

追课实录

高中数学课堂内外教育教学探索

白志峰 ◎ 著

THE GENUINE RECORD OF MY EDUCATING AND TEACHING

THE EXPLORATION IN AND AFTER MATH CLASS FOR SENIOR HIGH



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

追 课 实 录

——高中数学课堂内外教育教学探索

 **北京理工大学出版社**

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

全书分为四个部分：教学研究篇、高考研究篇、解题研究篇、教学指导篇。

教学研究篇重在阐述本人对于高中数学教育教学的实践与思考，阐述课堂教学的价值追求。高考研究篇试图以更高的观点看待高考和审视高考复习，探索在应试的过程中，如何发挥数学在育人过程中的无可替代的作用，从而体现数学学科特色，实现数学的教育价值。解题研究篇努力揭示数学学科知识在解题实践中的本质体现，最大限度地克服题海战术的负面影响，旨在授人以渔。教学指导篇试图深入浅出地解释学生在学习过程中存在的问题，注重培养学生的思维能力，使学生学会数学地发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的科学方法。

版权专有 侵权必究

图书在版编目（CIP）数据

追课实录：高中数学课堂内外教育教学探索 / 白志峰著. —北京：北京理工大学出版社，2018.7

ISBN 978-7-5682-6025-1

I. ①追… II. ①白… III. ①中学数学课—教学研究—高中 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 172464 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775（总编室）

(010) 82562903（教材售后服务热线）

(010) 68948351（其他图书服务热线）

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市华骏印务包装有限公司

开 本 / 710 毫米×1000 毫米 1/16

印 张 / 13.5

字 数 / 253 千字

版 次 / 2018 年 7 月第 1 版 2018 年 7 月第 1 次印刷

定 价 / 39.00 元

责任编辑 / 王美丽

文案编辑 / 孟祥雪

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 李志强

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前言

如果用一个字来浓缩一位中学教师一生的教育教学生涯，无疑当属——课。

我自然不能例外。从大学毕业步入中学校园，至今从教 30 多年，一直在教育教学一线工作。从最初对于课的模仿与实践，到后来对于课的理解与感悟、探索与反思，以致逐步形成自己的课的特色，再到现如今对于课的情怀与敬畏，始终是沿着课的轨迹进行的；教育教学研究，高考研究，个人专业发展，新的教学理念的学习与落实，辅导学生，指导青年教师，等等，几乎所有的关注对象都离不开课这条主线。如此说来，课有狭义与广义之分。

就狭义而言，如何上好一节课？可谓仁者见仁，智者见智。限于本人水平，不敢多加妄谈。但我信奉“教无定法”，信奉以研究的心态来上课。说“一生追求一节课”，似乎并不过分，这是一位教师形成自己的教学特色所必备的品格。作为数学教师，数学课要让学生学习什么知识，培养什么能力，增加什么体验，获得什么品质，教师需要持续不断的思考与实践。

记得在一次新教师的培训会上，我有幸被邀请和新教师谈谈有关上课的问题，阐述过自己的看法：无非三个环节——备课、上课、反思。

站在整体的高度备课：一是学科知识的整体，二是教学对象的整体，三是教学活动的整体。

站在育人的高度上课：育人是课堂教学的最高目标，并不是大话，它是教学的一种境界，不排斥高考，它可以使教师保持良好的教学心态，会使得许多问题迎刃而解。

站在发展的高度反思：教学永远是一门遗憾的艺术。善于进行教学反思，才可以更上一个台阶。反思是课后的再次备课，有反思才有发展，才有创新。螺旋上升，方可不断提升自己的教学水准。

教育教学需要持续不断的实践与思考。多年来，我将自己的所思所想随时整理成文，累计在《数学通报》、《中学数学教学参考》、《中学数学》等学术刊物发表论文近 70 篇。现选择部分文章分类编辑，集结成册。有的论文虽然发表于 10 多年以前，但仔细翻阅依然具有参考价值，庆幸之余要感谢数学的永恒魅力。这些文章涉及教育教学、高考研究、解题研究、学科指导等多个领域，或提供新颖解法，或阐述思想观点，或揭示方法规律，或长或短，兼有感而发，可以说都是围绕课展开的。显然又回到了广义的课。

