高中数学
课本中的数学
思想方法

必修
5

- 基于新课标教学大纲，解读典型例题
- 依据课时内容，归类数学思想方法和解题策略
- 经典训练，助你练出好成绩

主编◎王国江　副主编◎张倬霖

上海社会科学院出版社
SHANGHAI ACADEMY OF SOCIAL SCIENCES PRESS

高中数学
课本中的数学思想方法

必修5

主编◎王国江　副主编◎张倬霖

上海社会科学院出版社
SHANGHAI ACADEMY OF SOCIAL SCIENCES PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高中数学课本中的数学思想方法. 必修5/王国江主编. ——上海:上海社会科学院出版社,2019
ISBN 978－7－5520－2543－9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第300128号

高中数学课本中的数学思想方法·必修5

主　　编:王国江
副 主 编:张倬霖
责任编辑:何红燕
封面设计:郁心蓝
出版发行:上海社会科学院出版社
上海顺昌路622号　邮编200025
电话总机021－63315900　销售热线021－53063735
http://www.sassp.org.cn　E-mail:sassp@sass.org.cn
照　　排:上海碧悦制版有限公司
印　　刷:上海万卷印刷股份有限公司
开　　本:787毫米×1092毫米　1/16开
印　　张:11.25
字　　数:260千字
版　　次:2019年5月第1版　　2019年5月第1次印刷

ISBN 978－7－5520－2543－9/G·813　　定价:40.00元

编 委 会

主　编：王国江

副主编：张倬霖

编　委：张　怡　张建国　李　浩　王　健
赵　阳　赵积慧　朱　华　王坤玉
杨柏村　赵之浩
（排名不分先后）

前　言

本书向广大读者介绍了高中数学课本中常见的数学思想方法与解题策略，由杨浦区教育学院高中教研员、特级教师、正高级教师王国江老师任主编，上海市行知中学数学教研组组长、首席教师、高级教师张倬霖老师任副主编。本书所设栏目：方法简述、易错解读、经典训练，行之有效地将教科书上的学术形态转化为学生可以理解的学习形态，有助于学生理解、体会、巩固、提高。按课本内容分为必修一至五共五个分册，由区正高级教师、特级教师、首席教师、学科带头人和骨干教师进行编写。

编者按照高中数学的教学内容，根据问题的不同类型分门别类，分章节从理论上阐述了数学的解题方法，对教材内容以典型的实例进行了翔实、细致的分析、解答和点评。依据数学教材的每一节、每一课时内容，按小节雕刻、整章梳理、方法呈现、循序渐进、有机磨合、思想渗透、能力提升，这样，读者便能对照教材，给学习阅读带来了方便，避免了因按传统的大节编写、内容跨度跳跃较大而带来阅读上的麻烦，更是接“地气”之作。本书凝聚了编者多年的心血，是编者多年对解题理论研究、探索、实践的结晶。

基于新课标与数学学科核心素养的数学解题研究，近年已引起众多数学教育工作者的关注与重视，“知识”是基础，“方法”是手段，“思想”是深化。运用数学思想方法去解决数学问题，通常要从多角度、多方位去思考，学会如何举一反三，触类旁通，也是一门理论。对问题探究的不同途径和方法加以甄选，最后得出认知层次较高的、比较完善的结论，更能培养学生的发散思维和探究创新能力，有助于培养学生自主学习、自主探究的科学精神，激发学生的学习热情和兴趣，养成独立思考的良好习惯是本书的又一特色。

本书是对教材的二次开发、再加工、再创造的过程，对提高学生分析问题、解决问题、自主探究能力以及数学创新能力具有积极作用，对提升考生的应试能力具有较好的参考价值。

参与本书编写的人员，他们来自杨浦区王国江数学名师工作室、上海市教委教研室项目组（项目：基于核心素养的“创智课堂”教学实践研究，编号：JX09JC01201605）、宝山区高中数学研究团队（一）。

上海市杨浦区教育学院高中教研员、特级教师、正高级教师
王国江

目录

第一章　解三角形

第二章　数列

第三章　不等式

第四章　不等式和绝对值不等式(选学)

第五章　柯西不等式与排序不等式(选学)

第六章　用数学归纳法证明不等式(选学)

第七章　推理与证明(选学)

第一章
解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

余弦定理：三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍，即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

正弦定理：在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

解斜三角形：由斜三角形的六个元素（三条边和三个角）中的三个元素（至少有一个是边），求其余三个未知元素（可能有两解、一解或无解）的过程，叫作解斜三角形.

