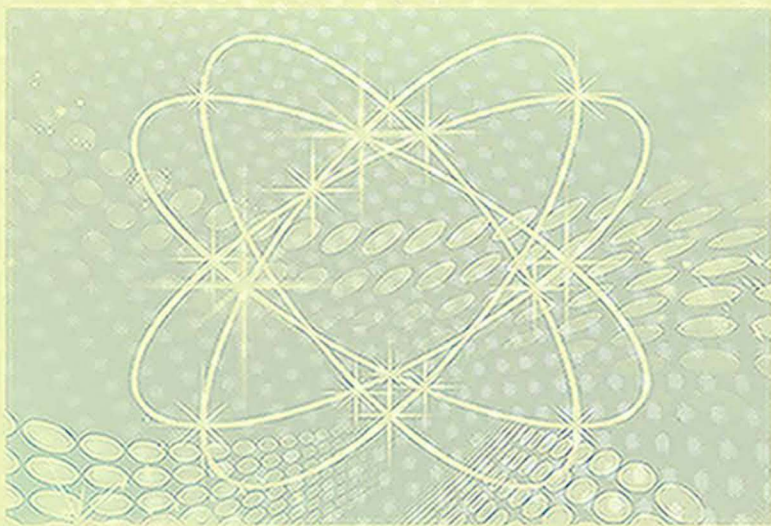


浙江省高职（单考单招）招生考试复习丛书

# 高职考数学复习点要

胡成峰 杨裕铨 主编



电子科技大学出版社



鸿博教育

丛书主编 刘景通

浙江省高职（单考单招）招生考试复习丛书

ZHEJIANGSHENG GAOZHI (DANKAO DANZHAO) ZHAOSHENG KAOSHI FUXI CONGSHU

# 高职考

GAO ZHI KAO

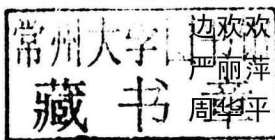
# 数学

## 复习要点

主 编 胡成峰 杨裕铨

副主编 严丽萍 王润玉 蔡琴英

编 委 (按姓氏笔画)



王润玉	石惠珍	沈立立	陈红英
陈明英	张培瑶	张新华	杜 静
周晓凤	林 珮	杨裕铨	赵 胜
俞金剑	董 焱	鲍素珠	蔡琴英



电子科技大学出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

高职考数学复习点要 / 胡成峰, 杨裕铨主编. -- 成都 : 电子科技大学出版社, 2013.8

ISBN 978-7-5647-1760-5

I. ①高… II. ①胡… ②杨… III. ①高等数学—高等职业教育—升学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 178121 号

## 浙江省高职 (单考单招) 招生考试复习丛书 高职考数学复习点要

主编 胡成峰 杨裕铨

---

出版: 电子科技大学出版社 (成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编: 610051)

策划编辑: 吴艳玲

责任编辑: 吴艳玲

主页: [www.uestcp.com.cn](http://www.uestcp.com.cn)

电子邮箱: [uestcp@uestcp.com.cn](mailto:uestcp@uestcp.com.cn)

发行: 新华书店经销

印刷: 杭州华艺印刷有限公司

成品尺寸: 185mm × 260mm 印张: 15 字数: 365 千字

版次: 2013 年 8 月第一版

印次: 2013 年 8 月第一次印刷

书号: ISBN 978-7-5647-1760-5

定价: 32.00 元

---

■ 版权所有 侵权必究 ■

- ◆ 本社发行部电话: 028-83202463; 本社邮购电话: 028-83208003
- ◆ 本书如有缺页、破损、装订错误, 请寄回印刷厂调换。

# 目 录

## 第一章 集合与不等式

第一节 集合及其运算 .....	1
第二节 简易逻辑及四种命题 .....	4
第三节 充分条件和必要条件 .....	6
第四节 不等式的性质和证明 .....	7
第五节 不等式的解法 .....	10

## 第二章 函 数

第一节 函数的概念 .....	14
第二节 函数的性质 .....	17
第三节 一元二次函数 .....	19
第四节 二次函数的应用 .....	21
第五节 指数运算和对数运算 .....	23
第六节 指数函数和对数函数 .....	27
* 第七节 指数方程和对数方程 .....	29

