



东博图书

丛书主编 刘景通

江苏省普通高校对口单独招生考试复习丛书

JIANGSUSHENG PUTONG GAOXIAO DUIKOU DANDU ZHAOSHENG KAOSHI FUXI CONGSHU

对口单招

DUIKOU DANZHAO

全程复习方略

数学 (下册)



电子科技大学出版社



东博图书

丛书主编 刘景通

江苏省普通高校对口单独招生考试复习丛书

JIANGSUSHENG PUTONG GAOXIAO DUIKOU DANDU ZHAOSHENG KAOSHI FUXI CONGSHU

对口单招

DUIKOU DANZHAO

全程复习方略

数学 (下册)

执行主编 叶开进

编委

薛纪凤

叶开进

黄晓东

陆璇将

宋琳琳

韩世稳

戴玲玲

李龙明

殷冬美

姜存山



电子科技大学出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

对口单招全程复习方略. 数学 : 全 2 册 / 刘景通主编. -- 成都 : 电子科技大学出版社, 2013.5

ISBN 978-7-5647-1641-7

I. ①对… II. ①刘… III. ①数学课—中等专业学校—升学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 116171 号

江苏省普通高校对口单独招生考试复习丛书

**对口单招 全程复习方略
数学 (下册)**

丛书主编 刘景通

出版: 电子科技大学出版社 (成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编: 610051)

策划编辑: 吴艳玲

责任编辑: 吴艳玲

主 页: www.uestcp.com.cn

电子邮箱: uestcp@uestcp.com.cn

发 行: 新华书店经销

印 刷: 杭州华艺印刷有限公司

成品尺寸: 185mm×260mm 印张: 25.5 字数: 636 千字

版 次: 2013 年 5 月第一版

印 次: 2013 年 5 月第一次印刷

书 号: ISBN 978-7-5647-1641-7

定 价: 60.00 元 (上、下册)

■ 版权所有 侵权必究 ■

- ◆ 本社发行部电话: 028-83202463; 本社邮购电话: 028-83208003
- ◆ 本书如有缺页、破损、装订错误, 请寄回印刷厂调换。



前言

江苏省普通高校对口单独招生考试已经进行了二十余年,而且近几年报名人数逐年增多。在大力发展职业教育的今天,对口单招“对口”中国教育,“对口”千家万户望子成龙、望女成凤的美梦,“对口”每一个渴望迈入大学殿堂把自己锻造成高级技能人才的莘莘学子。面对新大纲、新教材,教辅用书的“对口”成为当务之急。为此,我们广泛征求权威部门专家的意见,邀请了一批江苏省资深教研员及国家级重点职业学校的具有丰富的对口单招教学工作经验,参加过对口单招考试命题、改卷或新考纲制订的骨干教师,为本丛书的高质量出版出谋划策,认真研讨,形成了一套特有的编写体系。

为了帮助参加江苏省普通高校对口单独招生考试的广大考生全面、系统、快速、高效地复习备考,我们全面渗透新教材的理念,严格按照江苏省最新普通高校对口单招考试说明精心编写了“对口单招复习”语文、数学、英语系列丛书,其所具有的权威性、导向性、科学性、实用性不言而喻,它将带给每一个拥有者莫大的福音。

本丛书具有如下特点:

编委阵容强大:作者均系江苏省资深教研人员及国家级重点中等职业学校的一线骨干教师,具有丰富的对口单招复习教学经验,并常年研究江苏省对口单招招生考试命题方向。

编写体系成熟:严格按照江苏省最新对口单独招生考试说明进行编写,分析了近几年的对口单招考试试卷,并根据新的考试方向进行对口单招试题预测。为提高本套丛书质量,特聘请资深专家严格把关。