本节利用正、余弦定理来解斜三角形.

方法简述

1. 数形结合思想

在解决数学问题时，根据问题的背景和可能性，使数的问题借助形去观察，而形的问题借助数去思考，采用这种“数与形结合”的方法来解决数学问题的策略，我们称之为“数与形结合的思想方法”.

它的主要特点：数⇒形⇒问题的解决；形⇒数⇒问题的解决.

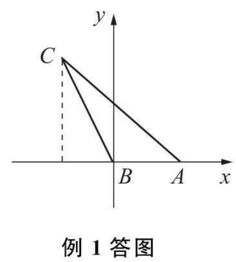
事实上，数学作为客观事物的一种存在形式，其中任何问题都具备“形”的因素. 从理论上说，任何一个数学问题都可发掘其中的“形”，并发挥它的直观作用，从而给出它的一些具有实体感的解答. 几何中“形”的重要作用是不言而喻的，就代数的问题来说，若注意充分发挥“形”的作用，其效果往往比进行纯数学理论的抽象、烦琐，甚至枯燥的推演要好得多.

数与形结合的基本思路是：根据数的结构特征，构造出与之相适应的几何图形，并利用图形的特性和规律，解决数的问题；或将图形信息部分或全部转换成代数信息，削弱或清除形的推理部分，使要解决的形的问题转化为数量关系的讨论.

例 1 若 $AB=2$，$AC=\sqrt{2}BC$，则 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值为________.

点拨 数与形的结合，构造底边 AB 上高线的函数解析式，求出 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值.

解答 如图所示，建立直角坐标系，点 B、点 A 的坐标分别为 $B(0,0)$，$A(2,0)$. 设点 C 的坐标为 $C(x,y)$.



例 1 答图

由 $|AC|=\sqrt{2}|BC|$，得 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$.

化简，得 $h(x)=|y|=\sqrt{-x^2-4x+4}=\sqrt{-(x+2)^2+8}$.

其中，$-2-2\sqrt{2}<x<-2+2\sqrt{2}$.

所以，当 $x=-2\in(-2-2\sqrt{2},-2+2\sqrt{2})$ 时，

$h(x)$ 取最大值 $h(-2)=2\sqrt{2}$.

那么，$\triangle ABC$ 的面积最大值 $=\dfrac{1}{2}\times|AB|\times h(-2)=2\sqrt{2}$.

反思 本题求解方法与过程有多样性.

也可以设 $BC=a$，则 $AC=\sqrt{2}a$.

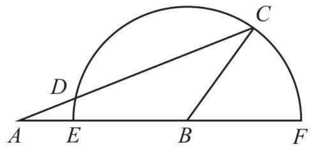
由余弦定理，得 $\cos C=\dfrac{3a^2-4}{2\sqrt{2}a^2}$.

可求得 $\sin C=\dfrac{\sqrt{-a^4+24a^2-16}}{2\sqrt{2}a^2}$.

那么 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}a^2\cdot\sin C=\dfrac{1}{4}\sqrt{-a^4+24a^2-16}$.

当且仅当 $a^2=12$，即 $a=2\sqrt{3}$ 时，取得最大值 $2\sqrt{2}$.

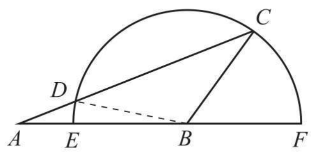
例 2　如图所示，在$\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$BC=\sqrt{2}$，$\angle ABC=\dfrac{3\pi}{4}$. 以点 B 为圆心，线段 BC 的长为半径的半圆分别交 AB 所在直线于点 E、F，交线段 AC 于点 D，求弧$\overparen{CD}$的长.（精确到 0.01）



例 2 图

点拨　求弧长的关键是求出弧所对的圆心角的大小，再利用弧长公式求解.

解答　解法一：联结 BD，如图(a)所示.