## 第三章 数 列

第一节 数列的基本概念 .....	31
第二节 等差数列 .....	34
第三节 等比数列 .....	36
第四节 数列的应用 .....	38

## 第四章 排列组合与二项式定理

第一节 排列与组合 .....	40
第二节 二项式定理 .....	43

## 第五章 平面向量

第一节 向量的概念和运算 .....	46
第二节 向量的直角坐标运算 .....	48
* 第三节 定比分点公式 .....	50

## 第六章 三角函数

第一节	角的概念推广及其度量	52
第二节	任意角的三角函数	54
第三节	同角三角函数的基本关系式	56
第四节	诱导公式	58
第五节	两角和与两角差的三角函数	59
第六节	正弦函数和正弦型函数的图像及性质	62
第七节	余弦函数和正切函数的图像及性质	65
第八节	解三角形	67
第九节	解三角形的应用举例	69

## 第七章 立体几何

第一节	平面	71
第二节	空间的两条直线	74
第三节	空间直线和平面	76
第四节	空间两个平面	78
第五节	多面体和棱柱	80
第六节	棱锥与棱台	82
第七节	旋转体	84

## 第八章 解析几何

第一节	曲线与方程	88
第二节	直线的倾斜角和斜率	91
第三节	直线的方程	93
第四节	两条直线的位置关系	95
第五节	距离公式与二元一次不等式表示的平面区域	97
第六节	圆的方程	99
第七节	直线与圆、圆与圆的位置关系	102
第八节	椭圆的定义和标准方程	104
第九节	双曲线的定义和标准方程	106
第十节	抛物线的定义和标准方程	108

## 习题部分

### 第一章 集合与不等式

第一节 集合及其运算 .....	111
第二节 简易逻辑及四种命题 .....	113
第三节 充分条件和必要条件 .....	116
第四节 不等式的性质和证明 .....	117
第五节 不等式的解法 .....	119

### 第二章 函 数

第一节 函数的概念 .....	121
第二节 函数的性质 .....	123
第三节 一元二次函数 .....	125
第四节 二次函数的应用 .....	128
第五节 指数运算和对数运算 .....	130
第六节 指数函数和对数函数 .....	132
* 第七节 指数方程和对数方程 .....	134

### 第三章 数 列

第一节 数列的基本概念 .....	136
第二节 等差数列 .....	138
第三节 等比数列 .....	140
第四节 数列的应用 .....	142

### 第四章 排列组合与二项式定理

第一节 排列与组合 .....	144
第二节 二项式定理 .....	146

### 第五章 平面向量.....

### 第六章 三角函数

第一节 角的概念推广及其度量 .....	151
第二节 任意角的三角函数 .....	153
第三节 同角三角函数的基本关系式 .....	155
第四节 诱导公式 .....	157

第五节	两角和与两角差的三角函数 .....	159
第六节	正弦函数和正弦型函数的图像及性质 .....	161
第七节	余弦函数和正切函数的图像及性质 .....	163
第八节	解三角形 .....	164
第九节	解三角形的应用举例 .....	166
<b>第七章 立体几何</b>		
第一节	平面 .....	168
第二节	空间的两条直线 .....	169
第三节	空间直线和平面 .....	171
第四节	空间两个平面 .....	173
第五节	多面体和棱柱 .....	175
第六节	棱锥与棱台 .....	177
第七节	旋转体 .....	179
<b>第八章 解析几何</b>		
第一节	曲线与方程 .....	181
第二节	直线的倾斜角和斜率 .....	183
第三节	直线的方程 .....	184
第四节	两条直线的位置关系 .....	186
第五节	距离公式与二元一次不等式表示的平面区域 .....	188
第六节	圆的方程 .....	190
第七节	直线与圆、圆与圆的位置关系 .....	192
第八节	椭圆的定义和标准方程 .....	194
第九节	双曲线的定义和标准方程 .....	197
第十节	抛物线的定义和标准方程 .....	199
<b>参考答案</b> .....		201



## 第一章 集合与不等式

## 第一节 集合及其运算



## 学习要求

1. 了解集合的意义及其表示方法.
2. 理解空集、子集、交集、并集、补集的概念及其表示方法;了解符号  $\in$ 、 $\notin$ 、 $\cup$ 、 $\cap$ 、 $\subseteq$ 、 $\supseteq$ 、 $\subsetneq$ 、 $=$  的含义.
3. 会求一个集合的子集,掌握集合间的交、并、补运算.



