高职高专数学系列教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

下

主 编 郭洪奇 孟 渝 简辉春

电子科技大学出版社

高职高专数学系列教材

高等数学

（下册）

总主编　李坤琼　郭洪奇

主　编　郭洪奇　孟　渝　简辉春

副主编　李坤琼　刘　双　方明华　赵　明

参　编　孙婷雅

主　审　李坤琼

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据
高等数学. 下册/郭洪奇, 孟渝, 简辉春主编.
—成都:电子科技大学出版社,2017.6
ISBN 978-7-5647-4758-9
Ⅰ.①高… Ⅱ.①郭… ②孟… ③简… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 147192 号

内容提要

《高等数学》分上、下两册. 本书是《高等数学》(下册),内容包含空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、线性代数基础、概率论简介. 内容经过精细筛选,层次分明、深入浅出,全书例题丰富,每章后有复习题及专升本习题,书末附有全部习题答案,便于教师教学和学生自学. 本书符合各类高职高专的教学要求,可作为高职高专院校各专业教材,同时也参照了"2014 重庆普通专升本'高等数学'考试大纲"的要求编写,特别适合要参加专升本考试的学生使用. 本书配套有《高等数学辅导与练习》(下册),并可作为学生的课外作业本.

高职高专数学系列教材 · 高等数学(下册)
GAODENG SHUXUE(XIACE)

郭洪奇　孟　渝　简辉春　主　编
李坤琼　刘　双　方明华　赵　明　副主编

策划编辑　吴艳玲
责任编辑　吴艳玲

出版发行　电子科技大学出版社
　　　　　成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼　邮编　610051
主　　页　www.uestcp.com.cn
服务电话　028－83203399
邮购电话　028－83201495

印　　刷　重庆学林建达印务有限公司
成品尺寸　185mm × 260mm
印　　张　12
字　　数　300 千字
版　　次　2017 年 6 月第一版
印　　次　2017 年 6 月第一次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5647-4758-9
定　　价　29.80 元

前言

“高等数学”是高等教育的重要基础课,它既为后续专业课程的专业知识学习准备必要的数学知识、工具,又对学生的学习方法、科学思维的训练起着重要的作用. 但随着我国高等教育大众化的发展,高等职业学院等大量涌现,高职教育中的高等数学基础课呈现出各种差异极大的状况. 即全国不同的地区、各地区的不同学校、各学校不同的专业、各专业不同的时期,所设置的高等数学的课时不相同,教学要求也在不断地改革、变化. 因此,各种高等数学教材随各地、各行业或各种学校不同的办学情况作出了相应的改变,并且也随时间作出修改,这也是基础课程结合相应高职教育的改革所作出的反应.

鉴于这种情况,我们编写了一套能普遍适用于一般高职院校使用的《高等数学》,本教材分上、下册,既兼顾了一般高职院校各种不同专业、不同学时要求的高等数学多方面内容,同时编写内容主要参照“重庆普通专升本‘高等数学’考试大纲”,给专升本的学生提供了详尽的考试内容及题型练习.

教材的特色如下.

1. 首先是针对一般高职院校各专业不同学时的教学要求,编写了“一元函数微积分、常微分方程”作为《高等数学》(上册)的内容,作为高职数学课的基本重点内容. 将“空间解析几何、多函数元微积分、无穷级数、线性代数基础,概率论简介”作为《高等数学》(下册)的内容,作为一般高职院校数学课时较多的选择教学内容.

2. 首先是为了满足高职各专业的数学知识的基本要求,特别是数学基础较差学生的教学,故在每章节中只列出简单、基本的练习,配套编写了《高等数学辅导与练习》相应学习范例与习题. 其次为了满足部分数学基础较好或要参加“专升本”的学生学习的需求,故在教材每章后面有“专升本习题”,相应《高等数学辅导与练习》有相应的例题及“专升本自测练习”,这些例题的类型与难度都参考了历年的重庆市“专升本考试题”.

3. 强化了数学在实际中的应用,书中概念的引入主要从实际问题入手,遵循了从感性到理性的认知规律,从数学理论在实际中的应用推出了不少范例. 书中编入了不少有实际应用背景的例题,习题以应用和结合专业知识为原则.

