高等数学. 上

郑继明，胡晓红主编

重庆大学出版社

内容提要

本书是根据编者多年来的教学经验编写而成的. 全书分为上、下两册. 本书为上册,共 7 章,主要内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理和导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用及微分方程. 本书力求结构严谨、逻辑清晰,注重知识点的引入方法. 对传统的高等数学内容进行了适当的补充,利用二维码拓展数学文化、数学模型等知识,以提高解题能力. 本书叙述深入浅出,有较多的例题,便于读者自学. 每节配置习题,每章附有总习题,书末附录为几种常用的曲线.

本书可作为高等院校非数学类各专业学生的教材,也可作为教师的教学参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上 / 郑继明, 胡晓红主编. -- 重庆 :
重庆大学出版社, 2018. 8

新工科系列. 公共课教材

ISBN 978-7-5689-1293-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①郑… ②胡… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 176137 号

高等数学

(上)

主　编　郑继明　胡晓红

副主编　游晓黔　朱　伟　于南翔

沈世云　刘　勇

策划编辑:何　梅　范　琪

责任编辑:李定群　　版式设计:何　梅　范　琪

责任校对:万清菊　　责任印制:张　策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:易树平

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023) 88617190　88617185(中小学)

传真:(023) 88617186　88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆华林天美印务有限公司印刷

*

开本:787mm×1092mm　1/16　印张:15.5　字数:379千

2018 年 8 月第 1 版　　2018 年 8 月第 1 次印刷

印数:1—4 300

ISBN 978-7-5689-1293-8　定价:38.00 元

前言

本书是在教育大众化和“互联网+”的新形势下，集编者多年教学经验编写而成的. 编写本书遵循的原则是：在教学内容的深度和广度上与信息类各专业高等数学课程要求一致，并与现行工科院校“高等数学课程教学基本要求”相适应，满足当前教与学的需要，渗透现代数学思想，加强应用能力的培养.

本书的编写主要具有以下特点：

1. 为更好地与中学数学教学相衔接，从映射引入函数概念.

2. 从实际例子出发，引入微积分学的基本概念、理论和方法；从具体到抽象，再从抽象到具体.

3. 在继承和保持经典高等数学类教材优点的基础上，适当降低对解题训练方面的要求，较详尽地讨论导数与微分计算，简化一些定理的证明，加强数学思想方法的训练.

4. 在保证教学要求的同时，适当降低极限理论要求和不定积分计算的技巧要求，尽量将不定积分计算问题归结为一些规则和步骤，从而更好地组织教学.

5. 加强理论联系实际，适当结合通信、计算机、自动化等信息类专业应用案例，注重连续型数学模型的建立，优化教材的结构与体系.

6. 加强定积分概念的实际背景介绍以及定积分应用的直观性.

7. 加强数学文化的熏陶，利用二维码等介绍数学文化、数学模型等知识，力争打造满足新时代下的大学数学新型教材.

8. 本书注重例题和习题的多样性和层次性. 习题按节配置，遵循循序渐进的原则；每章配有总习题，其中包括一些考研题目.

本书由郑继明、胡晓红任主编. 编写组游晓黔、郑继明、

胡晓红、于南翔、沈世云、刘勇、朱伟分别编写了第 1 至第 7 章. 全书由郑继明、胡晓红统稿和定稿. 本书的编写得到了重庆邮电大学理学院领导和同行的支持和帮助.

本书在编写过程中,参考了较多的国内外教材,在此表示感谢.

由于编者水平有限,书中难免有不足和疏漏之处,恳请同行和读者批评指正.

编　者

2018 年 4 月

目录

第 1 章 函数与极限

世间万物无时无刻不在运动变化着,物质的运动和变化规律在数学上是用函数关系来描述的.本章将从最简单的一元函数着手,主要介绍函数的概念、特性及极限,并通过极限来讨论函数的连续性,为进一步深入学习微积分和应用现代数学知识解决实际问题打下良好的基础.

1.1 映射与函数

映射是现代数学中的一个基本概念,而函数是高等数学的主要研究对象,是变量间的一种数值对应关系,也是一种特殊的映射.

1.1.1 映射

(1)映射的概念

定义 1.1 设 X,Y 是两个非空集合,若存在一个法则 f,使得对 X 中的每个元素 x,按照法则 f,在 Y 中都有确定的元素 y 与之对应,则称法则 f 为从 X 到 Y 的一个映射,记作

$$f:X\to Y$$

其中,元素 y 称为元素 x(在映射 f 下)的**像**,记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$;而元素 x 称为元素 y(在映射 f 下)的**原像**;集合 X 称为映射 f 的**定义域**,记作 D_f,即 $D_f=X$;集合 $R_f=f(X)=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$ 称为映射 f 的**值域**.