作为一位中学老师，狭义的课与广义的课不是孤立存在的，而是相互联系、相互促进的。所以本书虽然是一个论文集，但因有“课”，便有主心骨，因此得书名《追课实录》。

2018.6

于潞河中学

目 录

第一部分 教学研究篇

高三一轮复习,孰轻孰重·····	3
基于“最近发展区”的一模后复习方略的宏观思考·····	11
“直线的倾斜角与斜率”的归纳和演绎活动过程的教学实践与思考·····	16
数学最值问题的辩证思考·····	23
试题讲评中如何发挥小题的教学价值·····	28
高考冲刺阶段应关注的四个函数网络·····	35
实际背景下的位置关系·····	40
课题学习的一个案例·····	47
联系 拓展 突破 升华·····	52
函数专题复习的几条新主线·····	56
圆锥曲线解题教学要突出坐标法的核心地位·····	62

第二部分 高考研究篇

立足基础,突出能力,聚焦数学素养·····	69
评析高考数学试题中的高观点题·····	75
例谈高考数学对个性品质差异的甄别·····	82
例谈高考数学对一般能力的考查·····	88
理解数学本质,强化学科能力·····	94

考查创新意识的三种题型	97
高考圆锥曲线综合题新特点分析	101
高考试题中的多参数恒成立问题	106
2006 年全国卷 (II) 评析及与上海卷的简要比较	111
评析 2005 年高考数学全国卷 (II)	114
高考数学临场得分策略	117

第三部分 解题研究篇

四种最值帮你求离心率的范围	123
圆锥曲线的一类最值问题	127
非线性平面区域问题	131
构造距离巧求多元函数最值	135
如何建立圆锥曲线中的不等关系	137
立几最值的“三化”策略	140
利用向量求解立几探索性问题	143
两边“取”，巧解题	147
解数列题的“+、-、 $\times$ 、 $\div$ ”技巧	151
三角求值的取舍	155
数学问题 1517 题	158
圆锥曲线中的数学和物理	159
求异面直线所成角的方法一览	162

第四部分 教学指导篇

“一撇一捺”，搞定指数函数的图像	169
函数图像的两种对称性	173
赏析对数函数的图像	175
处理圆锥曲线标准方程的三重境界	178

从三个角度准确理解随机变量的方差·····	181
直线与圆中常用的数学思想·····	184
横向联系，纵向深入，搞好立体几何专题复习·····	187
常用的三角变换方法·····	202
后记·····	206



第一部分

教学研究篇

高三一轮复习，孰轻孰重^①

提要 一轮复习需要促成知识的有机联系，把零散的技能技巧提炼成有效的思想方法；提高思维能力，以更高的观点审视数学，进而形成有效的解决问题的能力。如何处理好“教材与资料、讲授与引导、基础与能力、进度与落实、方法与思维、整体与个体”的“轻重”关系，必须引起高度重视。

高考复习大致需经历以下三个阶段：一轮复习、专题复习和综合模拟。其中一轮复习（系统复习）经历的时间较长。从知识角度看，一轮复习需要全面复习基础知识和基本技能，促成知识的有机联系，帮助学生把零散的技能技巧提炼成有效的思想方法；从能力角度看，一轮复习承载着帮助学生加深对知识的本质理解，提高思维能力，以更高的观点审视数学，进而形成有效解决问题的能力等艰巨任务。

一轮复习的成败得失，直接影响到整个高考复习的成败得失。一轮复习中如何处理好“教材与资料、讲授与引导、基础与能力、进度与落实、方法与思维、整体与个体”的“轻重”关系，引起笔者的思考，也期望与同行进行交流。

1 教材与资料，以教材为重

纵观实施新课标以来各地的高考试题，不难发现试题紧扣教材、课标和考纲，注重基础知识和基本技能的考查。所以重视并善于利用教材，是做好一轮复习的基础。一个对于教材没有深入理解和整体把握的教师，很难进行高质量的高考复习。