4. 与其他教材相比,在必学内容中删去了只具理论价值,在实际中用处不大的纯理论知识. 不少定理省去了严格的理论

证明,只给出几何解释或归纳.本教材优化了高等数学内容结构,主要是针对高职教育对高等数学基本知识作了大量的删减,以适应高职学生及高职各专业的要求.

5.以生为本,适合用于分层教学.考虑到高职生源的多渠道,基础不一致的特点,兼顾全体学生的个体学习差异.注重教学互动,改变学生学习方式,打破了以罗列知识为表现形式的陈述式教材,教材中尽量克服了注入式的、死记硬背教学描述,代之以实用的数学知识的应用问题.本教材试图体现教学的启发式,改学生的被动接受为主动参与,让学生通过积极思考,相互启发,发挥主观能动性,提高学习效率.教材中穿插了大量图标、图形和图示,图文并茂.每章的开头配有启发性的引言,学生易于接受,乐于接受.

教材编写安排

《高等数学》(上册)第2,3,4,5,6章由李坤琼编写;第1,7,8章由刘双编写;第1章1.2节由赵明、方明华编写.《高等数学》(下册)第9,10,11章由郭洪奇编写;第12章由简辉春编写;第13章由孟渝编写.

编写组成员

上　册:	主　编	刘　双	李坤琼	方明华	
	副主编	郭洪奇	孟　渝	简辉春	孙婷雅
	参　编	赵　明			
	主　审	郭洪奇			
下　册:	主　编	郭洪奇	孟　渝	简辉春	
	副主编	李坤琼	刘　双	方明华	赵　明
	参　编	孙婷雅			
	主　审	李坤琼			

《高等数学》可供三年制高职、高专使用,也可供招收初中毕业生的五年制高职选用.

由于本教材具有创新的模式,编写它是一种尝试,且编者水平有限,因此难免有错漏和不妥之处,敬请读者批评指正.

《高等数学》教材编写组

2017年1月

目　录

加*号为 2014 年重庆市专升本大纲不要求的内容

第9章

空间解析几何

解析几何是用代数的方法来研究几何的问题,平面解析几何能使一元函数微积分有了直观的几何意义,空间解析几何可使二元函数微积分作形象的理解. 本章首先给出空间直角坐标系,然后介绍空间向量的知识,以向量为工具讨论空间的平面和直线,最后简单了解空间曲面和空间曲线的部分内容. 向量作为研究空间解析几何的有效工具,而空间解析几何是学习多元函数微积分的基础知识.

9.1 空间直角坐标系

9.1.1 空间直角坐标系

初等数学中实数 x 与数轴上的点是一一对应的,二元数组(x,y)与坐标平面上的点是一一对应的,从而可以用代数的方法讨论几何问题. 类似地,通过建立空间直角坐标系,把空间中的点与一个三元有序数组(x,y,z)建立一一对应关系,用代数的方法研究空间的几何问题.

如图 9-1 所示,选空间一定点 O,作三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点. 且三条坐标轴方向按右手法则配置,即当右手的四指从轴的正向以$\frac{\pi}{2}$角度一头旋转向 y 轴的正向时,大拇指伸直所指的方向就是 z 轴的正向(如图 9-2 所示),这样的三条坐标轴就构成了一个空间直角坐标系. 称点 O 叫坐标原点,三条轴分别称为横轴(x 轴)、纵轴(y 轴)、竖轴(z 轴);通常把横轴和纵轴配置在水平面上,而竖轴则是铅垂线,当然也可以任意放置三个坐标轴,只要 x、y、z 轴满足上述右手法则即可(如图 9-3 所示).