例 2 答图(a)

在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$$
$$=4+2-4\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=10.$$

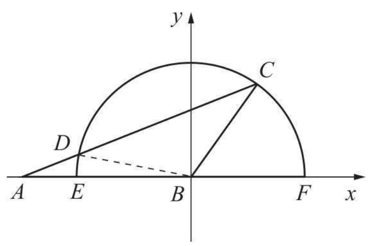
所以 $AC=\sqrt{10}$.

由正弦定理，得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$，所以 $\sin\angle ACB=\dfrac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

在$\triangle DBC$ 中，因为 $BD=BC$，故$\angle DBC=\pi-2\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

所以$\overparen{CD}=\left(\pi-2\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)\cdot\sqrt{2}\approx 3.13$.

解法二：如图(b)所示，以点 B 为坐标原点，AB 所在的直线为 x 轴建立平面直角坐标系，联结 BD.



例 2 答图(b)

由条件可得点 A 的坐标为$(-2,0)$，点 C 的坐标为$(1,1)$.

故直线 AC 的方程为 $y=\dfrac{1}{3}(x+2)$，

圆方程为 $x^2+y^2=2$.

联立得 $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ y=\dfrac{1}{3}(x+2),\end{cases}$

解得 $x=-\dfrac{7}{5}$或 $x=1$，则点 D 的坐标为$\left(-\dfrac{7}{5},\dfrac{1}{5}\right)$.

所以，$\overrightarrow{BD}=\left(-\dfrac{7}{5},\dfrac{1}{5}\right)$，$\overrightarrow{BC}=(1,1)$.

故向量$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{BD}$的夹角$\angle DBC$ 的余弦值为

$\cos\angle DBC=\dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BD}|}=-\dfrac{3}{5}$,

即$\angle DBC=\pi-\arccos\dfrac{3}{5}$.

所以,$\overset{\frown}{CD}=\left(\pi-\arccos\dfrac{3}{5}\right)\cdot\sqrt{2}\approx3.13$.

反思 本题有两种解法,一种是利用正余弦定理求出圆心角,另一种是通过建立直角坐标系求解点坐标,利用向量夹角公式求出圆心角.

2. 三角形边角转换法

利用正弦定理和余弦定理等有关定理,将三角形的边、角相互转换以达到便利研究三角形有关问题的方法就是常用的边、角转换法.

用正弦定理将边转换到角,可以使原题中的代数与三角函数综合问题转化为纯三角比问题,便于利用三角公式进行变形,求得有关角的三角比关系或值.

利用正弦定理、余弦定理将角转换为边,又可以使三角比问题转化为代数问题,运用代数恒等变形得到边之间的关系,并为利用代数函数有关性质解决问题创造了有利条件.

在三角形中关于边、角的主要关系式有:

(1)$A+B+C=180^\circ$;

(2)$a+b>c,a-b<c$(a,b,c 对等地位,以下同);

(3)$A>B\Leftrightarrow a>b$;

(4)正弦定理:$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$;

(5)余弦定理:$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$;

(6)$a^2+b^2=c^2\Leftrightarrow C$ 为直角$\Leftrightarrow\cos C=0$;

$a^2+b^2<c^2\Leftrightarrow C$ 为钝角$\Leftrightarrow\cos C<0$;

$a^2+b^2>c^2\Leftrightarrow C$ 为锐角$\Leftrightarrow\cos C>0$;

(7)$\sin A=\sin(B+C)$;$\cos A=-\cos(B+C)$;

$\tan A=-\tan(B+C)$;$\sin\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{B+C}{2}$;

$\cos\dfrac{A}{2}=\sin\dfrac{B+C}{2}$;$\tan\dfrac{A}{2}=\cot\dfrac{B+C}{2}$;

(8)三角形面积公式:

$S=\dfrac{1}{2}ah$;$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$;$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\left(p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$.

例3 若$\triangle ABC$满足$a(b\cos B-c\cos C)=(b^2-c^2)\cos A$,试判断该三角形的形状.

点拨 由于该题条件是关于边或角的齐次式,可以采用两条以下证明思路:

①利用余弦定理,统一为边关系;

②利用正弦定理,统一为角关系.

解答 解法一:(统一为边关系)

由余弦定理,得

$$ab\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)-ac\left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}\right)=(b^2-c^2)\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

即 $b^2(a^2+c^2-b^2)-c^2(a^2+b^2-c^2)=(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)$.

变形为 $2(b^2-c^2)(a^2-c^2-b^2)=0$.