编写内容齐全:内容涵盖了江苏省最新对口单独招生考试说明中要求掌握的全部内容,并且题目新颖,具有很强的导向性。

由此可见,本丛书具备很强的导向性,是江苏省对口单招考试复习必备指导用书。

语文 分全程复习方略（上、下册）、同步综合检测卷（一轮），专项突破训练试卷（二轮），最后冲刺模拟卷（三轮）。

数学 分全程复习方略（上、下册）、同步综合检测卷（一轮），专项突破训练试卷（二轮），最后冲刺模拟卷（三轮）。

英语 分全程复习方略（上、下册）、同步综合检测卷（一轮），专项突破训练试卷（二轮），最后冲刺模拟卷（三轮）。

本套丛书的编写我们得到了江苏省职业教育系统的有关教研单位、专家及如皋职教中心、如皋第一职业高级中学、海门中等专业学校、仪征工业学校、通州职教中心、海门三厂职教中心、张家港市第三职业高级中学、射阳职教中心、高淳职教中心、泰兴中等专业学校、扬中中等专业学校、兴化中等专业学校等学校的领导与一线骨干教师的大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

如果说这本书是帆，愿它助你破千重浪；如果说这本书是翼，愿它助你越万里云！

由于时间仓促，书中难免存有谬误和不足之处，恳请广大读者批评指正，以利于我们的改进和提高。

《对口单招》编写组
njdongbo@163.com

目录 CONTENTS

第 9 章 平面向量

考点 1	平面向量的概念	1
考点 2	平面向量的加法、减法和数乘向量	4
考点 3	平面向量的坐标表示	7
考点 4	平面向量的内积	9

第 10 章 平面解析几何

考点 1	两点间距离公式及中点公式	15
考点 2	直线的倾斜角和斜率	18
考点 3	直线的方程	20
考点 4	两条直线的位置关系	24
考点 5	点到直线的距离公式	27
考点 6	圆的方程	29
考点 7	直线与圆的位置关系	33
考点 8	直线与圆的方程的实际应用	37
考点 9	椭圆的标准方程和性质	39
考点 10	双曲线的标准方程和性质	48
考点 11	抛物线的标准方程和性质	53
考点 12、13	坐标轴平移与参数方程	59

第 11 章 立体几何

考点 1	平面的基本性质	64
考点 2	空间两条直线的位置关系	67
考点 3	直线与平面的位置关系	69
考点 4	平面与平面的位置关系	74
考点 5	柱、锥、球及其组合体	79

第 12 章 逻辑代数初步

考点 1	二进制及其转换	83
考点 2	命题逻辑与条件判断	87
考点 3	逻辑变量与基本运算	92
考点 4	逻辑式与真值表	95
考点 5	逻辑运算律	99
考点 6	逻辑函数的卡诺图化简法	101

第 13 章 算法与程序框图

考点 1	算法的概念	105
考点 2	程序框图	110
考点 3	算法与程序框图应用举例	117

第 14 章 数据表格信息处理

考点 1	数据表格、数组	122
考点 2	数组的运算	126
考点 3	数据的图示	131
考点 4	用 Excel 处理数据表格	136

第 15 章 编制计划的原理与方法

考点 1	编制计划的有关概念	141
考点 2	关键路径法	144
考点 3	网络图	149
考点 4	横道图	152
考点 5	计划的调整与优化	155

第 16 章 线性规划初步

考点 1	线性规划问题的有关概念	158
考点 2	二元线性规划问题的图解法	162
考点 3	用表格法解线性规划问题	166

参考答案	171
------------	-----

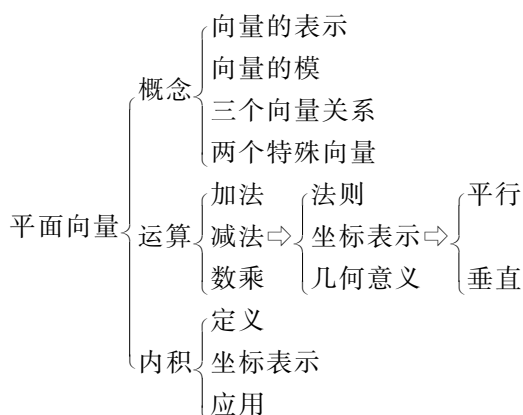
第9章

平面向量

考点解读

考点	解读
考点1 平面向量的概念	了解平面向量的相关概念和表示方法
考点2 平面向量的加法、减法和数乘向量	理解平面向量的加法、减法和数乘向量的相关运算
考点3 平面向量的坐标表示	了解平面向量的坐标表示,能够用坐标表示平面向量
考点4 平面向量的内积	了解平面向量内积的概念及运算规则

