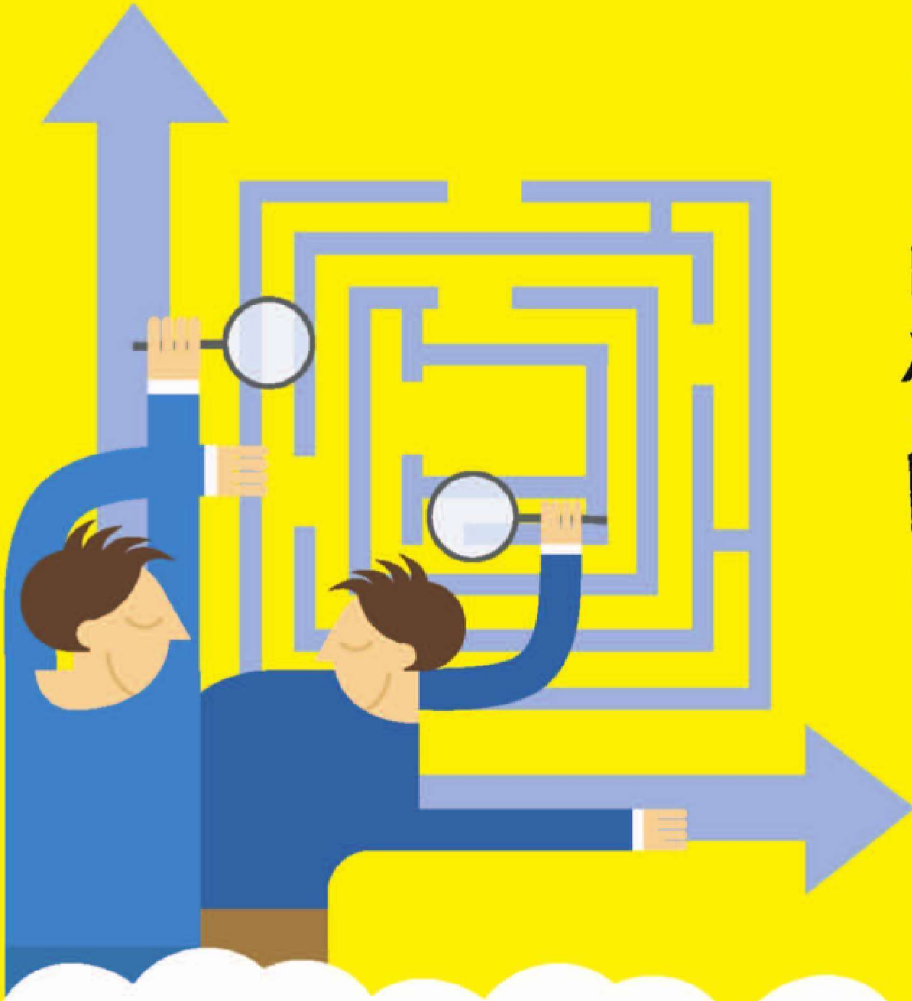
更有趣的解题
更高效的学习



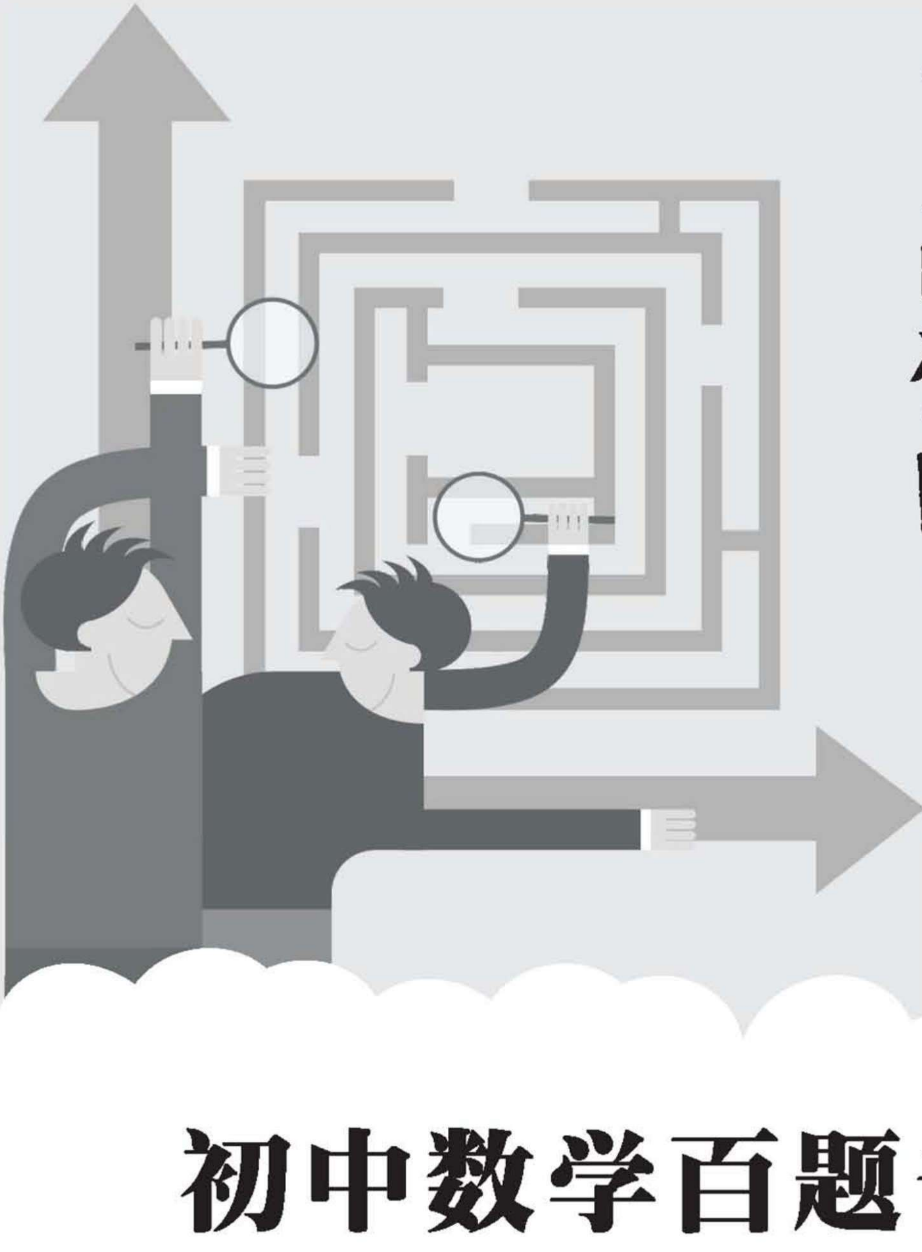
初中数学百题千解

CHU ZHONG SHU XUE BAI TI QIAN JIE

陈娟　编著

四川大学出版社

更有趣的解题
更高效的学习



初中数学百题千解

CHU ZHONG SHU XUE BAI TI QIAN JIE

陈娟 编著

四川大学出版社

责任编辑:梁　平
责任校对:陈　怡
封面设计:璞信文化
责任印制:王　炜

图书在版编目(CIP)数据

初中数学百题千解 / 陈娟编著. —成都：四川大学出版社，2017.7
ISBN 978-7-5690-0932-3

Ⅰ.①初…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①中学数学课－初中－题解－升学参考资料　Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 179945 号

书名　**初中数学百题千解**

编　　著　陈　娟
出　　版　四川大学出版社
地　　址　成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　　行　四川大学出版社
书　　号　ISBN 978-7-5690-0932-3
印　　刷　郫县犀浦印刷厂
成品尺寸　185 mm×260 mm
印　　张　13.25
字　　数　318 千字
版　　次　2018 年 1 月第 1 版
印　　次　2018 年 1 月第 1 次印刷
定　　价　39.00 元

◆ 读者邮购本书,请与本社发行科联系。
电话:(028)85408408/(028)85401670/
(028)85408023　邮政编码:610065
◆ 本社图书如有印装质量问题,请
寄回出版社调换。
◆网址:http://www.scupress.net

目　　录

第一章　数与式……………………………………………………………（1）
导　语……………………………………………………………………………（1）
第一节　实　数……………………………………………………………………（2）
第二节　整式与因式分解…………………………………………………………（12）
第三节　分　式……………………………………………………………………（22）
第四节　二次根式…………………………………………………………………（26）

第二章　方程（组）与不等式（组）……………………………………（28）
导　语……………………………………………………………………………（28）
第一节　一次方程（组）及其应用………………………………………………（29）
第二节　一元二次方程及其应用…………………………………………………（36）
第三节　分式方程及其应用………………………………………………………（38）
第四节　一元一次不等式（组）及其应用………………………………………（38）

第三章　三角形……………………………………………………………（43）
导　语……………………………………………………………………………（43）
第一节　角、相交线与平行线……………………………………………………（43）
第二节　全等三角形………………………………………………………………（52）
第三节　相似三角形………………………………………………………………（84）
第四节　解直角三角形……………………………………………………………（91）

第四章　四边形……………………………………………………………（104）
导　语……………………………………………………………………………（104）
第一节　多边形与平行四边形……………………………………………………（105）
第二节　矩形　菱形　正方形　梯形……………………………………………（110）