所以 $b^2=c^2$ 或 $a^2=b^2+c^2$.

即$\triangle ABC$是等腰三角形或直角三角形.

解法二:(统一为角关系)

由正弦定理,得

$\sin A(\sin B\cos B-\sin C\cos C)=(\sin^2 B-\sin^2 C)\cos A$.

故 $\frac{1}{2}\sin A(\sin 2B-\sin 2C)=-\frac{1}{2}(\cos 2B-\cos 2C)\cos A$.

从而 $\sin A\cos(B+C)\sin(B-C)=\sin(B+C)\sin(B-C)\cos A$.

于是 $\sin(B-C)=0$ 或 $\sin(B+C-A)=0$.

故 $B=C$ 或 $B+C=A$.

故$\triangle ABC$是等腰三角形或直角三角形.

反思　一般地,我们可以利用正弦定理或余弦定理,将已知关系中的边转换为角,或角转换为边,然后从角或边的关系判断三角形的形状.

例 4　在$\triangle ABC$中,已知三边 a、b、c 的对应角 A、B、C 满足 $\tan B=\frac{\cos(B-C)}{\sin A+\sin(C-B)}$.

(1)判断$\triangle ABC$形状;

(2)若 $a=2$,$B=x$,当 x 为何值时 $f(x)=\frac{b+c}{bc+1}$ 有最小值.

点拨　(1)化切为弦,再将三角比转化为 B、C 关系;

(2)利用还原法转化为代数函数,通过研究其单调性,求最值.

解答　(1)因为 $A+B+C=\pi$,所以 $\sin(B+C)=\sin A$.

原式可化为 $\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\cos B\cos C+\sin B\sin C}{\sin(B+C)+\sin(C-B)}=\frac{\cos B\cos C+\sin B\sin C}{2\sin C\cos B}$.

所以 $2\sin B\sin C=\cos B\cos C+\sin B\sin C$.

即 $\cos B\cos C-\sin B\sin C=\cos(B+C)=0$,得 $B+C=\frac{\pi}{2}$.

故$\triangle ABC$为直角三角形.

(2)在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,$A=\frac{\pi}{2}$,$a=2$,$B=x$,

有 $b=2\sin x$,$c=2\cos x$.

所以 $f(x)=\frac{2\sin x+2\cos x}{4\sin x\cos x+1}$.

令 $\sin x+\cos x=t$,$t\in(1,\sqrt{2}]$,则 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

所以 $f(t)=\frac{2t}{2(t^2-1)+1}=\frac{2}{2t-\frac{1}{t}}$.

又由于 $2t-\frac{1}{t}$ 在区间 $(1,\sqrt{2}]$ 上单调递增,因此 $f(t)=\frac{2}{2t-\frac{1}{t}}$ 在区间 $(1,\sqrt{2}]$ 上单调递减.

由 $t\leqslant\sqrt{2}$，得 $f(t)\geqslant f(\sqrt{2})=\frac{2}{3}\sqrt{2}$，

仅当 $t=\sqrt{2}$ 即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时等号成立.

故 $f(t)_{\min}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

反思 令 $\sin x+\cos x=t$，这是一种有用的代换，它可以将式中 $\sin x+\cos x$，$\sin x\cos x$ 这样的式子转化为代数，这样就可以把三角问题转化为代数问题，利用函数方法处理问题了.

方法点悟：三角形边角转换法是研究三角形有关问题的基本方法.三角形的边和角的合理转换有利于利用三角函数或代数方程解决问题，因此熟练掌握公式是转换的关键.

易错解读

易错点1 多解或漏解.

解三角形的过程中，要注意各个角之间的大小关系，并要检验内角和，防止出现漏解多解的情况.

例5 已知在△ABC 中，$\cos A=\frac{5}{13}$，$\sin B=\frac{3}{5}$.求 $\cos C$.

解答 $\because 0<A<\pi$，$\cos A=\frac{5}{13}$，$\therefore \sin A=\frac{12}{13}$.

又 $\sin A>\sin B$，$\therefore A>B$.$\therefore 0<B<\frac{\pi}{2}$.

由 $\sin B=\frac{3}{5}$，可得 $\cos B=\frac{4}{5}$.

$\therefore \cos C=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=\frac{16}{65}$.