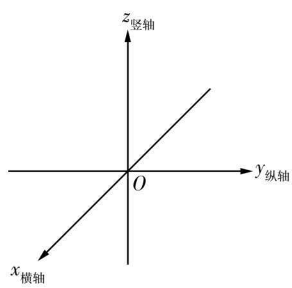


图 9-1

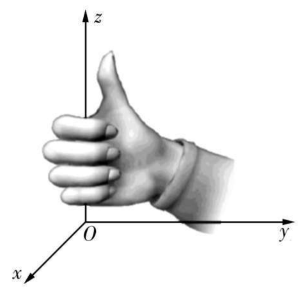


图 9-2

空间直角坐标系的三条坐标轴两两分别可以决定三个互相垂直的平面 xOy、yOz、zOx,统称为坐标平面,三个坐标平面将空间分成八个部分,叫空间直角坐标系的八个**卦限**,并且分别将 xOy 平面的第一、二、三、四象限的上方空间叫第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限,下方空间叫第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限,如图 9-4 所示,坐标平面(坐标轴)不属于任何卦限.

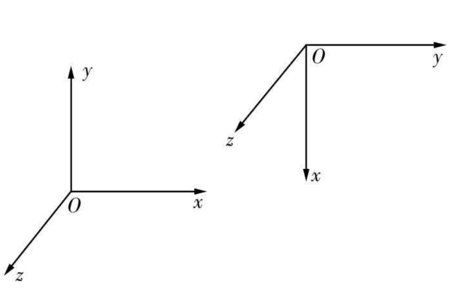


图 9-3

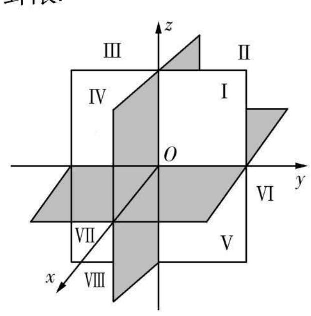


图 9-4

P 为空间的一点，过点 P 分别作一个垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，它们与坐标轴分别交于 A、B、C 三点，三点在坐标轴上对应的三个实数依次为 x、y、z（如图 9－5 所示），这样点 P 就唯一决定了一个有序实数组 (x,y,z)；反之，如果给定一个有序实数组 (x,y,z)，在 x 轴、y 轴、z 轴上取与 x、y、z 相对应的点 A、B、C，再过 A、B、C 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂直平面，这三个平面必相交于唯一的一点 P.

通过空间直角坐标系，空间中的点与有序实数组 (x,y,z) 就形成了一一对应关系，称实数 x、y、z 叫点 P 的坐标，记作 (x,y,z)，并分别称 x、y、z 为点 P 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

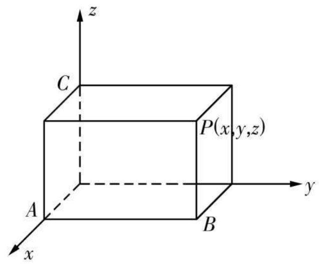


图 9－5

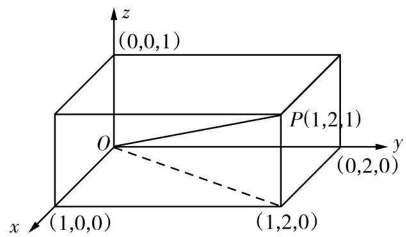


图 9－6

例 1　过点 $P(1,2,1)$ 作 xOy 平面及 x 轴、y 轴、z 轴的垂线，试写出垂足坐标.

解　如图 9－6 所示，在 xOy 平面上的垂足坐标为 $(1,2,0)$.

在 x 轴上的垂足坐标为 $(1,0,0)$，

在 y 轴上的垂足坐标为 $(0,2,0)$，

在 z 轴上的垂足坐标为 $(0,0,1)$.

例 2　写出点 $(-2,1,3)$ 关于坐标平面、坐标轴、坐标原点的对称点的坐标.

解　点 $(-2,1,3)$ 关于坐标平面 xOy、yOz、zOx 的对称点坐标分别为 $(-2,1,-3)$、$(2,1,3)$、$(-2,-1,3)$；

点 $(-2,1,3)$ 关于 x 轴、y 轴、z 轴的对称点坐标分别为 $(-2,-1,-3)$、$(2,1,-3)$、$(2,-1,3)$；

点 $(-2,1,3)$ 关于坐标原点的对称点坐标为 $(2,-1,-3)$.