第五章　与面积相关的系列问题…………………………………………（124）
导　语……………………………………………………………………………（124）

第六章　函　数……………………………………………………………（137）
导　语……………………………………………………………………………（137）

第一节　一次函数…………………………………………………………………（137）
第二节　反比例函数………………………………………………………………（147）
第三节　二次函数…………………………………………………………………（155）

第七章　概率与统计……………………………………………………………（166）
导　语……………………………………………………………………………（166）

第八章　圆………………………………………………………………………（169）
导　语……………………………………………………………………………（169）

第一章　数与式

导　语

随着数的概念不断扩充，字母或含字母的式子表示数和数量关系就更具有了普遍性、简洁性和优越性，从特殊到一般或从一般再到特殊本就是人类认识世界的一般规律，二者作为对立统一的矛盾关系，相互依存，相互转化，这也自然顺应了具体思维与抽象思维的相互过渡。

本章节例题的设置主要从具体的数的运算到代数式求值，再到因式分解，形式上由简单到复杂，由整式过渡到分式、二次根式。在方法上主要涉及数学化归思想中的整体代入法、换元法、待定系数法等。所谓“化归”，即是将一个问题转化变形，使其归结为另一个已经解决的问题，它不仅是数学问题解决中最重要的思想，也是一种最基本的解题策略，更是一种有效的数学思维方式。通过等价转化、降维转化、数形转化、互逆转化、消元、降次、放缩、曲化直、分化整、无限化有限等手法，实现化未知为已知、化繁为简、化难为易，化抽象为具体的目的。化归转化的过程和由此获得的心理愉悦感正如中国诗人陆游的诗句描述：山重水复疑无路，柳暗花明又一村。而在化归思想中，本章节设置了多个从整式到分式可采用整体代换方法类比求值的题，意在引导学生养成解题前多全局观察，大胆猜想，勇于尝试的习惯以及训练学生善于类比、整合、探索知识内在联系的归纳能力；而利用同一方法作不同的整体代换求解不仅可以达到异曲同工之妙，而且进一步可以优化我们的解题策略，拓宽我们思维的同时引导我们达到多解归一从而聚合思维的作用，真正实现“见树木又见森林”的内心体验。

比如在因式分解一节中，面对一元高次多项式的分解，我们不仅给出了一般性的待定系数法，而且还给出了技巧性比较强的拆项法。即当我们不便于从整体角度一次性解决问题时，我们通常需要将原题先拆解再重组，这也是解题时处理整体与局部矛盾关系时常用的分解策略。比如因式分解一节中，从常规三次式（如：$x^3+6x^2+11x+6$）的拆项处理到三次缺项式（如：a^3-3a+2）的拆项处理，在类比中分拆重组，通过对不同项进行分拆的大胆尝试，最终悟出统一性的结论，那就是分拆某项时，如何拆应视另外两项的系数而定，拆后重组的目的是为了组与组之间要有公因式可提。如此一来，甚至对于四次缺项式在拆项处理上便可以“翻手为云，覆手为雨”，从而练就手到擒来的熟练感了。因此本章我们在观察体验多种解法时，不在于感叹解法的多少，而在于能否透过千解得其精髓，即多解归一的目的。

第一节　实　数

典例 1　计算$\frac{1}{36}\div\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{7}{18}-\frac{1}{36}\right)$

解法一

思维导向　由有理数的运算顺序直接进行求解。

原式$=\frac{1}{36}\div\left(\frac{9}{36}+\frac{3}{36}-\frac{14}{36}-\frac{1}{36}\right)=\frac{1}{36}\div\left(-\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{36}\times 12=-\frac{1}{3}$

解法二

思维导向　联想有理数乘法分配律，先求其倒数，再求其值，所谓正难则反。

$\because\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{7}{18}-\frac{1}{36}\right)\div\frac{1}{36}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{7}{18}-\frac{1}{36}\right)\times 36=\frac{1}{4}\times 36+\frac{1}{12}\times 36-\frac{7}{18}\times 36-\frac{1}{36}\times 36=9+3-14-1=-3$

又$\because\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{7}{18}-\frac{1}{36}\right)\div\frac{1}{36}$与$\frac{1}{36}\div\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{7}{18}-\frac{1}{36}\right)$互为例数

$\therefore$原式$=-\frac{1}{3}$

多维评析：逆向思维是解决问题中常见的思维模式，所谓正难则反。方法一是常规方法，方法二巧妙地发现了 36 是 4，12，18 的公倍数，利用变换被除式与除式的位置，再将结论取倒数。类比计算$\frac{1}{12}\div\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)$就比较快了。

典例 2　观察下列等式$\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{12}=\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}$，…

计算以下式子：$1+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{9}{20}+\frac{11}{30}-\frac{13}{42}+\frac{15}{56}$