反思 在解三角形时，三角形解的个数是一个很容易被忽视的问题，本题在解题过程中易犯下列错误：由 $\sin B=\frac{3}{5}$，$\therefore 0<B<\pi$.$\therefore \cos B=\pm\frac{4}{5}$.

$\therefore \cos C=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=\frac{16}{65}$ 或 $\frac{56}{65}$.

易错点2 基本公式不熟练.

边角转换时，一般采用两种做法：①利用余弦定理，统一为边关系；②利用正弦定理，统一为角关系.注意根据实际问题灵活使用.

例6 在△ABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，且 $\cos A=\frac{1}{3}$.

(1)求 $\sin^2\frac{B+C}{2}+\cos 2A$ 的值；

(2)若 $a=\sqrt{3}$，求 bc 的最大值.

解答 (1)$\sin^2\frac{B+C}{2}+\cos 2A=\frac{1}{2}[1-\cos(B+C)]+(2\cos^2 A-1)$

$=\frac{1}{2}(1+\cos A)+(2\cos^2 A-1)=-\frac{1}{9}$.

(2)$\because \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A=\dfrac{1}{3}$,

$\therefore \dfrac{2}{3}bc=b^2+c^2-a^2\geqslant 2bc-a^2$.

又 $a=\sqrt{3}$,$\therefore bc\leqslant \dfrac{9}{4}$.

当且仅当 $b=c=\dfrac{3}{2}$ 时,$bc=\dfrac{9}{4}$,故 bc 的最大值是 $\dfrac{9}{4}$.

反思　解斜三角形中求三角形一边长或求三角形面积可用正弦定理、余弦定理来处理,除记清两定理内容外,两公式易用错.

经典训练

1. 在$\triangle ABC$中,若 $\tan A=\dfrac{1}{3}$,$C=150°$,$BC=1$,则 $AB=$________.

2. 在$\triangle ABC$中,三个角 A、B、C 的对应边长分别为 $a=3$,$b=4$,$c=6$,则 $bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C$ 的值为________.

3. 在$\triangle ABC$中,$AB=5$,$AC=3$,$BC=7$,则$\angle BAC$的大小为(　　).

A. $\dfrac{2\pi}{3}$　　B. $\dfrac{5\pi}{6}$　　C. $\dfrac{3\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{3}$

4. 设锐角$\triangle ABC$的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c,$a=2b\sin A$.

(1)求 B 的大小;

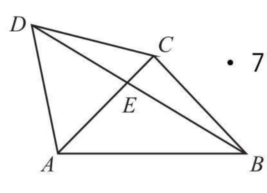
(2)求 $\cos A+\sin C$ 的取值范围.

5. 在 ABC 中,a、b、c 分别是三个内角 A、B、C 的对边.若 $a=2$,$C=\dfrac{\pi}{4}$,$\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,求$\triangle ABC$的面积 S.

6. 如图所示,$\triangle ACD$是等边三角形,$\triangle ABC$是等腰直角三角形,$\angle ACB=90°$,BD 交 AC 于 E,$AB=2$.

(1)求 $\cos\angle CBE$ 的值;

(2)求 AE.



第 6 题图

7. 已知$\triangle ABC$的外接圆的半径为$\sqrt{2}$，内角A、B、C的对边分别为a、b、c，向量$\overrightarrow{m}=(\sin A-\sin C,b-a)$，$\overrightarrow{n}=\left(\sin A+\sin C,\frac{\sqrt{2}}{4}\sin B\right)$，且$\overrightarrow{m}\perp\overrightarrow{n}$.

(1)求角C；

(2)求$\triangle ABC$的面积S的最大值.

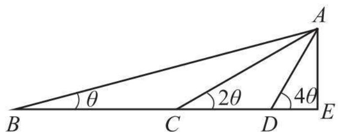
1.2 应用举例

方法简述

1. 转化法

解决数学问题时，常遇到一些问题直接求解较为困难，通过观察、分析、类比、联想等思维过程，选择运用恰当的数学方法进行变换，将原问题转化为一个新问题（相对来说，是我们熟悉和已解决的问题或容易解决的问题），通过新问题的求解，达到解决原问题的目的，这一思想方法我们称为转化法.