注 ①对每个 $x\in X$,若其像 y 唯一,则称映射 $f:X\to Y$ 是**单值映射**;若其像 y 不唯一,则称映射 f 为**多值映射**(本书若无特殊说明,映射仅指单值映射).

②构成一个映射必须具备下列三要素:非空集合 X,即**定义域** $D_f=X$;集合 Y,即**值域**的范围:$R_f\subset Y$;**对应法则** f,使每个 $x\in X$,有确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

③对每个 $y\in R_f$,其原像不一定唯一.

④ 3 种重要的映射:

a. **满射**:设 $f:X\to Y$,若 $R_f=Y$,则称 f 为从 X 到 Y 的满射.

b. **单射**:设 $f:X\to Y$,若对任意的 $x_1,x_2\in X$,且 $x_1\neq x_2$,有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 为从 X 到 Y 的单射.

c. **一一映射**:若映射 f 既是满射,又是单射,则称 f 为一一映射(或双射).

⑤为了叙述方便,引入符号:"$\forall$"表示"任意的"或"每一个";"$\exists$"表示"存在一个". 常用的数集:$\mathbf{N}$——自然数集;$\mathbf{N}^+$—— 正整数集;$\mathbf{Z}$——整数集;$\mathbf{Q}$——有理数集;$\mathbf{R}$——实数集.

例 1 在某高校开设的课程中,集合 $X=\{x|x$ 是选修"高等数学"课程的学生$\}$,$Y=\{y|y$ 是"高等数学"这一门课程$\}$,$Z=\{$全校所开设的课程$\}$,法则 f:按 X 中的学生找所学的课程. 问:f 是不是一个从 X 到 Y 的映射? 如果是,是单射还是满射? f 是不是一个从 X 到 Z 的单值映射?

解 对 $\forall x\in X$,有唯一确定的 $y\in Y$ 与之对应,所以 f 是一个从 X 到 Y 的(单值)映射.

$\forall x_1,x_2\in X$,且 $x_1\neq x_2$,有 $f(x_1)=f(x_2)=y$,所以 f 不是单射.

$\forall y\in Y$ 都 $\exists x\in X$,使得 $f(x)=y$,所以 f 是满射.

而 f 不是从 X 到 Z 的单值映射,因为至少有一名学生不仅仅学"高等数学"这一门课程,所以 f 是一个从 X 到 Z 的多值映射.

例 2 对 $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $f(x)=x^2$,问:f 是映射吗? 若是,请指出其定义域和值域.

解 因为对 $\forall x\in\mathbf{R}$,都有确定的 $f(x)=x^2$ 与之对应,所以 f 是一个从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射. 映射 f 的定义域 $D_f=\mathbf{R}$,值域是 $R_f=\{y|y\geqslant 0,y=f(x)\}$.

例 3 设 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$,且对每个 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=\sin x$,证明:f 是一一映射.

证 对 $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,有唯一确定的 $y=\sin x\in[-1,1]$与之对应,所以 f 是一个映射,其定义域为 $D_f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,值域为 $R_f=[-1,1]$.

对 $\forall x_1,x_2\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,且 $x_1\neq x_2$,有 $f(x_1)=\sin x_1\neq\sin x_2=f(x_2)$,则 f 是单射.

对 $\forall y\in[-1,1]$,在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$中存在唯一确定的 x,使得 $y=\sin x$,所以 f 是满射.

故 f 是一一映射.

(2)逆映射

设映射 $f:X\to Y$ 是单射,若对每个 $y\in R_f$,有唯一确定的 $x\in X$,满足 $f(x)=y$,由此定义了一个从 R_f 到 X 的新映射 g,即 $g:R_f\to X$,对每个 $y\in R_f$,规定 $g(y)=x$,此 x 满足 $f(x)=y$. x 就是 y 在 g 下的像,这个由映射 f 导出的新映射 g 称为 f 的逆映射,记作 f^{-1},其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$,值域 $R_{f^{-1}}=X$.

(3)复合映射

设有两个映射 $g:X\to Y_1$,$f:Y_2\to Z$,其中,非空集合 $Y_1\subset Y_2$. 则由映射 g 和 f 可定义一个从

X 到 Z 的映射，它将每个 $x \in X$ 映射成 $f[g(x)] \in Z$. 这个映射称为 g 和 f 的**复合映射**(见图 1.1)，记作 $f \circ g$，即 $f \circ g: X \to Z, x \in X$，有 $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$.