解法一

思维导向　由以上裂项相消的方法可得$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；

原式$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)-5\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+7\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-9\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+11\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)-13\times\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+15\times\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)$

$=1+1-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}-\frac{7}{4}-\frac{9}{4}+\frac{9}{5}+\frac{11}{5}-\frac{11}{6}-\frac{13}{6}+\frac{13}{7}+\frac{15}{7}-\frac{15}{8}$

$=2-\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{5}{3}+\frac{7}{3}\right)-\left(\frac{7}{4}+\frac{9}{4}\right)+\left(\frac{9}{5}+\frac{11}{5}\right)-\left(\frac{11}{6}+\frac{13}{6}\right)+\left(\frac{13}{7}+\frac{15}{7}\right)-\frac{15}{8}$

$=2-3+4-4+4-4+4-\frac{15}{8}=3-\frac{15}{8}=\frac{9}{8}$

解法二

思维导向　由裂项相消方法可联想$\frac{n+(n+1)}{n(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$

原式 $=1+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$

$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$

解法三

思维导向　除方法一和二外，还可进行如下裂项：$\frac{5}{6}=1-\frac{1}{6}$，$\frac{7}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$，$\frac{9}{20}=\frac{1}{2}-\frac{1}{20}\cdots$

原式 $=1+\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{20}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{30}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{42}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{56}\right)$

$=1+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\frac{1}{2}+\frac{1}{20}+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}-\frac{1}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{4}+\frac{1}{56}=\frac{3}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}$

$=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$

多维评析：三种方法的共同点都是采用了“裂项相消”的简化手段，尤为巧妙的是方法二，它在方法一的基础上巧妙地得出$\frac{n+(n+1)}{n(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$，并以此作为裂项的依据，减少运算量，方法三尽管也产生了裂项，但计算量上比方法一、二要大。

典例 3　计算$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

解法一

思维导向　利用错位相减法求解。

令 $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ ①，

两边同时乘以 2 得：$2S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ ②

由 ② 与 ① 错位相减得：$2S-S=\left[1+\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right]-\left[\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\frac{1}{2^n}\right]$

$\therefore S=1-\frac{1}{2^n}$（同理，也可在①式两边同时乘$\frac{1}{2}$再错位相减）

解法二

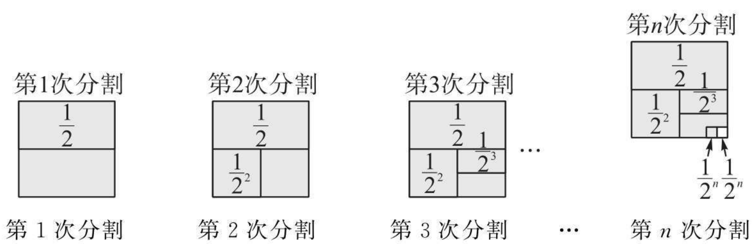
思维导向 利用数形结合的思想，通过不断地分割面积为 1 的正方形，把数量关系和几何图形巧妙地结合起来，并采用“一般问题特殊化”的策略进行研究。

第 1 次分割，把正方形的面积二等分，其中上下各部分的面积为$\frac{1}{2}$；

第 2 次分割，把上次分割图中空白部分的面积继续二等分，除空白部分外的面积之和为$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$；

第 3 次分割，把上次分割图中空白部分的面积继续二等分……；

第 n 次分割，把上次分割图中空白部分的面积最后二等分，除空白部分外的所有部分的面积之和为$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$，最后空白部分的面积是$\frac{1}{2^n}$。



（第 21 题）

根据第 n 次分割图可得等式：$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$。

解法三

思维导向 利用$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$进行添项求解产生连锁反应。

令 $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}$

$\because \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$，$\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-2}}$，$\cdots\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}$

$\therefore S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$

多维评析：方法一是求等比数列前 n 项和的通用方法，即乘公比或乘公比的倒数再错位相减，方法二是利用数字的特殊性巧妙地构造几何图形，用几何的思维求解代数问题，是数形结合的很好体现；方法三根据数字间的关系巧妙添项构造出连锁反应式子，从而达到多化少，繁化简的目的。

典例 4　已知 $S=2-2^2-2^3-2^4-2^5-2^6-2^7-2^8-2^9+2^{10}$，求 S 的值。

解法一

思维导向　由数字的特殊性不难联想出 $2^{n+1}-2^n=2^n$，由此产生计算中的连锁反应。由 $2^{n+1}-2^n=2\times2^n-2^n=(2-1)\times2^n=2^n$ 得 $S=(2^{10}-2^9)-2^8-2^7-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2+2$

$=(2^9-2^8)-2^7-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2+2=(2^8-2^7)-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2+2$