知识结构



考点1 平面向量的概念

知识要点

1. 向量的概念:既有_____,又有_____的量叫做向量.

注:向量与我们平时所说的数量的区别:_____.

2. 向量的表示方法:

(1)有向线段;(2)代数表示.

向量常用有向线段来表示,但不能说向量就是有向线段.

3. 向量的模:向量的_____称为向量的模. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模,记作_____;向量 a 的模,记作_____.

4. 两个特殊向量:

(1)零向量:长度为_____,方向_____,记作_____.

(2)单位向量:长度为_____.

5. 向量之间的关系:

(1) 相等向量: _____.

(2) 相反向量: _____.

(3) 平行向量: _____.

注: ①规定零向量与任意向量_____.

②平行向量又叫做_____.

基础过关

1. 设 O 是等边三角形 ABC 的中心, 则向量 $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{CO}$ 是 ()

A. 相等向量

B. 模相等的向量

C. 共线向量

D. 起点的向量

2. 判定下列说法是否正确.

(1) 向量的模表示向量的大小; ()

(2) 零向量的长度不确定; ()

(3) 长度相等的向量叫做相等向量; ()

(4) 共线向量是指在同一条直线上的向量; ()

(5) 零向量与任一向量共线. ()

典例剖析

【例 1】 下列命题中正确的个数为 _____ 个.

(1) 单位向量都相等;

(2) 零向量都相等;

(3) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量, 则 A, B, C, D 四点共线;

(4) 若 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, 则四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

【解】 (1) 方向不能确定, 错误;

(2) 零向量模为零, 方向任意, 正确;

(3) 向量共线但点不一定共线, 错误;

(4) 向量共线时点也可以共线, 错误.

故正确的个数为 1 个.

【方法规律】 向量相等既要考虑长度也要考虑方向; 要正确区分向量的共线与直线的平行之间的关系.

【例 2】 如图所示, 在梯形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 和 BD 交于点 O , 点 E, F 分别是对角线 AC 和 BD 的中点.

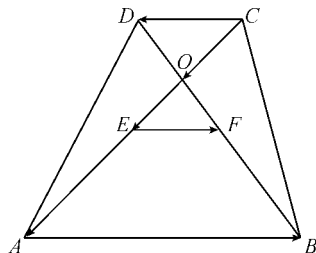
(1) 写出图中与 $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CO}$ 共线的向量;

(2) 写出与 $\overrightarrow{EA}$ 相等的向量.

【解】 (1) 与 $\overrightarrow{EF}$ 共线的向量有 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$; 与 $\overrightarrow{CO}$ 共线的向量有 $\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{EA}$;

(2) 与 $\overrightarrow{EA}$ 相等的向量是 $\overrightarrow{CE}$.

【方法规律】 要正确理解共线向量和相等向量的概念.



考点2 平面向量的加法、减法和数乘向量

知识要点

1. 向量的加法法则:

(1) 平行四边形法则: _____.

注: 始点要 _____.

(2) 三角形法则: _____.

注: 首尾相连, 首指向尾.

2. 向量加法的运算律:

(1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} =$ _____ (交换律);

(2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} =$ _____ (结合律).

3. 向量的减法法则: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} =$ _____.

注: 始点相同, 减向量的终点指向被减向量的终点.

4. 数乘向量的定义: _____.