9.1.2　空间中两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间任意两点，过点 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（如图 9－7 所示）. 由立体几何知，长方体的对角线的长度的平方等于它的三条棱的长度的平方和，即

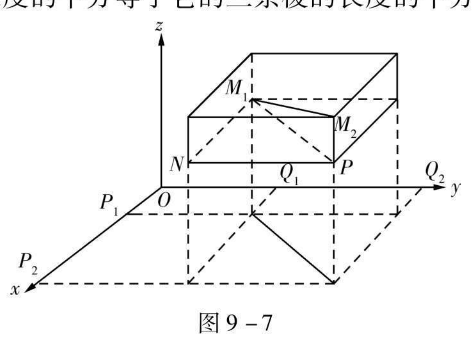


图 9－7

$$|M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 = |P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_2|^2$$
$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

由此得空间任意两点间的距离公式：

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}. \tag{9.1}$$

点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点 O 的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

例 3 求点 $M(2,1,-1)$ 到 y 轴的距离.

解 过点 M 作 y 轴的垂线,其垂足点 P 的坐标为 $(0,1,0)$,所以

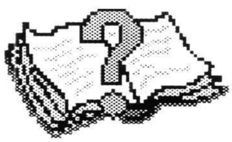
$$|MP| = \sqrt{(2-0)^2 + (1-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{5}.$$

例 4 在 z 轴上求与点 $A(2,-1,3)$ 和 $B(6,2,-2)$ 等距离的点 P.

解 由于所求的点 P 在 z 轴上,可设该点的坐标为 $(0,0,z)$,依题意有 $|PA|=|PB|$,由两点间的距离公式,得

$$\sqrt{(0-2)^2 + (0+1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(0-6)^2 + (0-2)^2 + (z+2)^2}$$

解之得 $z=-3$,所以,所求的点为 $P(0,0,-3)$.



习 题 9.1

1. 在空间直角坐标系中作出下列各点的图.

A. $(2,3,-2)$　　B. $(1,-1,2)$　　C. $(-2,-2,-3)$

2. 写出点 $(7,-1,2)$ 关于 zOx 平面、y 轴、坐标原点的对称点的坐标.
3. 求点 $m(2,3,2)$ 到坐标 x 轴的距离,并作出示意图.
4. 求点 $(3,-4,5)$ 与坐标原点及各坐标面间的距离.
5. 在 y 轴上求与点 $M_1(1,2,3)$ 和 $M_2(2,3,2)$ 等距离的点坐标.
6. 证明以点 $A(9,1,4)$、$B(6,-1,10)$、$C(3,4,2)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

9.2 空间的向量

在初等数学中已经学习过了平面向量的知识,现在从平面上的向量扩展为空间向量,平面向量的许多知识都可以类推到空间中的向量.

9.2.1 向量的线性运算

向量的加法、减法和向量与数相乘可统称为向量的线性运算,向量的线性运算对于平面向量规律可以推广到空间向量.

1. **向量的加法**

设空间有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形，从公共起点到对角的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 9－8 所示，这叫作向量加法的平行四边形法则. 向量的加法符合交换律与结合律.

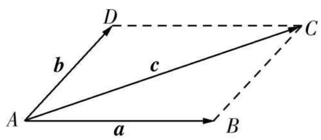


图 9－8

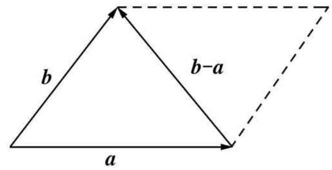


图 9－9

2. **向量的减法**

向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为：$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$，即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，如图 9－9 所示. 任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

3. **向量的数乘**

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为**零向量**，这时它的方向可以是任意的. 当 $\lambda=\pm1$ 时，有 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

例 1　如图 9－10 所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点.