注　映射 g 和 f 构成复合映射的条件为 $R_g \subset D_f$，即 g 的值域 R_g 包含在 f 的定义域内；否则，不能进行复合映射. 由此可知，映射 g 和 f 的复合是有先后顺序的，不能随意进行交换，$f \circ g$ 有意义并不表示 $g \circ f$ 也有意义. 即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 都有意义，它们也不一定相同.

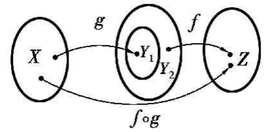

图 1.1

例 4　设有映射 $g: \mathbf{R} \to [-1,1]$, $g(x) = \cos x (x \in \mathbf{R})$，映射 $f: [-1,1] \to [-1,0]$, $f(u) = -\sqrt{1-u^2} (u \in [-1,1])$，求映射 g 和 f 构成的复合映射.

解　由映射 g 和 f 构成的复合映射为 $f \circ g: \mathbf{R} \to [-1,0]$.

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\cos x) = -|\sin x|$$

1.1.2　函数

在对问题的研讨过程中，常遇到的量是**常量与变量**，即在某变化过程中，保持一定值不变的量称为**常量**，能取不同值的量称为**变量**. 当然，常量与变量是相对“过程”而言的.

(1) 函数概念

定义 1.2　设非空数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的一个**一元函数**，简称**函数**，记作

$$y = f(x), x \in D$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为该函数 f 的**定义域**，记作 D_f.

当 $x = x_0 \in D$ 时，通过法则 f 与 x_0 对应的值 y_0 称为 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 数集 $R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域.

注　①函数 f 实质上就是一个“数值变换器”，即将 $\forall x \in D$ 输入数值变换器 f 中，经过 f 的作用，输出来的就是数 $f(x)$. 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是不同的，前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，即函数. 后者表示与自变量 x 对应的函数值.

因此，常用记号“$f(x), x \in D$”或“$y = f(x), x \in D$”来表示定义在 D 上的函数 f. 在不发生混淆的情况下，也称 y 是 x 的函数.

②构成函数的两要素是定义域 D_f 和对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么，这两个函数就是相等的，否则就是不相等的.

③函数定义域的确定：

a. 用算式表达的函数，约定使得算式有意义的一切实数组成的集合为函数的定义域.

b. 对有实际背景的函数，则根据实际背景中自变量的实际意义确定函数的定义域.

例 5　求函数 $f(x) = \ln x + \sqrt{x^2 - 1}$ 的定义域.

解　欲使 $f(x) = \ln x + \sqrt{x^2-1}$ 有意义，必须满足 $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 \geqslant 0 \end{cases}$，则 $x \geqslant 1$.

故函数 $f(x)$ 的定义域为

$$D_f = \{x \mid x \geqslant 1\}$$

④**单值函数**与**多值函数**. 在函数的定义中,对 $\forall x\in D$,按给定法则,对应的函数值 y 总是唯一确定的,则称此函数为**单值函数**. 若对 $\forall x\in D$,按给定法则,总有确定的 y 值与之对应,但这个 y 不总是唯一的,则称此函数为**多值函数**. 若本书没有特别说明,函数均指单值函数.

例 6 在方程 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 中,当 $x=r$ 或 $x=-r$ 时,对应 $y=0$,但当 x 取 $(-r,r)$ 内任一个值时,y 都有两个确定的值与之对应. 因此,此方程确定了一个多值函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}, x\in[-r,r]$. 其中,$y=\sqrt{r^2-x^2}, x\in[-r,r]$ 和 $y=-\sqrt{r^2-x^2}, x\in[-r,r]$ 分别是它的两个单值枝.

⑤**函数的表示方法**. 常用的有表格法、图形法和解析法(算式法)3 种.

其中,用图形法表示函数直观. 坐标平面上的点集

$$G=\{(x,y)\mid y=f(x), x\in D\}$$

称为**函数 $y=f(x)$, $x\in D$ 的图形**.

无解析式的函数图形示例

(2)函数的几种特性

1)函数的有界性

设函数 $y=f(x)$, $x\in D$,数集 $I\subset D$. 如果存在数 M,使得对 $\forall x\in I$,都有 $f(x)\leqslant M$(或 $f(x)\geqslant M$),则称函数 $f(x)$ 在 I 上有上(或下)界,并称 M 为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个上(或下)界.