5. 数乘向量的意义:

(1) 大小: $|\lambda \mathbf{a}| =$ _____;

(2) 方向: 当 $\lambda > 0$ 时, _____;

当 $\lambda < 0$ 时, _____;

当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$ ($\lambda \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$).

6. 数乘向量的运算律:

(1) $\lambda(\mu \mathbf{a}) =$ _____;

(2) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} =$ _____;

(3) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) =$ _____ (λ, μ 为任意实数).

7. 两个向量平行(共线)的充要条件: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow$ _____.

基础过关

1. 化简: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} =$ _____ ()

A. $\overrightarrow{AB}$

B. $\overrightarrow{BA}$

C. $\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{CA}$

2. 化简: $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SP} =$ _____ ()

A. $\overrightarrow{QP}$

B. $\overrightarrow{OQ}$

C. $\overrightarrow{SP}$

D. $\overrightarrow{SQ}$

3. 化简:

(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} =$ _____;

(2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} =$ _____;

(3) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}) =$ _____.

典例剖析

【例1】 设向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 都不是零向量:

(1) 若向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同向, 则 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 的方向 _____, 且 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ _____ $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$;

(2)若 a 与 b 反向,且 $|a| > |b|$, 则 $a+b$ 与 a 的方向_____, 且 $|a+b|$ _____ $|a| - |b|$.

【解】 (1)相同, =;

(2)相同, =.

【方法规律】 本题主要考查共线向量的运算及模的大小比较.

【例2】 已知向量 a 和 b 不共线, 实数 x, y , 满足 $(2x-y)a + 4b = 5a + (x-2y)b$, 求 $x+y$.

【解】 由题意得 $\begin{cases} 2x-y=5, \\ x-2y=4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=-1, \end{cases}$

$\therefore x+y=1$.

【方法规律】 会根据向量的线性关系列出方程(组)求解.

【例3】 如图所示, 已知四边形 $ABCD$ 是一个梯形, $AB \parallel CD$, 且 $AB=2CD$, M, N 分别是 DC 和 AB 的中点, 若 $\overrightarrow{AB}=a, \overrightarrow{AD}=b$, 试用 a, b 表示 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{MN}$.

【解法一】 连接 CN , 则 $AN \parallel DC$,

$\therefore$ 四边形 $ANCD$ 是平行四边形,

$\therefore \overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{AD} = -b$.

又 $\because \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{0}$,

$\therefore \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{NB} = b - \frac{1}{2}a$,

$\therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CN} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -b + \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a - b$.

【解法二】 $\because \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{0}$,

即 $a + \overrightarrow{BC} + \left(-\frac{1}{2}a\right) + (-b) = \mathbf{0}$,

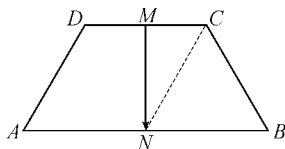
$\therefore \overrightarrow{BC} = b - \frac{1}{2}a$.

又 $\because$ 在四边形 $ANMD$ 中, 有 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA} = \mathbf{0}$,

即 $b + \frac{1}{4}a + \overrightarrow{MN} + \left(-\frac{1}{2}a\right) = \mathbf{0}$,

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}a - b$.

【方法规律】 比较两种解法, 显然解法二更简捷.



互动演练

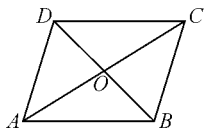
1. 如图所示, 在四边形 $ABCD$ 中, 若 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, 则相等的向量是 ()

A. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CB}$

B. $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OD}$

C. $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$

D. $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{OC}$



2. 若 M 是 $\triangle ABC$ 的重心, 则下列向量中与 $\overrightarrow{AB}$ 共线的是

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$

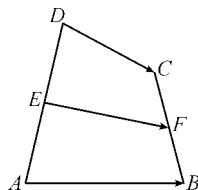
B. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}$

C. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$

D. $3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}$

3. 已知 $\square ABCD$ 的两条对角线相交于点 M , 且 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b$, 则 $\overrightarrow{MA} =$ _____, $\overrightarrow{MB} =$ _____, $\overrightarrow{MC} =$ _____, $\overrightarrow{MD} =$ _____.