$\cdots=2^2+2=6$

解法二

思维导向　在解法一中 $2^{n+1}-2^n=2^n$ 基础上联想将 2^n 表示成两项之差的形式，即 $2^n=2^{n+1}-2^n$，如 $2=2^2-2$，$2^2=2^3-2^2$，$2^3=2^4-2^3$，…

由此得 $S=(2^2-2)-(2^3-2^2)-(2^4-2^3)-(2^5-2^4)-\cdots-(2^{10}-2^9)+2^{10}$

$=2^2-2-2^3+2^2-2^4+2^3-2^5+2^4-\cdots-2^{10}+2^9+2^{10}$

$=2^2-2+2^2=6$

解法三

思维导向　观察式子结构可联想类比等比数列求和的基本方法即乘公比错位相减进行求解。

$S=2-2^2-2^3-2^4-2^5-2^6-2^7-2^8-2^9+2^{10}$　①

$2S=2^2-2^3-2^4\cdots-2^9-2^{10}+2^{11}$　②

②－①得 $S=[2^2+(-2^3-2^4-\cdots\cdots-2^9)-2^{10}+2^{11}]-[2-2^2+(-2^3-2^4-\cdots-2^9)+2^{10}]=2^2-2^{10}+2^{11}-2+2^2-2^{10}=2^2+2^2-2-2\times2^{10}+2^{11}=6-2^{11}+2^{11}=6$

解法四

思维导向　类比解法三先将 S 乘“$\frac{1}{2}$”，再利用错位相减求解。

由 $S=2-2^2-2^3-2^4-2^5-2^6-2^7-2^8-2^9+2^{10}$①可得$\frac{1}{2}S=1-2-2^2-2^3-2^4-2^5-2^6-2^7-2^8+2^9$②

①－②得$\frac{1}{2}S=2-1+2-2^9-2^9+2^{10}=3-2\times2^9+2^{10}=3-2^{10}+2^{10}=3$

$\therefore S=6$

多维评析：以上四种方法主要利用了特殊式子 $2^{n+1}-2^n=2^n$ 的构造以及利用类比等比数列错位相减的方法进行求解。

典例5 已知：$S=1-2+3-4+5-6+\cdots-2016+2017$，求 S 的值。

解法一

思维导向 由 $(1-2)=(3-4)=(5-6)=\cdots=-1$ 这样的分组得其规律进而求解。

$$\begin{aligned}S&=(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+(2015-2016)+2017\\&=(-1)+(-1)+(-1)+\cdots+(-1)+2017\\&=(-1)\times\frac{2016}{2}+2017\\&=1009\end{aligned}$$

解法二

思维导向 在方法一的基础上还可以进行（$-2+3$），（$-4+5$），…这样的分组求和；

$$\begin{aligned}S&=1+(-2+3)+(-4+5)+(-6+7)+\cdots+(-2016+2017)\\&=1+1\times1008=1009\end{aligned}$$

解法三

思维导向 由正负相间的符号进行分组处理成两个等差数列，再利用等差数列求和公式直接求解。

$$S=(1+3+5+\cdots+2017)-(2+4+6+\cdots+2016)=\frac{(1+2017)\times1009}{2}-\frac{(2+2016)\times1008}{2}$$

$$=1009\times1009-1009\times1008=1009\times(1009-1008)=1009$$

多维评析：三种方法都用了分组求和，其中方法三容易想到，按正负性进行分组，但计算量相对大，属于易想不易算的方法；方法一与方法二巧妙进行了凑“-1”或凑“1”的分组，将问题转化为计算有多少组“-1”或“1”的问题，运算量比较小。类比此法，对于“计算 $1+2-3-4+5+6-7-8+\cdots+2013+2014-2015-2016$”这类题就不难解决了。

典例6 某人下午6点多外出购物，表上的时针和分针的夹角为110°，下午近7点回家，发现表上的时针和分针的夹角又是110°，试算一算，此人外出共用了多少时间？

解法一

思维导向 通过两次夹角110°建立方程求解。

设此人6点 x 分外出，分针经过1分钟转过6°，时针经过1分钟转过0.5°，由时针与分针夹角为110°可得方程 $180°+0.5°x-6°x=110°$，

解得 $x=\dfrac{140}{11}$；

设此人6点 y 分回家，可得方程 $6y-180°-0.5°y=110°$

解得 $y=\frac{580}{11}$；

由 $y-x=\frac{580}{11}-\frac{140}{11}=40$ 可得此人外出时间为40分钟。

答：此人外出时间为40分钟。

解法二

思维导向　类比追及问题，整个过程中，分针转过的角度比时针转过的角度多 $110°\times2=220°$，分针每分钟转过的角度比时针每分钟转过的角度多 $6°-0.5°=5.5°$，由路程差与速度差之比得时间。

