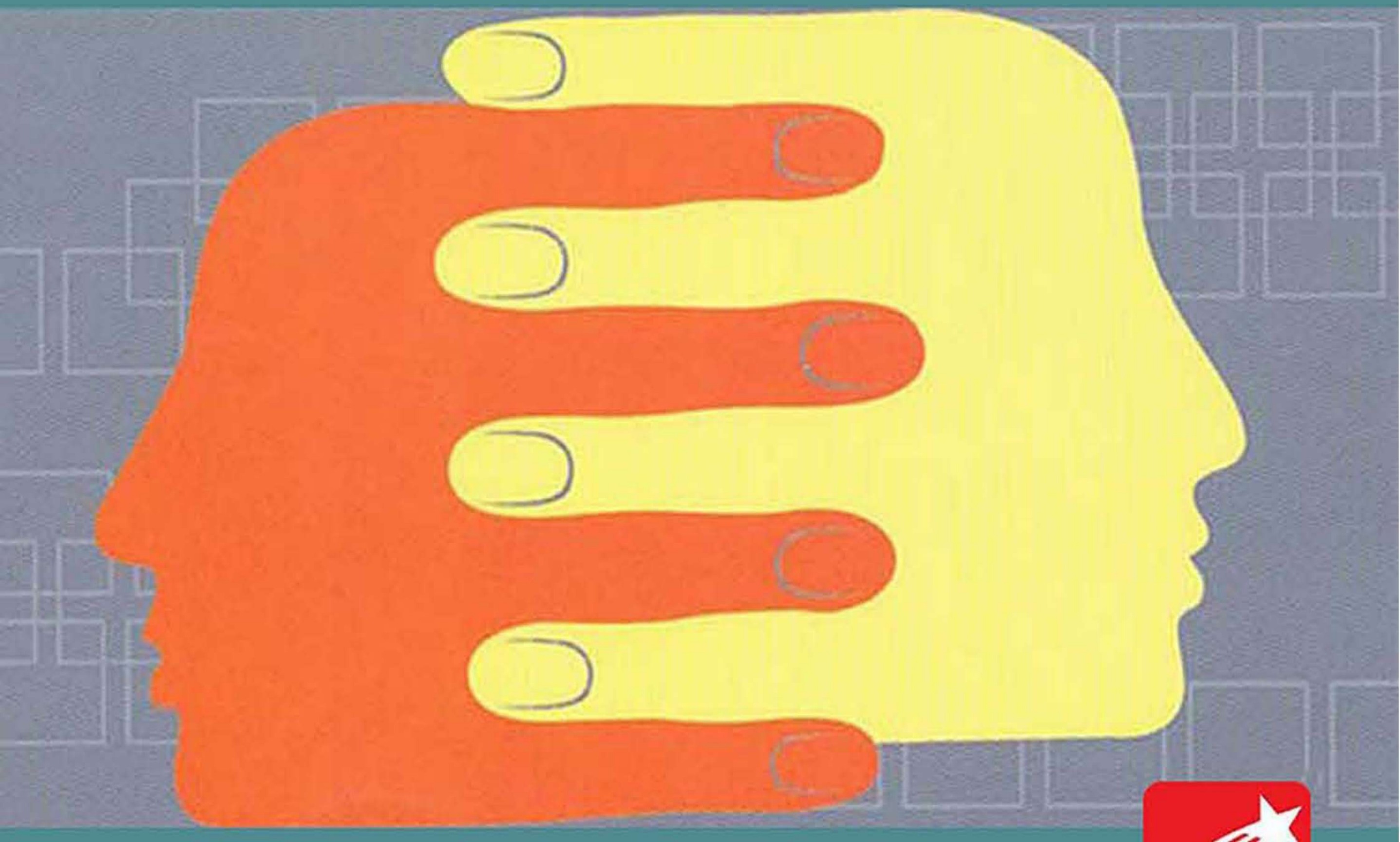
一类p(x)-Laplace方程及方程组解的存在性研究

张晓丽 著



内蒙古科学技术出版社

YILEI p(x)-Laplace FANGCHENG JI
FANGCHENGZU JIE DE CUNZAIXING YANJIU

一类p(x)-Laplace方程及方程组解的存在性研究

张晓丽 著

内蒙古科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

一类p（x）– Laplace方程及方程组解的存在性研究 / 张晓丽著. — 赤峰：内蒙古科学技术出版社，2018. 4
ISBN 978-7-5380-2952-9