如果存在正数 M,使对 $\forall x\in I$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界;若这样的 M 不存在(即对任意的 $M>0$,都存在 $x_0\in I$,使 $|f(x_0)|>M$),则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

显然,函数 $f(x)$ 在 I 上有界的充要条件是函数 $f(x)$ 在 I 上既有上界,又有下界.

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的,因为 $|f(x)|=|\sin x|\leqslant 1$.

例 7 证明:函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内有下界,但是无上界.

证 对 $\forall x\in(0,1)$,有 $f(x)=\dfrac{1}{x}>0$,故函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 有下界.

然而,对 $\forall M>1$,总有 x_0 满足 $0<x_0<\dfrac{1}{M}<1$,使 $f(x_0)=\dfrac{1}{x_0}>M$,故函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无上界. 因此函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内有下界,但是无上界.

显然,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的.

这说明一个函数的有界性与其自变量的取值范围有关.

2)函数的单调性

设函数 $y=f(x)$, $x\in D$,且区间 $I\subset D$. 若对区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\ (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)) \tag{1.1}$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(或减少)的. 若上式换成严格的不等式

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)) \tag{1.2}$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**严格单调增加(或减少)**的.

在定义域内单调增加和单调减少的函数,统称为单调函数.

例 8　函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是严格单调减少的，在区间 $[0,+\infty)$ 上是严格单调增加的，但在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数.

3）函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ **为偶函数**；若对 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例 9　在 $(-\infty,+\infty)$ 上，$y=\cos x$，$y=x^2$ 均为偶函数，其图形关于 y 轴对称；而 $y=\sin x$，$y=x^3$ 均为奇函数，其图形关于原点对称.

事实上，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

4）函数的周期性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在正数 l，使得对 $\forall x\in D$，都有 $x\pm l\in D$，且有

$$f(x\pm l)=f(x) \tag{1.3}$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的**周期**. 而这样的 l 不是唯一的，通常把 l 的最小值（若存在的话）称为此函数的**最小正周期**，简称为周期.

例如，在 $(-\infty,+\infty)$ 上，$y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数.

例 10　讨论狄里克雷（Dirichlet）函数 $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Q}\\ 0 & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\end{cases}$ 的周期性和奇偶性.

解　因为对 $\forall l\in\mathbf{Q}^+$，都有

$$D(x\pm l)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Q}\\ 0 & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\end{cases}=D(x)$$

所以任何正有理数都是其周期.

狄里克雷简介

对 $\forall p\in(\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q})^+$，若 $x\in\mathbf{Q}$，则

$$x\pm p\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},D(x\pm p)=0\neq 1=D(x)$$

所以 p 不是 $D(x)$ 的周期. 故 $D(x)$ 是周期函数，其周期为任意正有理数.

又 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $D(-x)=D(x)$，故 $D(x)$ 是偶函数.

(3) 几类特殊的函数

1）分段函数

设 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 是两两互不相交的非空实数集，$g_i(x)\,(i=1,2,\cdots,n)$ 是不同的表达式，则称函数 $f(x)=\begin{cases}g_1(x) & x\in D_1\\ g_2(x) & x\in D_2\\ \vdots & \\ g_n(x) & x\in D_n\end{cases}$ 为定义在 $D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$ 上的**分段函数**.

例 11　绝对值函数（见图 1.2）

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases},$$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=[0,+\infty)$.

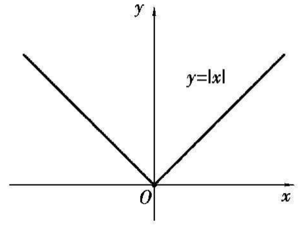

图 1.2

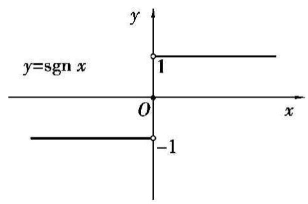

图 1.3

例 12　符号函数(见图 1.3)

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & x>0\\0 & x=0\\-1 & x<0\end{cases}$$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$.

显然, $\operatorname{sgn}(0.2)=1$, $\operatorname{sgn}(0)=0$, $\operatorname{sgn}(-\sqrt{2})=-1$, $|x|=x\operatorname{sgn} x$.

例 13　取整函数(见图 1.4)$y=[x]$(对任一实数 x,取不超过 x 的最大整数值). 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域为 $R_f=\mathbf{Z}$.

显然,$[-3.5]=-4$,$[0.25]=0$,$[\pi]=3$.