解　由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，即 $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$，于是 $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

因为 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以 $\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又因 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

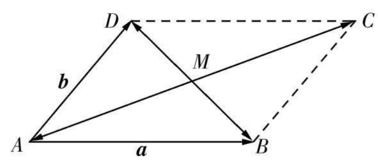


图 9－10

设 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，则向量 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的**单位向量**，记为 $\boldsymbol{e}^0$，于是 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}^0$. 可以证明向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

9.2.2　空间向量的坐标法

设向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是空间直角坐标系的坐标轴上分别与 x 轴、y 轴、z 轴正方向相同的单位向量，$\overrightarrow{OP}$ 向量的起点在坐标原点，终点坐标为 (x,y,z)，如图 9－11 所示.

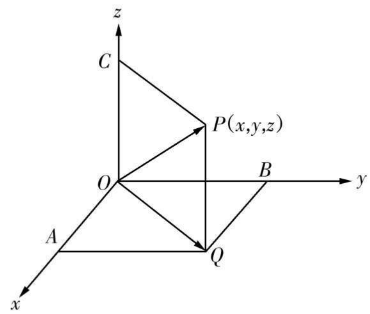


图 9-11

则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,为向量 $\overrightarrow{OP}$ 按基本单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的分解式,x、y、z 有序实数组叫向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标表示式,记为 $\overrightarrow{OP}=\{x,y,z\}$. 显然,$|\overrightarrow{OP}|=|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$,$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$,

因此
$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}. \tag{9.2}$$
易证
$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}. \tag{9.3}$$

定义 9.1 向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角 α、β、γ(其中 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$,$0\leqslant\beta\leqslant\pi$,$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$)叫向量 $\overrightarrow{OP}$ 的**方向角**,$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 叫向量 $\overrightarrow{OP}$ 的**方向余弦**. 由余弦的计算可知向量 $\overrightarrow{OP}=\{x,y,z\}$ 的方向余弦为

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{cases} \tag{9.4}$$

可证明方向余弦有关系:$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,方向余弦是表达空间向量在空间的位置的量.

例 2 已知作用于某质点的三个力分别为:$\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{F}_2=-2\boldsymbol{j}+\sqrt{2}\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{F}_3=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\sqrt{2}\boldsymbol{k}$,求合力 $\boldsymbol{F}$ 的大小与方向角.

解 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\sqrt{2}\boldsymbol{k}$,$|\boldsymbol{F}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$,

所以 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$,$\cos\beta=\dfrac{1}{2}$,$\cos\gamma=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$,$\beta=\dfrac{\pi}{3}$,$\gamma=\dfrac{3}{4}\pi$

即合力大小为 2,合力的方向角分别为 $\dfrac{2}{3}\pi$,$\dfrac{\pi}{3}$,$\dfrac{3}{4}\pi$.

例 3 已知 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$,$P(x,y,z)$ 是 P_1P_2 上一点,若 $\dfrac{P_1P}{PP_2}=\lambda$,证明 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$,$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$,$z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

解　$\overrightarrow{P_1P}=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\},\overrightarrow{PP_2}=\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}$

因为$\dfrac{P_1P}{PP_2}=\lambda$，所以$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，于是

$x-x_1=\lambda(x_2-x),y-y_1=\lambda(y_2-y),z-z_1=\lambda(z_2-z)$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{9.5}$$

上式为空间中线段的**定比分点**公式. 当 $\lambda=1$，点 P 是有向线段 P_1P_2 的中点，其坐标为 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2},y=\dfrac{y_1+y_2}{2},z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$.

9.2.3　向量的数量积

定义 9.2　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 的两个向量，称 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{ab}$. 数量积也称内积或点积，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta. \tag{9.6}$$

显然，当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$，数量积满足交换律、结合律、分配律.

设向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)、(x_2,y_2,z_2)，则

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})$

$=x_1x_2\boldsymbol{i}^2+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_1z_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+y_1x_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}^2+y_1z_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+z_1x_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+z_1y_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+z_1z_2\boldsymbol{k}^2$

$=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{9.7}$$

当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不是零向量时，

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},|\boldsymbol{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$

向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{9.8}$$

例 4　设力 $\boldsymbol{F}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 作用于一质点上，质点由 $A(1,-2,3)$ 沿直线移动到点 $B(2,-4,2)$，求力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功.