Ⅰ. ①一… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①拉普拉斯方程—研究 Ⅳ. ①O175. 25

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第089606号

一类p（x）– Laplace方程及方程组解的存在性研究

著　　者：张晓丽
责任编辑：马洪利
封面设计：永　胜
出版发行：内蒙古科学技术出版社
地　　址：赤峰市红山区哈达街南一段4号
网　　址：www.nm-kj.cn
邮购电话：0476-8227078
印　　刷：赤峰市阿金奈图文制作有限责任公司
字　　数：162千
开　　本：787mm × 1092mm　1/16
印　　张：10
版　　次：2018年4月第1版
印　　次：2018年4月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5380-2952-9
定　　价：30.00元

前　言

近半个世纪以来,数学不再仅是传统领域中的数学家、物理学家、力学家等手中的工具，而是越来越多地应用到生物、政治、经济、军事等非传统领域.于是，在自然科学和工程技术中，越来越多地遇到微分方程的初值问题，研究其解的存在性对实际问题的解决有着决定性的意义.而仅用数学分析的方法解决不了很多方程的相关问题，于是临界点定理、拓扑度理论、上下解方法、锥不动点定理等就占据了重要的地位.

Laplace 方程的重要性是众所周知的，它是反映扩散方程、椭圆型方程的重要组成部分.20 世纪 80 年代以来，Laplace 方程的理论被成功地推广到 p-Laplace 方程.p(x)-Laplace 方程是非线性椭圆型方程的一个新课题，它在弹性力学等问题中有重要的应用背景.近些年来，随着偏微分方程领域的研究越来越深入，p(x)-Laplace 方程的研究引起了人们的关注.

本书主要利用上下解方法和变分方法研究了一类奇异 p(x)-Laplace 方程正解的存在性.全书共三章：第一章是基础理论，介绍了椭圆与抛物型方程引论中的一些基础知识；第二章讨论了奇异 p(x)-Laplace 方程正解的存在性；第三章讨论了 p(x)-Laplace 方程组解的存在性.

在本书编写过程中，得到了河北工业大学理学院刘辉昭教授的指导和帮助，同时得到了赤峰学院数学与统计学院各位领导和李玉叶老师的大力支持，在此一并表示衷心的感谢.

本书的出版得到了国家自然科学基金(项目批准号:11762001)和内蒙古自然科学基金面上项目（批准号：2016MS0101）的资助.

由于作者水平有限，书中错误或不足之处在所难免，恳请读者不吝指正.

目 录

第 1 章 基础理论

作为本书的基础知识，本章主要介绍有关 Sobolev 空间和 *Hölder* 空间的基本理论.

§1.1 常用不等式和某些基本技术

本节介绍偏微分方程理论中一些常用的不等式，以及磨光、切断、单位分解和局部拉平等基本技术.

1.1.1 几个常用不等式

Young 不等式 设 $a>0, b>0, p>1, q>1,$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$ 则有

$$ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

特别地，当 $p=q=2$ 时，上述不等式也称为 Cauchy 不等式.

设 $\varepsilon>0,$ 在上述不等式中用 $\varepsilon^{\frac{1}{p}}a$ 和 $\varepsilon^{-\frac{1}{p}}b$ 代替 a 和 b，可得带 ε 的 Young 不等式：

设 $a>0, b>0, p>1, \varepsilon>0, q>1,$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$ 则有

$$ab \le \frac{\varepsilon a^p}{p}+\frac{\varepsilon^{\frac{-q}{p}} b^q}{q} \le \varepsilon a^p+\varepsilon^{\frac{-q}{p}} b^q.$$

特别地，当 $p=q=2$ 时，它变为

$$ab \le \frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2,$$

称之为带 ε 的 Cauchy 不等式.

设 $\Omega \subset R^n$ 为一可测集. 下面是 L^p 空间中的几个最常用的不等式.