4. 已知四边形 $ABCD$ 的边 AD 和 BC 的中点分别为 E, F , 求证: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.



同步精练

- 下列等式中, 正确的个数是 ()
 ① $a+b=b+a$; ② $a-b=b-a$; ③ $0-a=-a$; ④ $-(-a)=a$; ⑤ $a+(-a)=0$.
 A. 5 个 B. 4 个 C. 3 个 D. 2 个
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{BC}=a, \overrightarrow{CA}=b$, 则 $\overrightarrow{AB}$ 等于 ()
 A. $a+b$ B. $-(a+b)$ C. $a-b$ D. $b-a$
- 若四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 则 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BA}$ 等于 ()
 A. $\overrightarrow{BD}$ B. $\overrightarrow{AD}$ C. $\overrightarrow{AB}$ D. $\overrightarrow{AC}$
- 在平行四边形 $ABCD$ 中, 若 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$, 则 ()
 A. $\overrightarrow{AD} = \mathbf{0}$ B. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$ 或 $\overrightarrow{AD} = \mathbf{0}$
 C. 四边形 $ABCD$ 是矩形 D. 四边形 $ABCD$ 是正方形
- 化简下列各式:
 (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FA} =$ _____;
 (2) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{OM} =$ _____.
- 在 $\square ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=a, \overrightarrow{AD}=b$, 则 $\overrightarrow{AC} =$ _____, $\overrightarrow{DB} =$ _____.
- 在平行四边形 $ABCD$ 中, 若 $\overrightarrow{AB}=a, \overrightarrow{AD}=b, \overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$, 则 $\overrightarrow{BN} =$ _____ (用 a, b 表示).
- 已知平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 交于 E, O 是任意一点.
 求证: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OE}$.

考点3 平面向量的坐标表示

知识要点

1. 平面向量的坐标表示: 在平面直角坐标系中, i, j 分别为 x, y 轴正方向上的单位向量, 则称 i, j 为基底, 因此平面内任一向量 a 都可表示成 $a = xi + yj$, 我们把 (x, y) 叫做向量 a 在平面直角坐标系中的坐标, 记做 $a = (x, y)$, 其中 x 称为向量 a 在 x 轴上的横坐标, y 称为向量 a 在 y 轴上的纵坐标.

2. 相等向量: $a = b \Leftrightarrow$ _____.

3. 坐标运算: $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$

$a + b =$ _____; $a - b =$ _____;

$\lambda a =$ _____; $a \cdot b \Leftrightarrow$ _____.

4. 几个公式: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

(1) 向量坐标公式: $\overrightarrow{AB} =$ _____;

(2) 平面向量模的计算公式: $|\overrightarrow{AB}| =$ _____;

(3) 两点间距离公式: $|AB| =$ _____;

(4) 中点公式: 中点 $P(x, y)$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____.

基础过关

- 已知向量 $a = (-2, 4), b = (1, -2)$, 则 a 与 b 的关系是 ()
A. 不共线 B. 相等 C. 同向 D. 反向
- 若 $M(2, 4), N(-2, 3)$, 则 $\overrightarrow{MN} =$ _____, $\overrightarrow{NM} =$ _____.
- 已知 $a = (2, 4), b = (-1, -3)$, 则 $|3a + 2b| =$ _____.

典例剖析

【例1】 已知向量 $a = (1, x), b = (y, 1), e_1 = a + 2b, e_2 = 2a - b$ 且 $e_1 = 2e_2$, 求 x, y 的值.

