 年级与"圆"相关的专题).

还有以下几点在证明三角形全等中需要特别注意.

(1) 三角形中，大量存在"等量代换"的技巧，即使没有告诉我们"$A=B$".

(2) 即使题目中只给出一般的三角形，通过辅助线或角、边的关系，中间往往会存在大量等腰三角形、等边三角形(这里隐含了"一般与特殊"的思想方法，通常联系等腰三角形、等边三角形，一般三角形的情况比较少).

(3) 相等会为全等提供可能性：只要出现"$A=B$"，A 和 B 分别属于两个三角形，通过各种方式证明 A 和 B 所在的两个三角形全等就可以解决部分问题.

题 6

(角平分线翻折)如图 1－14 所示，在等腰$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A=100°$，$\angle ABC$ 的平分线 BE 交 AC 于 E，求证：$BC=AE+EB$.

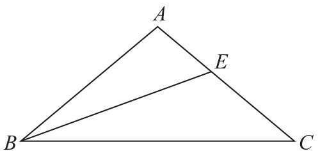


图 1 - 14

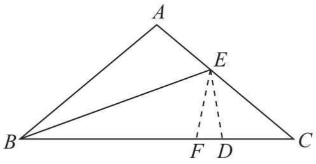


图 1 - 15

满分证明　如图 1 - 15 所示，在 BC 上取 $BD=BE$，$BF=AB$.

由条件 $AB=BF$、$BE=BE$、$\angle ABE=\angle EBC=20^\circ$，易证$\triangle ABE\cong\triangle FBE$.

因此$\angle BFE=100^\circ$，故$\angle BEF=60^\circ$，$\angle EFD=80^\circ$.

又由于 $BD=BE$，可得$\angle BED=\angle BDE=80^\circ$，$\angle FED=\angle BED-\angle BEF=20^\circ$，故$\angle EFD=\angle EDF$，$EF=ED$.

由于$\angle DEC=180^\circ-\angle BEA-\angle BED=40^\circ=\angle C$，所以 $ED=CD$，即 $CD=EF=AE$.

由 $BC=BD+CD$，$BD=EB$，得 $BC=AE+EB$.

技巧贴士　本题运用“截长法”，在最长的 BC 上截取题中所要求的其中一段，如 $BD=BE$. 至于 $BF=AB$ 的出现则在于从$\angle ABC$ 的角平分线得到启示，出现角平分线，往往意味着三角形翻折，$\triangle ABE\cong\triangle FBE$ 也可看作两三角形翻折（相等会为全等提供可能性），并且出现等腰三角形往往还意味着存在等量代换.

题 7　**（角平分线翻折）如图 1 - 16 所示，在四边形 $ABCD$ 中，BD 平分$\angle ABC$，$DP\perp BC$ 于点 P，$AB+BC=2BP$. 求证：$\angle BAD+\angle C=180^\circ$.**

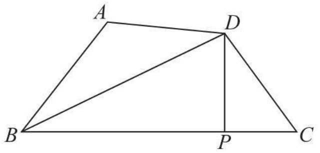


图 1 - 16

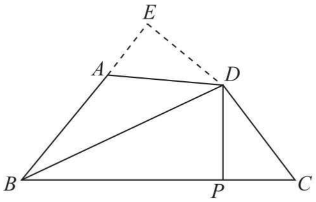


图 1 - 17

满分证明　如图 1 - 17 所示，过点 D 作 $DE\perp BA$ 交 BA 延长线于点 E.

由于 BD 平分$\angle ABC$，故 $DE=DP$（角平分线定理），可得 $Rt\triangle BED\cong Rt\triangle BPD$，故 $BE=BP$.

由于 $AB+BC=2BP$，得到 $AB+BP+PC=BP+BE$，所以 $AB+PC=BE$，即得 $PC=BE-AB=AE$.

又由于 $DE=DP$，$\angle DEA=\angle DPC=90^\circ$，且 $AE=CP$，可得$\triangle DEA\cong\triangle DPC$，得到$\angle EAD=\angle C$.

由于$\angle BAD+\angle EAD=180^\circ$，即得$\angle BAD+\angle C=180^\circ$.

技巧贴士

在看到角平分线时，要想到角平分线上任一点到两边的垂直距离相等(角平分线定理). 本题往往还会以另一种形式出现：已知 BD 平分$\angle ABC$，$DP \perp BC$ 于点 P，$\angle BAD+\angle C=180^\circ$，求证 $AB+BC=2BP$，解题思路类似.

题 8

(旋转)如图 1－18 所示，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$BC=AC$，D、E 分别为 AB 上两点，且$\angle DCE=45^\circ$，求证：$AD^2+BE^2=DE^2$.

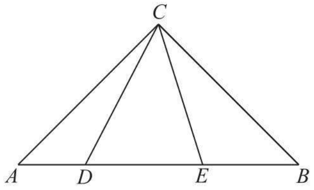


图 1－18

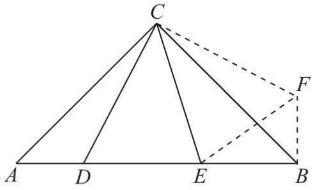


图 1－19

满分证明

如图 1－19 所示，将$\triangle ADC$ 绕点 C 旋转到如图位置，则$\triangle CAD \cong \triangle CBF$.