^① 该文发表于《中学数学教学参考》，上旬，2015，10。

一方面,教材里有知识的形成过程,有知识的相互联系,有紧扣知识点的针对性非常强的例题和习题,这在基础复习中是任何资料都无法替代的.例如对椭圆标准方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的复习,如果只做简单的记忆上的再现,然后做大量的习题加以巩固,就必然陷入死记硬背的境地.我们依然需要引导学生再次亲身体验、深入研究椭圆标准方程的建立过程中所隐藏的问题:① 方程对于坐标系的依赖;② 对 $2a$ 、 $2b$ 、 $2c$ 和 $a^2 = b^2 + c^2$ 的引入及理解;③ 另一标准方程中为什么只需将 x 、 y 互换?④ 知难而进的意志品质,追求简洁美的数学精神.否则,只能是对椭圆方程进行形式化记忆,缺乏本质理解,也就难以感悟和升华.我们不能以高一、高二时学生已经学过教材为由来排斥教材,要知道此时的学生对教材的内容已渐行渐远,弱于当时对教材的熟悉程度.更何况当时的知识是零散的,学生的理解力也是有局限的.

另一方面,重视教材并不是对教材的简单重复,而是基于教材又高于教材,是对教材的再开发,是对知识的升华,是具有创造性的.复习时需要以教材为依托,整合知识板块,构建知识体系,教师的付出会更多.文1(脚注①中教材)建议利用教材时通过以下几种途径或方法,达成相应目标:① 内容梳理,巩固和完善知识体系;② 问题新探,掌握基本知识和技能;③ 实践拓展,理解和体验思想方法;④ 概括提升,促进和强化思维能力^①.文2(脚注②中教材)提供了如何利用教材的一个成功案例^②.

与此同时,资料也是不可或缺的.由于教师开发课本资源的领悟和能力各不相同,各知识板块的要求不同,以及学生自学和统一练习的需要,订阅一本复习资料做参考,也是必需的.我们反对的是,用一本资料做到底、讲到底,来完成整个复习过程.尽管教师本人明白教材的重要地位,但在课时紧张、阶段考评等因素的干扰下,常常会不自觉地陷入“资料战术”的境地,客观上形成了“重资料、轻教材”的复习格局.显然,这样的复习对于类似“叙述并证明余弦定理”这类考题(2011年陕西高考题),肯定是不可取的.

① 祁银锁.夯实基础,贵在用好教材.中学数学教学参考:上旬,2013,10.

② 白志峰.实际背景下的位置关系.中学数学教学参考:上旬,2011,1-2.

2 讲授与引导，以引导为重

研究表明，孤立的知识点不是真正意义上的知识，知识只有形成网络才是有效的。而知识网络的建立，需要学生自己完成。当然，在这一过程中教师的引导是必不可少的。

教师要引导学生进行多方面的沟通与交流，充分发挥教师的主导作用和学生的主体作用，既不高估学生的基础水平，也不低估学生的自主能力，要敢于放时间和空间给学生，但不是放任不管，而是放得出去，收得回来。教师生怕学生不懂、不会，“满堂灌”，留给学生的时间和空间不足，明显不适应高考复习的要求。

一要引导学生进行学生与学生之间的互动与交流，充分发挥他们之间的思维互补性。学生们在研讨探究、补充交流、评价完善的环境中所获取到的知识和思维方法，是教师不能代替的。

二要引导学生构建知识体系，关注概念的建立，关注知识的逻辑系统和网络结构。要有意识地降低选用习题的难度，但不是降低高考要求高度，而是以基础促发展。

例如，在一次“等差数列”的复习课中，笔者设计了如下一道题目，让学生独立思考后，相互补充交流，最后由学生代表板演和讲解。

题目：已知 $\{a_n\}$ 是等差数列， S_n 是前 n 项的和， $S_5=28$ ， $S_{10}=36$ ，求 S_{15} 。

生1：列方程组求出首项和公差——基本量法。这是基本方法和基本技能。

生2：利用 S_n 是 n 的二次函数，通过待定系数法求解。这是函数观点，反映了学生认识上的跨越。

生3：利用等差数列性质—— S_5 ， $S_{10}-S_5$ ， $S_{15}-S_{10}$ 成等差数列。

生4：转化构造，得到 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也成等差数列。

生3、生4在等差数列基本性质的基础上，加以联系、扩展，这是构造的观点，体现了更高层次的认知水平。

生 5: 受生 4 的启发, 可知 $\left(5, \frac{S_5}{5}\right)$ 、 $\left(10, \frac{S_{10}}{10}\right)$ 、 $\left(15, \frac{S_{15}}{15}\right)$ 三点共线.