解　$\overrightarrow{AB}=\{2-1,-4-(-2),2-3\}=\{1,-2,-1\}$，

$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=\{3,1,-2\}\cdot\{1,-2,-1\}=3.$

9.2.4　向量的向量积

设 O 为杠杆 L 的支点，有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于这杠杆上 P 点处，$\boldsymbol{F}$ 与 L 的夹角为 θ，如图 9-12 所示. 由力学知识，力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一个向量 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{M}$ 的模等于力的大小与力臂的乘积，即 $|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP}|\cdot|\boldsymbol{F}|\sin\theta$，$\boldsymbol{M}$ 的方向同时垂直 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$. 由此，给出两个向量的向量积的概念：

定义 9.3　设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 的两个向量，若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足：

(1) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$　(9.9)

(2) $\boldsymbol{c}$ 同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，它的方向由右手螺旋法则确定，即当右手四指从 $\boldsymbol{a}$ 的正方向

以小于180°的角度转向 $\boldsymbol{b}$ 的正方向握拳时,大拇指伸直所指的方向就是 $\boldsymbol{c}$ 的方向,如图9-13所示.

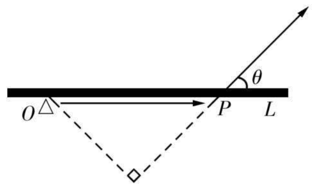


图9-12

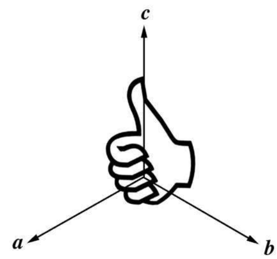


图9-13

称向量 $\boldsymbol{c}$ 叫向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积或叉积,记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 即上述力 $\boldsymbol{F}$ 对杠杆 L 上支点 O 的力矩 $\boldsymbol{M}$,可以表示为 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

根据定义:当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$;当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$;$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_zk$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$. 按向量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\\&\quad\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

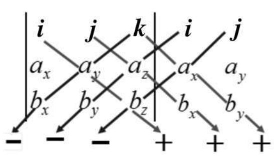
由于 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$,$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$,所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}. \tag{9.10}$$

为了帮助记忆,可以利用三阶行列式符号把上式可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=a_yb_z\boldsymbol{i}+a_zb_x\boldsymbol{j}+a_xb_y\boldsymbol{k}-a_yb_x\boldsymbol{k}-a_xb_z\boldsymbol{j}-a_zb_y\boldsymbol{i}\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

三阶行列式是本书第12章线性代数知识,也可用“沙路法”简单表示计算法:



$$=a_yb_z\boldsymbol{i}+a_zb_x\boldsymbol{j}+a_xb_y\boldsymbol{k}-a_yb_x\boldsymbol{k}-a_xb_z\boldsymbol{j}-a_zb_y\boldsymbol{i}.$$

例5 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\\&=[1\times2-(-1)\times(-1)]\boldsymbol{i}+[(-1)\times1-2\times2]\boldsymbol{j}+[2\times(-1)-1\times1]\boldsymbol{k}\\&=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

例6 求与 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{k}$ 同时垂直的单位向量 $\boldsymbol{c}^0$.

解 由向量积的定义可知,若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 同时垂直,

而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\\&=[1\times1-0\times1]\boldsymbol{i}+[0\times0-1\times1]\boldsymbol{j}+[1\times0-1\times0]\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

因此,与 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 同时垂直的单位向量

$$c^0 = \pm\frac{c}{|c|} = \pm\frac{i-j}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(i-j).$$

习　题　9.2

1. 已知平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 和 CD 的中点分别为 E 和 F，设 $\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{h}$，求 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{CD}$.

2. 已知向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的始点为 $P_1(2,-2,5)$，终点为 $P_2(-1,4,7)$，试求：

(1) 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标表示；(2) 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模；

(3) 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦；(4) 与向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 方向一致的单位向量.

3. 设向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$，若 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}=0$，求 $\boldsymbol{c}$.

4. 设 $\boldsymbol{a}=\{1,2,-1\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,-1,1\}$，计算：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$　　(3) $(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})$

5. 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-m\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，求下列情况下 m 的值.