【解】 由 $e_1 = 2e_2$ 得 $a + 2b = 4a - 2b$,

化简得 $3a = 4b$, 即 $(3, 3x) = (4y, 4)$,

$$\therefore \begin{cases} 3 = 4y, \\ 3x = 4, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = \frac{4}{3}, \\ y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

【方法规律】 把向量之间的线性关系转化为坐标关系, 再利用向量相等的概念列方程(组)求解.

【例2】 已知平行四边形 $ABCD$ 的顶点 $A(-1, -2), B(3, -1), C(5, 6)$, 求顶点 D 的坐标.

【解法一】 $\because \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = (1, 5), \therefore D(1, 5).$

【解法二】 设 $D(x, y)$, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$,

故 $(-1, -2) - (3, -1) = (x, y) - (5, 6), \therefore D(x, y) = (1, 5).$

【方法规律】 在平行四边形中, 对角的两个顶点坐标的和相等.

【例3】 已知 A, B, C 三点坐标分别为 $(-1, 0), (3, -1), (1, 2)$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

(1) 求点 E, F 及向量 $\overrightarrow{EF}$ 的坐标;

(2) 求证: $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AB}$.

【解】 (1) $\because \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BF} = \left(\frac{7}{3}, 0\right)$,

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right),$$

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 点 F 的坐标为 $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$, 向量 $\overrightarrow{EF}$ 的坐标为 $\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$;

(2) 证明: $\because \overrightarrow{AB} = (4, -1) = \frac{3}{2}\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{EF}$,

$\therefore \overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AB}$.

【方法规律】 两个向量平行的判定方法: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow$ 存在非零实数 λ 使得 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$.

互动演练

1. 若向量 $\mathbf{a} = (x, 1)$, $\mathbf{b} = (4, x)$, 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线且方向相同.
2. 设 $\overrightarrow{PA} = (k, 12)$, $\overrightarrow{PB} = (4, 5)$, $\overrightarrow{PC} = (10, k)$, 则当 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, A, B, C 三点共线.
3. 若 $\overrightarrow{AB} = (5, -3)$, $C(-1, 3)$, $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$, 则点 D 坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

同步精练

1. 与向量 $\mathbf{a} = (12, 5)$ 平行的单位向量为 ()
 - A. $\left(\frac{12}{13}, 5\right)$
 - B. $\left(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$
 - C. $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ 或 $\left(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$
 - D. $\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$
2. 已知两点 $A(4, 1)$, $B(7, -3)$, 则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量是 ()
 - A. $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$
 - B. $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
 - C. $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$
 - D. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$
3. 已知 $\overrightarrow{MA} = (-2, 4)$, $\overrightarrow{MB} = (2, 6)$, 则 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} =$ ()
 - A. $(0, 5)$
 - B. $(0, 1)$
 - C. $(2, 5)$
 - D. $(2, 1)$
4. 与向量 $\mathbf{a} = (3, -4)$ 垂直的一个单位向量为 ()
 - A. $(4, 3)$
 - B. $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$
 - C. $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$
 - D. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$
5. 设 $\mathbf{a} = \left(\frac{3}{2}, \sin \alpha\right)$, $\mathbf{b} = \left(\cos \alpha, \frac{1}{3}\right)$, 且 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则锐角 α 为 ()
 - A. 30°
 - B. 60°
 - C. 75°
 - D. 45°
6. 已知 $\mathbf{a} = (3, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -1)$, 若 $\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ 平行, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.
7. 已知向量 $\mathbf{a} = (2, -1)$, $\mathbf{b} = (-1, m)$, $\mathbf{c} = (-1, 2)$, 若 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \parallel \mathbf{c}$, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设 $\vec{OA} = (1, -2)$, $\vec{OB} = (a, -1)$, $\vec{OC} = (-b, 0)$, 其中 $a > 0, b > 0$, O 为坐标原点. 若 A, B, C 三点共线, 求 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值.

考点4 平面向量的内积

知识要点

1. 向量的夹角

(1) 定义: _____;

(2) 范围: _____.