例 1 如图所示，在某点 B 处测得建筑物 AE 的顶端 A 的仰角为 θ，沿 BE 方向前进 30 m，至点 C 处测得顶端 A 的仰角为 2θ，再继续前进 $10\sqrt{3}$ m 至 D 点，测得顶端 A 的仰角为 4θ，求 θ 的大小和建筑物 AE 的高.



例 1 图

点拨 本题可转化为解三角形的问题，利用正弦定理求解；也可转化为方程问题求解；还能借助二倍角公式解决.

解答 解法一：（用正弦定理求解）

由已知，可得

在$\triangle ACD$ 中，$AC=BC=30$，$AD=DC=10\sqrt{3}$，$\angle ADC=180^\circ-4\theta$.

$\therefore \dfrac{10\sqrt{3}}{\sin 2\theta}=\dfrac{30}{\sin(180^\circ-4\theta)}$.

$\because$ $\sin 4\theta=2\sin 2\theta\cos 2\theta$，$\therefore \cos 2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 解得 $2\theta=30^\circ$，$\therefore \theta=15^\circ$.

$\therefore$在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$AE=AD\sin 60^\circ=15$(m).

答：所求角 θ 为 15°，建筑物高度为 15 m.

解法二：（设方程求解）

设 $DE=x$，$AE=h$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$(10\sqrt{3}+x)^2+h^2=30^2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$x^2+h^2=(10\sqrt{3})^2$.

两式相减，得 $x=5\sqrt{3}$，$h=15$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$\tan 2\theta=\dfrac{h}{10\sqrt{3}+x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore 2\theta=30^\circ$，$\theta=15^\circ$.

答：所求角 θ 为 15°，建筑物高度为 15 m.

解法三：（用倍角公式求解）

设建筑物高为 $AE=x$.

由题意，得$\angle BAC=\theta$，$\angle CAD=2\theta$，

$AC=BC=30$，$AD=CD=10\sqrt{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$\sin 2\theta=\dfrac{x}{30}$.　①

在 Rt$\triangle ADE$ 中，$\sin 4\theta=\dfrac{x}{10\sqrt{3}}$.　②

②÷①，得 $\cos 2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

则 $2\theta=30^\circ$，$\theta=15^\circ$，$AE=AD\sin 60^\circ=15(\mathrm{m})$.

答：所求角 θ 为 15°，建筑物高度为 15 m.

反思　将复杂的问题转化为简单问题，通过求解简单问题达到解决复杂问题的目的. 本题有多种转化方式，是一题多解的典型问题.

2. 基本不等式法

基本不等式是解决最值问题的一种常用方法. 在运用基本不等式 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\,(a>0,b>0)$ 解题时，一定要注意其成立的条件“一正、二定、三相等”，即“正数是前提，定值是基础，相等是保证”，三者缺一不可.

例 2　已知 A、B、C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，$y=\cot A+\dfrac{2\sin A}{\cos A+\cos(B-C)}$.

(1) 若任意交换两个角的位置，y 的值是否变化？试证明你的结论.

(2) 求 y 的最小值.

点拨　第一问要将原式转化为 $y=\cot A+\cot B+\cot C$；第二问的最值问题可利用基本不等式求解.

解答　(1) $\because$

$$\begin{aligned}y&=\cot A+\frac{2\sin[\pi-(B+C)]}{\cos[\pi-(B+C)]+\cos(B-C)}\\&=\cot A+\frac{2\sin(B+C)}{-\cos(B+C)+\cos(B-C)}\\&=\cot A+\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\sin B\sin C}\\&=\cot A+\cot B+\cot C,\end{aligned}$$

$\therefore$ 任意交换两个角的位置，y 的值不变化.

(2) $\because \cos(B-C)\leqslant 1$，

$$\therefore y\geqslant\cot A+\frac{2\sin A}{1+\cos A}=\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{2\tan\frac{A}{2}}+2\tan\frac{A}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cot\frac{A}{2}+3\tan\frac{A}{2}\right)\geqslant\sqrt{3\tan\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{A}{2}}=\sqrt{3}.$$

故当 $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$y_{\min}=\sqrt{3}$.

反思　本题的第(1)问是一道结论开放型题，y 的表达式的表面不对称性显示了问题的有趣之处. 第(2)问实际上是一道常见题：在 $\triangle ABC$ 中，求证：$\cot A+\cot B+\cot C\geqslant\sqrt{3}$.

易错解读