Hölder **不等式** 设 $p>1, q>1$, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 若 $f\in L^{P}(\Omega)$, $g\in L^{q}(\Omega)$, 则 $f\cdot g\in L^{1}(\Omega)$, 且

$$\int_{\Omega}|f(x)g(x)|\,dx\le \|f(x)\|_{L^{p}(\Omega)}\cdot\|g(x)\|_{L^{q}(\Omega)}.$$

特别地，当 $p=q=2$ 时，它变成

$$\int_{\Omega}|f(x)g(x)|dx\le \|f(x)\|_{L^{2}(\Omega)}\cdot\|g(x)\|_{L^{2}(\Omega)},$$

称之为 Schwarz 不等式.

Minkowski **不等式** 设 $1\le p<+\infty, f, g\in L^{p}(\Omega)$, 则 $f+g\in L^{p}(\Omega)$, 且

$$\|f+g\|_{L^{p}(\Omega)}\le\|f\|_{L^{p}(\Omega)}+\|g\|_{L^{p}(\Omega)}.$$

1.1.2 L^{p} 中的列紧性

设 $\Omega\subset R^{n}$ 为一可测集.

命题 1.1.1 当 $1<p<+\infty$ 时，$L^{p}(\Omega)$ 中一集合为（相对）弱列紧（即从其中任一序列内都能抽出弱收敛的子序列）的重要条件是：范数有界.

命题 1.1.2 若 $1\le p<+\infty$ 时，则函数族 $X\subset L^{p}(\Omega)$ 为（相对）强列紧（即从其中任一序列内都能抽出强收敛的子序列）的重要条件为：

（1） $\{\|f\|_{L^{p}(\Omega)}; f\in X\}$ 有界；

（2） X 同等整体连续，即对 $f\in X$ 一致地有

$$\lim_{h\to 0}\int_{\Omega}|f(x+h)-f(x)|^{p}dx=0;$$

（3）对 $f\in X$ 一致地有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\{x\in\Omega;|x|\ge R\}}|f(x)|^{p}dx=0.$$

注意：假如 Ω 有界，则条件(3)天然满足.

1.1.3 空间$C^k(\Omega)$和$C_0^k(\Omega)$

设$\Omega \subset R^n$为一开集，k为非负整数或∞.

定义 1.1.1 $C^k(\Omega)$和$C^k(\overline{\Omega})$分别表示Ω和$\overline{\Omega}$上k次连续可微函数的全体所构成的集合. 特别地，$C^0(\Omega)$和$C^0(\overline{\Omega})$也简记为$C(\Omega)$和$C(\overline{\Omega})$. 在$C^k(\overline{\Omega})$中引进范数

$$|u|_{k;\Omega} = \sum_{|\alpha| \le k} \sup_{\Omega} |D^\alpha u|,$$

其中$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$称为多重指标，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$为非负整数，$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$，

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

定义 1.1.2 设$u(x)$为定义在Ω上的函数，我们记

$$\sup pu = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \ne 0\}},$$

称之为$u(x)$的支集.

定义 1.1.3 $C_0^k(\Omega)$表示$C^k(\Omega)$中支集为Ω的紧子集的函数全体所构成的集合. 特别地，将$C_0^0(\Omega)$简记为$C_0(\Omega)$.

1.1.4 磨光算子

用光滑函数去逼近一给定的函数，是偏微分方程中常用的一种基本技术. 构造光滑逼近函数的途径很多，下面介绍常用的一种，称为磨光法.

设$j(x) \in C_0^\infty(R^n)$为一非负函数，在单位球$B_1(0) = \{x \in R^n; |x| < 1\}$以外的地方为零，且满足$\int_{R^n} j(x) dx = 1$. 这种函数典型的例子是

$$j(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\ge 1.\end{cases}$$

其中

$$A=\int_{B_1(0)}e^{\frac{1}{|x|^2-1}}dx.$$

对任意给定的$\varepsilon>0$，记

$$j_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

则$j_\varepsilon(x)$在球$B_\varepsilon(0)=\{x\in R^n;|x|<\varepsilon\}$以外的地方为零, 且$\int_{R^n}j_\varepsilon(x)dx=1$.

定义 1.1.4 对函数$u\in L^1_{loc}(R^n)$, 令

$$J_\varepsilon u(x)=(j_\varepsilon*u)(x)\equiv\int_{R^n}j_\varepsilon(x-y)u(y)dy.$$

称J_ε为磨光算子，$J_\varepsilon u(x)$为$u(x)$的磨光，$j_\varepsilon(x)$为磨光核. 这里和以后我们用$L^1_{loc}(R^n)$表示R^n中全体局部可积函数所构成的集合.