生 5 能够进行横向联想, 沟通了数列与解析几何的联系.

这样, 表面看起来十分简单的一道题, 利用同学们的集体智慧, 把隐藏的基本思路和基本规律, 把数列与函数、数列与解析几何等横向、纵向的联系都挖掘了出来, 产生了多种有价值的解法. 学生的思维过程经过交流与展示得以相互学习, 提高了学生对知识的本质理解和思维素质.

3 基础与能力, 以基础为重

研读各地的试题分析报告, 不难发现一个共同特点: 试题紧扣教材, 注重基础知识和基本技能的考查.

一轮复习的主要任务是: 夯实基础, 提高能力. 但能力的提高, 有赖于基础的落实, 需循序渐进, 螺旋式上升. 数学知识和技能的掌握是形成数学能力的基础, 能力又反过来作用于知识和技能的掌握, 制约着知识掌握和技能形成的速度、深度. 因此, 复习过程要做到:

(1) 找准学生的最近发展区. 要根据学生的最近发展区, 确定教学起点. 低起点高目标的课堂才具有生命力. 教学中要将知识发生、问题解决的关键节点作为交流、发现的素材, 使学生能够主动参与到“自觉夯实基础, 构建知识网络, 体悟思想方法, 促进思维发展, 形成求解论证能力”的目标上来.

(2) 注重通性通法, 淡化技能技巧. 要加强基础知识和基本技能的训练. 比如, 复习三角函数的时候, 定义、定义域、值域、图像、单调性、周期性和奇偶性、诱导公式、三角变换公式、正余弦定理等基础知识, 比较三角函数值的大小、三角变换的常用方法等基本技能, 其中任何一项不过关, 都会影响复习效果.

(3) 强化运算能力的训练. 目前学生普遍存在的问题是运算能力不强. 运算能力(包括算法算理)是正确应用数学知识、顺利解决问题的前提条件. 对于集合运算、指数运算、对数运算、三角运算、导数运算的算法算理要明确无误, 要有意识地训练并提高其运算的准确性和速度.

毋庸置疑，我们不否认以培养能力为主要目标，这里强调的是基础在形成能力的过程中的作用。

4 进度与落实，以落实为重

客观上，数学课程较多，复习任务重，课时相对紧张。有时还会有诸如突发情况、阶段考评等因素的干扰，往往会出现赶进度，匆忙结课的现象。所以对于各知识板块的复习，宜快则快，宜慢则慢，不宜平均使用力量，要以落实效果为重。

一要将课堂效果落到实处。

我们经常主观地认为：某个问题教师讲过了，学生就该会了；一节课的课堂内容完成了，就算完成了本节课的教学任务。事实上，课堂效果的落实因时、因地、因人而时刻变化。

如何落实一节课的效果？仁者见仁，智者见智。但课堂的主阵地要交给学生，让学生多思、多说、多写，少一些浮躁与跟风，容量宜大则大，宜小则小，以实效为主。要落实到“笔头”上来，落实到“速度”“准确性”“规范性”“创造性”上来，以此最大限度地发挥课堂效益。在此意义上，落实“想、说、写”至关重要。

对于一个数学问题，想出来，可能一闪而过，可以有思维的跨越；说出来，需要表述清楚，要有逻辑性，可以有口头语；但写出来，就是一种学术的形态，需要更加严密，需要用数学语言，有理有据。这是由低到高的三个不同的层次，所以课堂教学要给学生留出“想、说、写”的时间和空间。

二要落实考前复习。

目前，多数学校都有月考的做法，通过月考检测阶段复习效果。所以教师要制订出合理可行的阶段复习计划，并给学生留出一定的时间进行阶段总结反思，从而提高复习的效果。要把阶段考试作为促进学生自主复习总结的有效手段。

5 方法与思维，以思维为重

高考复习无疑离不开基本技能和基本方法的复习，但局限于苦练方法，很难提高复习效果。有这样一句名言：“当一个人把所学的知识都忘了以后，还保留下来的正是教师要教给学生的。”保留下来的是什么呢？是思维素质。随着时间的推移，知识会被遗忘，而科学的思维能力却会长久地保留下来。