注: ① 当 $\theta = 0$ 时, a 与 b _____;

② 当 $\theta = \pi$ 时, a 与 b _____;

③ 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, a 与 b _____.

2. 内积

(1) 概念: _____;

(2) 坐标运算: _____;

(3) 运算律: _____

注: 内积是一个实数, 而不是一个向量.

3. 向量的夹角公式: _____.

4. 两个重要结论:

(1) _____;

(2) _____.

基础过关

- 已知 a, b 均为单位向量, 它们的夹角为 60° , 则 $|a + 3b| =$ _____ ()
A. $\sqrt{7}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{13}$ D. 4
- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $|\vec{AB}| = 3$, $|\vec{AC}| = 4$, $|\vec{BC}| = 5$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} =$ _____.
- 已知 $|a| = 2$, $|b| = 5$, $a \cdot b = -3$, 则 $|a + b| =$ _____.

典例剖析

【例 1】 已知 $a=(2,3), b=(-1,-2), c=(2,1)$, 试求 $a \cdot (b \cdot c)$ 和 $(a \cdot b) \cdot c$.

【解】 $\because b \cdot c = (-1, -2) \cdot (2, 1) = (-1) \times 2 + (-2) \times 1 = -4,$

$\therefore a \cdot (b \cdot c) = (2, 3) \cdot (-4) = (-8, -12).$

$\because a \cdot b = (2, 3) \cdot (-1, -2) = 2 \times (-1) + 3 \times (-2) = -8,$

$\therefore (a \cdot b) \cdot c = (-8) \cdot (2, 1) = (-16, -8).$

【方法规律】 $a \cdot (b \cdot c) \neq (a \cdot b) \cdot c$, 这是两个不同的向量.

【例 2】 已知两单位向量 a 与 b 的夹角为 120° , 若 $c=2a-b, d=3b-a$, 试求 c 与 d 的夹角的余弦值.

【解】 由题意得 $|a|=|b|=1$, 且 a 与 b 的夹角为 120° , $\therefore a \cdot b = |a||b|\cos 120^\circ = -\frac{1}{2},$

$\because |c|^2 = c \cdot c = (2a-b) \cdot (2a-b) = 4a^2 - 4a \cdot b + b^2 = 7, \therefore |c| = \sqrt{7},$

同理可得 $|d| = \sqrt{13}$, 而 $c \cdot d = (2a-b) \cdot (3b-a) = 7a \cdot b - 3b^2 - 2a^2 = -\frac{17}{2},$

设 θ 为 c 与 d 的夹角, 则 $\cos \theta = \frac{c \cdot d}{|c| \cdot |d|} = \frac{-\frac{17}{2}}{\sqrt{7} \times \sqrt{13}} = -\frac{17\sqrt{91}}{182}.$

【方法规律】 本例主要考查向量的模的求法和向量夹角的计算, 要熟练掌握内积的应用.

【例 3】 已知 $a=(4,3), b=(-1,2), m=a-\lambda b, n=2a+b$, 按下列条件求实数 λ 的值.

(1) $m \perp n$; (2) $m \parallel n$; (3) $|m|=|n|$.

【解】 由题意得 $m=a-\lambda b=(4+\lambda, 3-2\lambda), n=2a+b=(7, 8).$

(1) $m \perp n \Rightarrow (4+\lambda) \cdot 7 + (3-2\lambda) \cdot 8 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{52}{9}.$

(2) $m \parallel n \Rightarrow (4+\lambda) \cdot 8 - (3-2\lambda) \cdot 7 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}.$

(3) $|m|=|n| \Rightarrow \sqrt{(4+\lambda)^2 + (3-2\lambda)^2} = \sqrt{7^2 + 8^2} \Rightarrow 5\lambda^2 - 4\lambda - 88 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm 2\sqrt{111}}{5}.$

【方法规律】 本例考查了向量在坐标形式下的基本运算.

互动演练

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A(5, -1), B(-1, 7), C(1, 2)$, 求角 B 的余弦值.