∵分针在总路程中比时针多走 $110°\times2=220°$，且分针每分钟比时针每分钟多转 $6°-0.5°=5.5°$，∴$t=\frac{220°}{5.5°}=40$（分钟）。

答：此人外出共用去40分钟。

解法三

思维导向　利用时针与分针转动过的总路程与总速度之比计算时间。

设总共用去 x 分钟，时针与分针转过的总路程：$220°+0.5°x+0.5°x=(0.5°+6°)x$，得 $x=40$（分钟）。

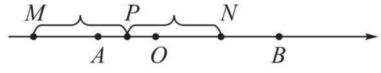
答：此人外出共用40分钟。

多维评析：方法一是常规的用方程来解决问题，方法二和方法三巧妙地将问题具体化到路程差与速度差之比，总路程与总速度之比得时间。

典例7　已知数轴上两点 A、B 分别表示数 -1 和3，点 P、M、N 分别从点 O、A、B 以每分钟1个单位，5个单位，20个单位长的速度同时向左出发，问何时点 P 与点 A、点 B 的距离相等（设时间为 t）。

解法一

思维导向　数形结合进行分类讨论，分当 P 为 MN 中点及点 M、N 重合两种情况。



如图，当点 P 为 MN 中点时，$PM=PN$，

∵$OP=t$，$AM=5t$，$BN=20t$，

$PM=OM-OP=(5t+1)-t=4t+1$，$PN=BP-BN=(t+3)-20t=3-19t$，

∴$4t+1=3-19t$，∴$t=\frac{2}{23}$。

当点 M 与点 N 重合时，$BN=AM+AB$，

∴$20t=5t+4$，∴$t=\frac{4}{15}$。

综上，当 t 为$\frac{2}{23}$和$\frac{4}{15}$两个时刻时，点 P 到点 M、N 的距离相等。

解法二

思维导向 数形结合转化为点的坐标进行运算求解。

当 P 为 MN 中点时，点 P、M、N 分别对应数 $-t$，$-1-5t$，$3-20t$，

∴利用数轴上两点间距离为 $|x_1-x_2|$ 得 $PM=-t-(-1-5t)=4t+1$，

$PN=(3-20t)-(-t)=3-19t$，

由 $PM=PN$ 得 $4t+1=3-19t$，解得 $t=\frac{2}{23}$。

当点 M、N 重合时，点 M、N 表示的数相同，即 $-1-5t=3-20t$，解得 $t=\frac{4}{15}$。

综上，当 t 为$\frac{2}{23}$和$\frac{4}{15}$两个时刻时，点 P 到点 M、N 的距离相等。

解法三

思维导向 数形结合利用数轴上两点的中点公式求解。

当 P 为 MN 中点时，点 P、M、N 分别对应数 $-t$，$-1-5t$，$3-20t$，由中点公式 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$得 $x_p=\frac{x_M+x_N}{2}$，

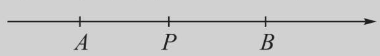
即 $-t=\frac{(-1-5t)+(3-20t)}{2}$解得 $t=\frac{2}{23}$。

当点 M、N 重合时，即 $x_M=x_N$，$-1-5t=3-20t$，解得 $t=\frac{4}{15}$。

综上，当 t 为$\frac{2}{23}$和$\frac{4}{15}$两个时刻时，点 P 到点 M、N 距离相等。

多维评析：以上三种方法都进行了合理的分类讨论，方法一是从路程的角度计算线段长，方法二是从数轴上两点间的距离入手计算线段长，而方法三巧妙地利用了中点公式解决等距离问题。以下就数轴上两点中点公式的知识做简要说明：

如图：

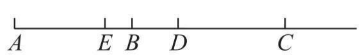


点 A、B 为数轴上任意两点，且点 P 为 AB 的中点，设点 A、P、B 分别表示数 x_A，x_P，x_B，则 $AP=x_P-x_A$，$BP=x_B-x_P$。

∵$PA=PB$，∴$x_P-x_A=x_B-x_P$，

∴$2x_P=x_A+x_B$，∴$x_P=\frac{x_A+x_B}{2}$，即得出数轴上任意两点的中点公式。

典例 8 已知：点 C 为线段 AB 延长线上一点，D 为线段 BC 上一点，$CD=2BD$，E 为线段 AC 上一点，$CE=2AE$，若 $AB=a$，求 DE（用含 a 的式子表示）。



解法一

思维导向　直接利用 $DE=CE-CD$ 求解。

$\because CD=2BD$，$CE=2AE$，$\therefore CD=\frac{2}{3}BC$，$CE=\frac{2}{3}AC$，

$\therefore DE=CE-CD=\frac{2}{3}AC-\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}(AC-BC)=\frac{2}{3}AB=\frac{2}{3}a$，即 $DE=\frac{2}{3}a$。