命题 1.1.3 设u为定义在R^n上的函数，在有界区域Ω外为零.

（1）若$u\in L^1_{loc}(\Omega)$, 则$J_\varepsilon u\in C^\infty(R^n)$.

（2）若$\sup pu\subset\Omega$, 又$dist(\sup pu,\partial\Omega)>\varepsilon$, 则$J_\varepsilon u\in C_0^\infty(\Omega)$.

（3）若$u\in L^p(\Omega)(1\le p<+\infty)$, 则$J_\varepsilon u\in L^p(\Omega)$, 且

$$\|J_\varepsilon u\|_{L^p(\Omega)}\le\|u\|_{L^p(\Omega)},\ \lim_{\varepsilon\to0^+}\|J_\varepsilon u-u\|_{L^p(\Omega)}=0.$$

（4）若$u\in C(\Omega)$, $\overline{G}\subset\Omega$, 则在$G$上一致地有

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}J_\varepsilon u(x)=u(x).$$

（5）若$u\in C(\overline{\Omega})$, 则在$\Omega$上一致地有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} J_\varepsilon u(x)=u(x).$$

推论 1.1.1 设 $p\ge 1$，Ω 是 R^n 中的开集，则 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.

由磨光算子的定义，我们可以看出：磨光函数在某点的值依赖于函数本身在这点附近的值. 因此，当我们考虑用光滑函数在边界附近去逼近一给定函数时，上面引进的磨光算法并不合适. 为此，我们可以先延拓给定的函数，然后磨光，有时也可以采用下面的修正磨光法（上面引进的磨光法也称为标准磨光法）作为例子，我们取区域为

$$Q=\{x\in R^n;|x_i|<1,i=1,2,\cdots,n\},$$

而考虑 Q 的顶边

$$\{x\in R^n;x_n=1,|x_i|<1,i=1,\cdots,n-1\}$$

和底边

$$\{x\in R^n;x_n=-1,|x_i|<1,i=1,\cdots,n-1\}$$

附近的磨光.

定义 1.1.5 设 $u\in L^1(Q)$，定义

$$J_\varepsilon^- u(x)=\int_Q j_\varepsilon(x_1-y_1)\cdots j_\varepsilon(x_{n-1}-y_{n-1})j_\varepsilon(x_n-y_n-2\varepsilon)u(y)dy,$$

$$J_\varepsilon^+ u(x)=\int_Q j_\varepsilon(x_1-y_1)\cdots j_\varepsilon(x_{n-1}-y_{n-1})j_\varepsilon(x_n-y_n+2\varepsilon)u(y)dy,$$

其中 $j_\varepsilon(\tau)$ 为一维磨光核.

容易验证，$J_\varepsilon^- u(x)$ 在 Q 的顶边上有定义，而 $J_\varepsilon^+ u(x)$ 在 Q 的底边上有定义.

1.1.5 切断因子

设 $\Omega\subset R^n$ 为边界适当光滑的有界区域，$\Omega'\subset\subset\Omega$（即 Ω' 为 Ω 的子区域，满足 $\overline{\Omega'}\subset\Omega$）. 令 $d=\frac{1}{4}dist(\Omega',\partial\Omega)$, 则 $d>0$. 又设

$$\Omega'' = \{x \in \Omega; dist(x, \Omega') < d\},$$

则 $dist(\Omega'', \partial\Omega) = 3d$. 用 $\chi_{\Omega''}(x)$ 表示 Ω'' 的特征函数，并考虑 $\chi_{\Omega''}(x)$ 的磨光函数

$$\eta(x) = J_d(\chi_{\Omega''}(x)),$$

其中 d 为磨光半径. 易见 $\eta(x)$ 具有如下性质：

$$\eta \in C_0^\infty(\Omega), 0 \le \eta(x) \le 1, \eta(x) \equiv 1 \text{于} \Omega', |\nabla \eta| \le \frac{C}{d},$$

其中 C 仅依赖于 Ω. 有时我们可能还会用到 Ω 以外 η 的值，这时如无特别说明，都认为 η 在 Ω 外取值为零. 我们把具有上述性质的函数称为 Ω 上的相对于子区域 Ω' 的切断函数（因子）.