(1) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$

6. 设 $\boldsymbol{a}=\{1,0,-2\}$，$\boldsymbol{b}=\{-3,1,1\}$，求：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

7. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$；(3) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

9.3　空间的平面

9.3.1　平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一个平面，这向量就叫作该平面的**法向量**. 由立体几何知识，平面上的任一向量均与该平面的法向量垂直. 当平面 π 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一个法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 为已知时，平面的位置就完全确定了. 如图 9－14 所示.

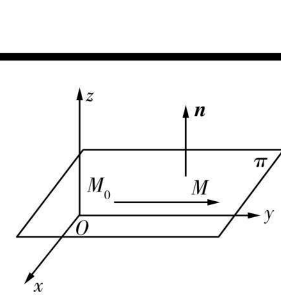


图 9－14

设 $M(x,y,z)$ 是平面 π 上的任一点，那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必与平面 π 的法线向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，即它们的数量积等于零，即 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$.

由于 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$,$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{9.11}$$

这就是平面上任一点 M 的坐标 x,y,z 所满足的方程.

如果 $M(x,y,z)$不在平面 π 上,那么向量$\overrightarrow{M_0M}$与法线向量 $\boldsymbol{n}$ 不垂直,从而 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}\neq0$,即不在平面 π 上的点 M 的坐标(x,y,z)不满足此方程.

由于方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 是由平面 π 上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$及它的一个法线向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$确定的,所以此方程叫作平面的**点法式方程**.

例 1 求过点$(2,-3,0)$且以 $\boldsymbol{n}=\{1,-2,3\}$为法线向量的平面的方程.

解 根据平面的点法式方程,得所求平面的方程为

$(-2)-2(+3)+3=0$,即 $-2+3-8=0$.

例 2 求过三点 $M_1(2,-1,4)$、$M_2(-1,3,-2)$和 $M_3(0,2,3)$的平面的方程.

解 可以用$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$作为平面的法线向量 $\boldsymbol{n}$.

因为$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-3,4,-6\}$,$\overrightarrow{M_1M_3}=\{-2,3,-1\}$,

所以 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=14\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

根据平面的点法式方程,得所求平面的方程为

$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$,

即 $14x+9y-z-15=0$.

此题也可用式(9.12)带入三个点,解 A、B、C 的三元一次方程来求解平面方程.

9.3.2 平面的一般式方程

由 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$,

得$(Ax+By+Cz)-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$.

设 $D=Ax_0+By_0+Cz_0$,则

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{9.12}$$

上式称为平面的**一般式方程**,其中 x,y,z 的系数 A,B,C 就是该平面的一个法向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标.

例如,方程 $3x-4y+z-9=0$ 表示一个平面,$\boldsymbol{n}=\{3,-4,1\}$是这平面的一个法向量.

一般式中:

1. $D=0$,$Ax+By+Cz=0$,平面过原点.
2. $A=0$,$By+Cz+D=0$,$\boldsymbol{n}=\{0,B,C\}$法线向量垂直于 x 轴,平面平行于 x 轴.
3. $B=0$,$Ax+Cz+D=0$,$\boldsymbol{n}=\{A,0,C\}$,法线向量垂直于 y 轴,平面平行于 y 轴.
4. $C=0$,$Ax+By+D=0$,$\boldsymbol{n}=\{A,B,0\}$,法线向量垂直于 z 轴,平面平行于 z 轴.
5. $A=B=0$,$Cz+D=0$,$\boldsymbol{n}=\{0,0,C\}$,法线向量垂直于 x 轴和 y 轴,平面平行于 xOy 平面.
6. $Ax+D=0$,$B=C=0$,$\boldsymbol{n}=\{A,0,0\}$,法线向量垂直于 y 轴和 z 轴,平面平行于 yOz 平面.
7. $By+D=0$,$A=C=0$,$\boldsymbol{n}=\{0,B,0\}$,法线向量垂直于 x 轴和 z 轴,平面平行于 zOx 平面.

例 3 求通过 x 轴和点$(4,-3,-1)$的平面的方程.

解 平面通过 x 轴,一方面表明它的法线向量垂直于 x 轴,即 $A=0$;另一方面表明它必通