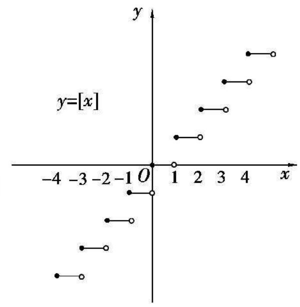

图 1.4

例 14　在电子(脉冲)技术中会用到"单位阶跃函数"

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geqslant 0\\0 & t<0\end{cases}$$

例 15　设正弦交流电的电流 $i(t)=I_m\sin\omega t$(I_m 为最大电流)经过半波整流后,在一个整周期$\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{2\pi}{\omega}\right)$($\omega>0$)内,电流为

$$i(t)=\begin{cases}I_m\sin\omega t & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{\omega}\\[2ex]0 & \dfrac{\pi}{\omega}<t\leqslant\dfrac{2\pi}{\omega}\end{cases}$$

2)复合函数

由于复合函数是复合映射的一种特例,因此,复合函数的概念如下:

设函数 $y=f(u)$,$u\in D_1$,函数 $u=g(x)$在 D_2 上有定义且 $g(D_2)\subset D_1$,则由下式确定的函数

$$y=f(g(x)),x\in D_2$$

称为由函数 $u=g(x)$和函数 $y=f(u)$构成的**复合函数**,它的定义域为 D_2,变量 u 称为中间变量.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数常记为 $f\circ g$,即

$$f\circ g(x)=f(g(x))$$

一般

$$f\circ g(x)=f(g(x))\neq g\circ f(x)=g(f(x))$$

例如,前面的例 4 中的函数 $y=f(u)=-\sqrt{1-u^2}$的定义域为$[-1,1]$,$g(x)=\cos x$($x\in\mathbf{R}$),就构成复合函数 $f\circ g(x)=f(g(x))=f(\cos x)=-|\sin x|$,$x\in\mathbf{R}$.

但是,如果 $u=g(x)=2+x^2$,则 g 与 f 就不能构成复合函数,因为对 $\forall x\in\mathbf{R}$,$u=2+x^2$ 不在 $y=f(u)$的定义域$[-1,1]$内.

3)反函数

设函数 $f:D\to f(D)$是单射,则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$,称此映射 f^{-1}为函数 f 的**反函**

数. 即对 $\forall y \in f(D)$,有唯一的 $x \in D$,使得 $f(x)=y$,于是有 $x=f^{-1}(y)$.

例 16　求函数 $y=x-1$ 的反函数.

解　函数 $y=x-1$ 的自变量为 x,因变量为 y,其定义域和值域均为实数集 $\mathbf{R}$. 从中解出 x,得 $x=y+1$,此时自变量为 y,因变量为 x,其定义域和值域仍为实数集 $\mathbf{R}$.

故函数 $x=y+1$ 是 $y=x-1$ 的反函数,反之亦然.

如果将它们的图形画在同一坐标平面内是同一条直线.

一般,$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是同一条曲线. 自然有

$$x \in D, f^{-1} \circ f(x)=f^{-1}[f(x)]=f^{-1}[y]=x$$

$$y \in f(D), f \circ f^{-1}(y)=f[f^{-1}(y)]=f(x)=y$$

习惯上,原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**. 函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$(即将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 y 与 x 互换而得),因此,把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上,**这两个图形关于直线 $y=x$ 对称**.

不是所有函数都存在反函数.

定理 1.1　若 f 是定义在 D 上的严格单调函数,则 $f:D\to f(D)$ 是单射,f 的反函数 f^{-1} 一定存在,且 f^{-1} 也是 $f(D)$ 上的严格单调函数.

证明略.

(4)函数的运算

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 的定义域分别为 D_1,D_2,且 $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$,则可定义两个函数的下列运算:

1)函数的和(差)

两函数的和(差)记为 $f\pm g$,即

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x), x\in D$$

2)函数的积

两个函数的乘积记为 $f\cdot g$,即

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x), x\in D$$

注　$f\cdot g$ 与 $f\circ g$ 两个记号的含义不同. 前者表示两个函数的乘积,且满足交换律;后者表示两个函数的复合,且不满足交换律. 有时将复合函数说成是函数的复合运算.

3)函数的商

两个函数的商记为 $\frac{f}{g}$,即

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, x\in D\setminus\{x\mid g(x)=0, x\in D\}$$

函数的四则运算法则与实数的四则运算法则类似.

例 17　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-l,l)$,$(l>0)$,证明:必存在 $(-l,l)$ 上的偶函数 $g(x)$ 及奇函数 $h(x)$,使得 $f(x)=g(x)+h(x)$.

分析　假设已找到满足条件的偶函数 $g(x)$ 和奇函数 $h(x)$,则

$$f(x)=g(x)+h(x) \tag{a}$$