由$\angle A=\angle ABC=45^\circ$，可得$\angle EBF=\angle ABC+\angle CBF=\angle ABC+\angle A=90^\circ$，故$\triangle BEF$ 为直角三角形，且 $BF=AD$.

又因$\angle ACD+\angle ECB=45^\circ$，且$\angle ACD=\angle FCB$，故$\angle ECB+\angle FCB=\angle FCE=45^\circ=\angle DCE$.

由 $DC=CF$，$CE=CE$，可得$\triangle CDE \cong \triangle CFE$，$DE=FE$，即 $BE^2+AD^2=DE^2$.

技巧贴士

勾股定理及其逆定理：在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2$($a$、$b$ 为直角边，c 为斜边). 根据本题结论，通过等量代换，要将 AD、BE、DE 置于一个直角三角形中. 先由 $BC=AC$ 这一条件，想到若将$\triangle ADC$ 进行旋转，即可得到两对全等的三角形，同时也构建出了一个直角三角形. 从而通过三角形的全等，可将所求边转化到同一直角三角形中，得到结论.

题 9

(旋转)如图 1－20 所示，P 为等边$\triangle ABC$ 内一点，若 $AP=3$，$PB=4$，$PC=5$，求$\angle APB$ 的度数.

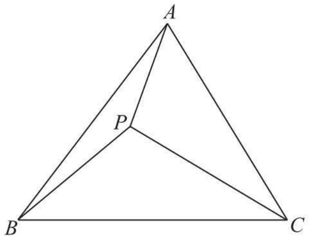


图 1－20

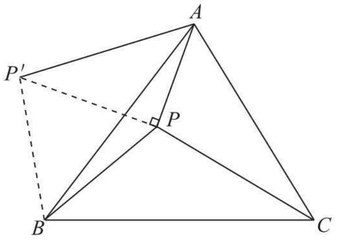


图 1－21

满分解答

如图 1－21 所示，过点 B 作$\angle P'BP=60^\circ$，$BP'=BP$，连接 $P'P$、AP'.

由于$\angle P'BP=60^\circ$，$BP'=BP=4$，可得 $P'P=4$，$\angle P'PB=60^\circ$.

又因$\triangle P'BA \cong \triangle PBC$，得$PC = AP' = 5$，且$AP^2 + P'P^2 = AP'^2$，故$\angle APP' = 90°$. 即得$\angle APB = \angle P'PB + \angle APP' = 150°$.

技巧贴士

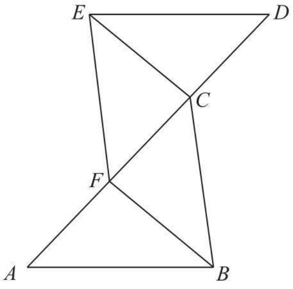
本题的考点在于3、4、5这三条边长. 熟悉直角三角形性质的同学不难发现，若三角形的三边长存在3∶4∶5的关系时，此三角形便是一个直角三角形. 同样常见的例子还有5∶12∶13等. 因此，只要发现这类边长中存在的特殊比例关系，我们便能通过之前所学习过的三角形"平移""旋转""翻折"的一系列变化方法，得到我们所需要的答案.

旋转是图形的基本运动，是初中数学几何中比较常见的解题技巧. 在一些特殊的几何图形(如等边三角形、正方形等)中经常出现，我们往往将这些图形中的某一部分旋转一定角度，为正确地解决问题提供可能.

旋转的关键在于等量"$A = B$"，A边所在的三角形固定不变，将B边所在的三角形进行旋转，使A、B重合形成一个新的图形.

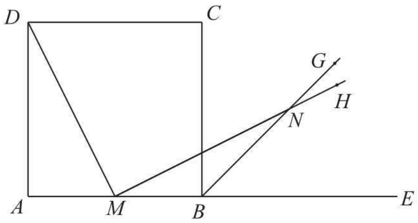
第一期　三角形概念及应用 1

1 【基础】如图所示，已知 A、F、C、D 四点在一条直线上，$AF=CD$，$AB/\!/DE$，且 $AB=DE$，求证：$\angle CBF=\angle FEC$.



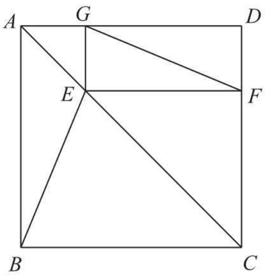
第 1 题

2 【取特殊点添辅助线】如图所示，在正方形 $ABCD$ 中，M 是 AB 的中点，连接 DM，作 $MH\perp DM$ 于点 M，E 是 AB 延长线上一点，BG 是 $\angle CBE$ 的平分线，MH 与 BG 相交于点 N. 求证：$MD=MN$.



第 2 题

3 【连接两点添辅助线】如图所示，E 是正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上一点，$EF\perp CD$，$EG\perp AD$，垂足分别为点 F、点 G，求证：$BE=FG$.



第 3 题