解法二

思维导向　直接利用 $DE=BE+BD$ 求解。

$\because CD=2BD$，$CE=2AE$，$\therefore BD=\frac{1}{3}BC$，$AE=\frac{1}{3}AC$，

$\therefore DE=BE+BD=(AB-AE)+BD=\left(a-\frac{1}{3}AC\right)+\frac{1}{3}BC=a-\frac{1}{3}(AC-BC)$
$=a-\frac{1}{3}AB=a-\frac{1}{3}a=\frac{2}{3}a$，即 $DE=\frac{2}{3}a$。

解法三

思维导向　利用方程思想建立等量关系。

设 $EB=b$，$BD=c$。

$\because CD=2BD$，$AB=a$，

$\therefore CD=2c$，$AE=AB-EB=a-b$，$2AE=2(a-b)$，

$EC=EB+BC=b+3c$。

又 $\because CE=2AE$ $\therefore b+3c=2(a-b)$，

$\therefore 2a=3(b+c)$，$\therefore 2a=3DE$，$\therefore DE=\frac{2}{3}a$。

多维评析：方法一和方法二将所求线段转化为线段之差，或拆分成线段之和直接求解，相比于方法三在运算量上要少一些，更容易想到。

典例9　已知点 C 在线段 AB 上，点 M 在线段 AC 上且 $AM=\frac{1}{3}AC$，点 N 在线段 BC 上且 $BN=\frac{1}{3}BC$，$MN=4$，求线段 AB 的长。

解法一

思维导向　利用方程思想设未知数表示各线段长，再利用整体思想，设而不求进行求解。

设 $AM=x$，$BN=y$。

$\because AM=\frac{1}{3}AC$，$BN=\frac{1}{3}BC$ $\therefore AC=3AM=3x$，$MC=2AM=2x$，

$BC=3BN=3y$，$CN=2BN=2y$，

$\because MN=4$，$\therefore MN=MC+NC=2x+2y=2(x+y)=4$，

$\therefore x+y=2$，

$\therefore AB=AC+BC=3x+3y=3(x+y)=3\times2=6$。

解法二

思维导向 类比方法一，直接通过设 AM 的长表示各线段的长进而求解。

设 $AM=x$，

$\because AM=\dfrac{1}{3}AC$，$\therefore MC=2AM=2x$，

$\because MN=4$，$\therefore CN=MN-MC=4-2x$，

$\because BN=\dfrac{1}{3}BC$，$\therefore BN=\dfrac{1}{2}CN=\dfrac{4-2x}{2}=2-x$，

$\therefore AB=AM+MC+CN+BN=x+2x+(4-2x)+(2-x)=6$。

解法三

思维导向 直接利用比例关系表示各线段长。

$\because AM=\dfrac{1}{3}AC$，$BN=\dfrac{1}{3}BC$，

$\therefore MC=\dfrac{2}{3}AC$，$CN=\dfrac{2}{3}BC$。

又 $\because MN=4$，

$\therefore MN=MC+CN=\dfrac{2}{3}AC+\dfrac{2}{3}BC=\dfrac{2}{3}(AC+BC)=4$，

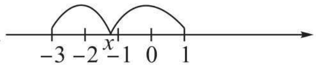
$\therefore AC+BC=6$，即 $AB=6$。

多维评析：解法一和二巧妙地设而不求线段长，通过方程将线段关系明朗化也是解决此类题常用的方法；解法三直接利用线段比进行求解，在思维要求上比较高。

典例 10 求 $|x-1|+|x+3|$ 的最小值及此时 x 的范围。

解法一

思维导向 利用绝对值的几何意义进行求解。由绝对值的几何意义知 $|x-1|+|x+3|$ 表示数轴上数 x 对应的点到 1 对应的点的距离与数 x 对应的点到 -3 对应的点的距离之和

如图 

可得：当 $-3\leqslant x\leqslant1$ 时，$|x-1|+|x+3|$ 最小，其最小值为 4。

解法二

思维导向 利用函数思想，分类讨论，数形结合进行求解。设 $y=|x-1|+|x+3|$，由零点分段法分类讨论得解。

当 $x\leqslant-3$ 时，$y=-2x-2\geqslant4$；

当 $-3<x\leqslant1$ 时，$y=4$；

当 $x>1$ 时，$y=2x+2>4$。

综上，当 $-3\leqslant x\leqslant 1$ 时，$|x-1|+|x+3|$ 有最小值为 4。

多维评析：利用绝对值的几何意义和代数意义是解决有关绝对值问题常见的数形结合的方法，而利用解法一解决有关多个绝对值求最值问题比解法二的分类讨论更加直接和简捷。

典例 11　已知 $x-y=4$，$|x|+|y|=7$，求 xy 的值。

解法一

思维导向　对 x，y 的符号直接进行分类讨论去绝对值。

由题可得 $xy\neq 0$，

则当 $x>0$，$y>0$ 时，由 $|x|+|y|=7$ 得 $x+y=7$，联立 $x-y=4$

得 $x=\frac{11}{2}$，$y=\frac{3}{2}$，$\therefore xy=\frac{11}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{33}{4}$。