1.1.6 单位分解

如上所述，引进切断因子可将问题局部化. 在偏微分方程的研究中，我们常常希望将局部化后所得结果整合而得全局性结果. 为此，需要借助另一种手段，即所谓的单位分解. 以下是关于单位分解的基本定理.

定理 1.1.1 设 K 为 R^n 中的紧集，$U_1, \cdots, U_N$ 为 K 的一个开覆盖，则存在函数 $\eta_1 \in C_0^\infty(U_1), \cdots$，$\eta_N \in C_0^\infty(U_N)$, 使得

（1）$0 \le \eta_i(x) \le 1, \forall x \in U_i (i = 1, \cdots, N)$;

（2）$\sum_{i=1}^{N} \eta_i(x) = 1, \forall x \in K.$

我们称 $\eta_1, \cdots, \eta_N$ 为从属于 $U_1, \cdots, U_N$ 的单位分解.

1.1.7 区域边界的局部拉平

在边值问题，特别是它的古典解的研究中总要涉及到所论域的边界的光滑性. 边界的

光滑性，通常是通过边界的局部拉平按下述方式来定义的.

定义 1.1.6 设$\Omega \subset R^n$为一有界区域. 称$\partial\Omega$具有C^k光滑性，记为$\partial\Omega \in C^k$, 如果对任意的$x^0 \in \partial\Omega$，存在x^0的一个邻域U和一个属于C^k的可逆映射$\Psi : U \to B_1(0)$, 使得

$$\Psi(U \cap \Omega) = B_1^+(0) = \{y \in B_1(0); y_n > 0\},$$

$$\Psi(U \cap \partial\Omega) = \partial B_1^+(0) \cap \{y \in R^n; y_n = 0\}.$$

§1.2 Sobolev 空间和 *Hölder* 空间

1.2.1 弱导数

定义 1.2.1 设Ω是R^n中的开集，$u \in L^1_{loc}(\Omega)$,$1 \le i \le n$. 如果存在$g_i \in L^1_{loc}(\Omega)$, 使得

$$\int_\Omega g_i \varphi dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

则称g_i为u关于变量x_i的弱导数，仍用通常的记号记为

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i,$$

有时也记为$D_i u = g_i$. 如果对所有的$1 \le i \le n$，u关于变量x_i的弱导数g_i都存在，则称$g = (g_1, \cdots, g_n)$为u的弱梯度，记为$\nabla u = g$，有时也记为$Du = g$. 这时我们也称函数u是弱可微的，并记$u \in W^1(\Omega)$. 类似地可引进k阶弱导数和k次弱可微. 如果函数u在Ω上是k次弱可微的，则记$u \in W^k(\Omega)$.

1.2.2 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$和$W_0^{k,p}(\Omega)$

定义 1.2.2 设k为非负整数，$p \geq 1, \Omega$是R^n中的开集. 我们称集合

$$\left\{u \in W^k(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{对满足}|\alpha| \leq k\text{的任意}\alpha\right\}$$

赋以范数

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} \left|D^\alpha u\right|^p dx\right)^{1/p} \qquad (1.2.1)$$

后得到的线性赋范空间为 Sobolev 空间$W^{k,p}(\Omega)$.

可以证明，$W^{k,p}(\Omega)$在上述范数下是一个 Banach 空间. 当时，常将$p=2$，$W^{k,p}(\Omega)$记作$H^k(\Omega)$.

定义 1.2.3 $W_0^{k,p}(\Omega)$表示$C_0^\infty(\Omega)$在$W^{k,p}(\Omega)$中的闭包.

命题 1.2.1 $W^{k,p}(R^n) = W_0^{k,p}(R^n)$，$W^{0,p}(\Omega) = W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$，但对有界区域$\Omega$，当$k \geq 1$时$W_0^{k,p}(\Omega)$是$W^{k,p}(\Omega)$的真子空间.

命题 1.2.2 $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$在$W^{k,p}(\Omega)$中是稠密的.

定义 1.2.4 我们说区域Ω具有线段性质，如果存在$\partial\Omega$的一个有限开覆盖$\{U_i\}$和相应的非零向量$\{y^i\}$，使得对所有$x \in \overline{\Omega} \cap U_i, t \in (0,1)$，有$x + ty^i \in \Omega$.

命题 1.2.3 若区域Ω具有线段性质，则$C^\infty(\overline{\Omega})$在$W^{k,p}(\Omega)$中是稠密的.