如何重视思维训练呢？要从概念出发，因为数学是玩概念的，概念是思维的基础。经常见到这样的课：知识点→例题→方法总结→练习→课堂小结。

这样的课注重的是规律方法的总结与演练，但概念性不强，所以思维含量不高。不重视思维能力的训练与落实，题目做得再多，也是低效的。

例如，学生对曲线的切线概念的理解有偏差：一是“在一点处的切线”与“过某一点的切线”不加区别；二是当直线与曲线只有一个公共点，便认为二者相切。

于是，在“导数的应用”一节课里，笔者设计了这样一个问题：

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$ ，求：(1) 过点 $A(2, 4)$ 的切线方程；(2) 过点 $B\left(2, \frac{4}{3}\right)$ 的切线方程。

容易判断点 A 在曲线上，点 B 不在曲线上。

对于 (1)，学生先求得 $f'(x) = x^2$ ，进而得切线的斜率 $k = f'(2) = 4$ ，所以很快得到切线的方程为 $4x - y - 4 = 0$ ，他们表现出沾沾自喜的样子。但教师不必忙于抛出正确答案，通过引导学生观察图像，发现还有另一条切线，为啥没得出来？

经过大家交流讨论，发现问题出在误把“过 A 点的切线”当作“以 A 为切点的切线，即 A 点处的切线”，原来 A 可以不是切点。教师追问，如何求出另一条切线呢？学生讨论后作答：应该先设切点。于是得到如下解法：

设切点为 $P(x_0, y_0)$ ，则切线的斜率为 $k = f'(x_0) = x_0^2$ ，故切线的方程为：
 $y - y_0 = x_0^2(x - x_0)$ ，即 $y - \left(\frac{1}{3}x_0^3 + \frac{4}{3}\right) = x_0^2(x - x_0)$ 。

代入点 $A(2, 4)$ 得 $x_0 = -1$ 或 $x_0 = 2$ ，进而可得切线方程为： $4x - y - 4 = 0$ 或 $x - y + 2 = 0$ 。

对于 (2)，显然 B 不是切点，所以学生很自然地采用以上设切点的方法。代

入点 B 的坐标可得 $x_0=0$ 或 $x_0=3$ ，进而可得切线为： $y=\frac{4}{3}$ 或 $27x-3y-50=0$ ，但是学生又把 $y=\frac{4}{3}$ 舍去了。

教师追问：为什么舍去呢？有的学生说画出图像后觉得它不是切线，有的说是切线。

在学生莫衷一是之时，教师请同学们再次回忆切线的定义。原来问题出在对“切线是割线的极限位置”这一基本概念的理解上，而理解有误是因为有“当直线与圆只有一个公共点时，该直线与圆相切”的思维定式。现在扩展到一般曲线了，就要对概念有更加全面准确的理解。这样层层递进，诱导学生暴露其原有的思维框架，有效地突破了思维定式。这是通过反复演练同种题型很难达到的教学效果。学生栽了跟头，便有了刻骨铭心的记忆。

6 整体与个体，以个体为重

高三数学复习作为高中教育的重要组成部分，肩负着高中数学教育的“育人”任务——使学生在学识、能力、品质等方面得以提升和发展，形成审慎的思维习惯和崇尚理性的精神，积淀进一步发展的潜力。站在育人的高度来看待一轮复习，必须使每一位学生的基础知识、基本技能得以提高，并在此基础上形成必要的数学能力；必须坚持“一个都不能少”的原则。

首先，教学方式的选择应有利于全体学生的发展。

在教学活动中，应使全体学生达到高考目标的基本要求。在问题情境的设计、教学过程的展开、例题的选编、练习的安排等方面，要尽可能地让所有学生都主动参与，要鼓励不同层次的学生提出各自解决问题的策略，恰当评价学生在解决问题过程中所表现出的不同水平。

其次，要关注学生的个体差异，促进每个学生在原有基础上的发展。

现代教育理论认为，每个人都拥有与生俱来的创造性，都具有无限的学习能力，只有承认个性、尊重个性，才能发展个性，培养创造性人才。教师可以通过改变大一统的教学设计，实行分层设计，达成教学目标。