当 $x<0$，$y<0$ 时，由 $|x|+|y|=7$ 得 $x+y=-7$，联立 $x-y=4$

得 $x=-\frac{3}{2}$，$y=-\frac{11}{2}$，$\therefore xy=\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{11}{2}\right)=\frac{33}{4}$。

当 $x>0$，$y<0$ 时，由 $|x|+|y|=7$ 得 $x-y=7$，与 $x-y=4$ 矛盾。

当 $x<0$，$y>0$ 时，由 $|x|+|y|=7$ 得 $-x+y=7$，即 $x-y=-7$，与 $x-y=4$ 矛盾。

综上，xy 的值为 $\frac{33}{4}$。

解法二

思维导向　利用零点分段法分类讨论去绝对值。

由 $x-y=4$ 得 $x=4+y$，$\therefore |x|+|y|=|4+y|+|y|=7$。

当 $y\leqslant -4$ 时，$-4-y-y=7$，$\therefore y=-\frac{11}{2}$，$x=-\frac{3}{2}$，$\therefore xy=\frac{33}{4}$；

当 $-4<y\leqslant 0$ 时，$4+y-y=7$，矛盾；

当 $y>0$ 时，$4+y+y=7$，$\therefore y=\frac{3}{2}$，$x=\frac{11}{2}$，$\therefore xy=\frac{33}{4}$。

综上，xy 的值为 $\frac{33}{4}$。

解法三

思维导向　由题可联想将已知的两个方程两边先平方再相减进行求解。

由题可得 x，y 符号相同，即 $xy>0$。

将 $x-y=4$ 两边分别平方得 $x^2+y^2-2xy=16$①，

将 $|x|+|y|=7$ 两边分别平方得 $x^2+y^2+2xy=49$②，

由②－①得 $4xy=33$，$\therefore xy=\frac{33}{4}$。

多维评析：解法一、二是从分类讨论的角度去绝对值，解法三是通过形式联想完全平方公式的变形 $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$，通过平方去绝对值，步骤上比解法一和解法二简单。

第二节　整式与因式分解

典例 1　已知 $a+b=2$，求 a^2-b^2+4b 的值。

解法一

思维导向　一个方程在含有多个未知数时，在不能直接求解出多个未知数时，常采用设定主元，将另外的未知数作常数进行代换处理，从而简化方程。

由 $a+b=2$ 得 $a=2-b$，将 $a=2-b$ 代入 a^2-b^2+4b 得

$a^2-b^2+4b=(2-b)^2-b^2+4b=4-4b+b^2-b^2+4b=4$。

解法二

思维导向　由所求式子中 a^2-b^2 联想平方差公式，结合已知条件 $a+b=2$ 求解。

$\because a^2-b^2+4b=(a+b)(a-b)+4b$，$a+b=2$，$\therefore a^2-b^2+4b=2(a-b)+4b=2a-2b+4b=2a+2b=2(a+b)=2\times2=4$。

多维评析：解法一、二都是一般性的常规处理法，当然这里也可利用特值法具体化 a、b，虽最后答案正确，但不具有解决问题的一般性，属于巧解。

典例 2　已知 $(m-n)^2=8$，$(m+n)^2=2$，求 m^2+n^2 的值。

解法一

思维导向　由 $(m-n)^2=8$，$(m+n)^2=2$ 得

$m^2+n^2-2mn=8$①，$m^2+n^2+2mn=2$②，

①+②得 $2(m^2+n^2)=10$，$\therefore m^2+n^2=5$。

解法二

思维导向　由 $(m-n)^2=8$，$(m+n)^2=2$ 得

$m^2+n^2-2mn=8$①，$m^2+n^2+2mn=2$②，

②-①得 $4mn=-6$，$\therefore 2mn=-3$，

而 $m^2+n^2=m^2+n^2-2mn+2mn=(m-n)^2+2mn=8-3=5$，

或 $m^2+n^2=m^2+n^2+2mn-2mn=(m+n)^2-2mn=2+3=5$。

解法三

思维导向　由 $(m-n)^2=8$，$(m+n)^2=2$ 得

$m^2+n^2-2mn=8$①，$m^2+n^2+2mn=2$②，

②-①得 $2mn=-3$，将其代入①式或②式得 $m^2+n^2=5$