作为命题 1.1.1 和命题 1.1.2 的推论，我们有：

命题 1.2.4 当$1 < p < +\infty$时，$W^{k,p}(\Omega)$中一集合为（相对）弱列紧的充要条件是范数有界.

命题 1.2.5 设$\Omega \subset R^n$为一有界区域，$1 \leq p < +\infty$. 若函数族$X \subset L^p(\Omega)$在

$W^{k+1,p}(\Omega)$中是有界的，则 X 在$W^{k,p}(\Omega)$中是（相对）强列紧的.

1.2.3 弱导数的运算法则

利用逼近定理（命题 1.1.3），可以将微积分中的一些运算法则推广到弱导数. 例如：

命题 1.2.6（乘积运算） 设$u,v\in H^1(\Omega)$, 则

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i}=u\frac{\partial v}{\partial x_i}+v\frac{\partial u}{\partial x_i},\quad i=1,\cdots,n.$$

命题 1.2.7（变量替换） 设Ω, D 是 R^n 中的开集， $u(x)\in W^1(\Omega)$, $\Phi(y): D\to\Omega$ 为一连续可微映射，则

$$\frac{\partial u(\Phi(y))}{\partial y_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}, k=1,\cdots,n.$$

其中$\Phi=(\Phi_1,\cdots,\Phi_n)$.

命题 1.2.8（复合运算） 设 $f(s)$是 R 上的连续函数， $f'(s)$分段连续，其间断点的集合记为L, 且存在常数k，使得$|f'(s)|\le k$. 又设$u\in W^1(\Omega)$, 则 $f(u)\in W^1(\Omega)$, 且

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x_i}=\begin{cases} f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, & 若 u\notin L, \\ 0, & 若 u\in L. \end{cases}$$

1.2.4 Sobolev 空间的内插不等式

定义 1.2.5 我们说区域Ω具有一致内锥性质，如果存在有限锥V, 使得每一点$x\in\Omega$是一个包含于Ω内且全等于V 的有限锥V_x 的顶点.

定理 1.2.1（Ehrling-Nirenberg-Gagliardo 插值不等式） 设$\Omega\subset R^n$为具有一致内锥性质的有界区域，则对任意$\varepsilon>0$，恒存在只依赖于 $p\ge 1$，k,ε 与区域Ω的常数$C>0$，使得对任何$u\in W^{k,p}(\Omega)$, 有

$$\sum_{|\beta|\le k-1}\int_\Omega \left|D^\beta u\right|^p dx \le \varepsilon \sum_{|\alpha|=k}\int_\Omega \left|D^\alpha u\right|^p dx + C\int_\Omega |u|^p dx .$$

这个不等式揭示的是这样一个重要的事实：$W^{k,p}(\Omega)$中函数的中间导数的 L^p 模可通过它本身及其最高阶导数的 L^p 模估出.

1.2.5 *Hölder* 空间 $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$和$C^{k,\alpha}(\Omega)$

定义 1.2.6 设$u(x)$是定义于$\Omega \subset R^n$ 上的函数. 对于$0<\alpha<1$，引入 *Hölder* 半范数

$$[u]_{\alpha;\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\ne y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

用$C^\alpha(\overline{\Omega})$表示$\Omega$上满足$[u]_{\alpha;\Omega}<+\infty$的函数的全体, 并定义范数如下:

$$|u|_{\alpha;\Omega} = |u|_{0;\Omega} + [u]_{\alpha;\Omega} .$$

其中$|u|_{0;\Omega}$表示$u(x)$在Ω上的最大模, 即

$$|u|_{0;\Omega} = \sup_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

进一步, 可对非负整数k, 定义函数空间

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u; D^\beta u \in C^\alpha(\overline{\Omega}), \text{对满足}|\beta|\le k\text{的任意}\beta\},$$

并定义半范数

$$[u]_{k,\alpha;\Omega} = \sum_{|\beta|=k}[D^\beta u]_{\alpha;\Omega} ,$$

$$[u]_{k,0;\Omega} = [u]_{k;\Omega} = \sum_{|\beta|=k}\left|D^\beta u\right|_{0;\Omega} ,$$

和范数

$$|u|_{k,\alpha;\Omega} = \sum_{|\beta|\le k}\left|D^\beta u\right|_{\alpha;\Omega} ,$$