## 梳理知识

## 集合的基本概念

- (1) 集合、元素及集合中元素的三个特征(确定性,互异性,无序性);
- (2) 集合的表示方法:列举法,描述法,图示法;  
注:不等式的解集和函数的定义域、值域等常用区间来表示.
- (3) 集合的分类:有限集,无限集,空集(记作  $\emptyset$ );
- (4) 常见的几种数集: $\mathbf{N}$ ( $\mathbf{N}^*$ ,  $\mathbf{N}_+$ ),  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ;
- (5) 元素与集合的关系:区分  $\in$ 、 $\notin$

## 【练例】

1. 用符号“ $\in$ 、 $\notin$ ”填空:

- (1)  $1 \in \mathbf{N}$ ; (2)  $0 \in \mathbf{R}^*$ ; (3)  $0 \in \{0\}$ ; (4)  $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ ;  
 (5)  $\frac{1}{3} \in \mathbf{R}$ ; (6)  $\sqrt{3} \in \{x \mid x < 2\}$ ; (7)  $0 \in \emptyset$ .

2. 用适当的方法表述下列集合:

- (1) 所有不大于 11 的质数组成的集合: \_\_\_\_\_;
- (2) 15 的正因数组成的集合: \_\_\_\_\_;
- (3) 被 4 除余 1 的自然数组成的集合: \_\_\_\_\_;
- (4) 正奇数组成的集合: \_\_\_\_\_;
- (5) 所有偶数组成的集合: \_\_\_\_\_.

## 集合与集合的关系

(1) 子集:  $A \subseteq B \Leftrightarrow$  若  $x \in A$  则  $x \in B$ ;

注:① 空集是任一集合的子集;

② 任何集合都是它本身的子集;

③ 集合  $A$  的所有子集的个数为  $2^n$ , 其中  $n$  为集合  $A$  中元素的个数.

(2) 真子集:  $A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subseteq B$  且存在  $x \in B$  但  $x \notin A$ ;

注:① 空集是任何非空集合的真子集;



- ② 任何集合都不是它本身的真子集;
  - ③ 集合  $A$  的所有真子集的个数为  $2^n - 1$ , 其中  $n$  为集合  $A$  中元素的个数.
- (3) 相等:  $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ .

**【练例】**

1. 区分符号  $\in$ 、 $\notin$ 、 $\cup$ 、 $\cap$ 、 $\subseteq$ 、 $\supseteq$ 、 $\subsetneq$ 、 $=$ ;
2. 写出集合  $\{x \mid -1 \leq x < 2, x \in \mathbf{Z}\}$  的所有子集, 并指出哪些是真子集.

**集合的运算**

- (1) 交集:  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ ;  
运算律:  $A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A, A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ .
- (2) 并集:  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ ;  
运算律:  $A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A, A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ .
- (3) 补集: 设  $U$  是全集,  $A \subseteq U$ , 则  $\complement_U A = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$ ;  
运算律:  $\complement_U U = \emptyset, \complement_U \emptyset = U, A \cup \complement_U A = U, A \cap \complement_U A = \emptyset, \complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B, \complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$ .

**【练例】**

1. 已知全集  $U = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x < 10\}$ ,  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_,  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_,  $\complement_U A =$  \_\_\_\_\_.
2. 已知全集  $U = \mathbf{R}$ ,  $A = \{x \mid x \geq 1\}$ ,  $B = \{x \mid x < 3\}$ , 则  $\complement_U A =$  \_\_\_\_\_,  $\complement_U B =$  \_\_\_\_\_,  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_,  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_,  $A \cap \complement_U B =$  \_\_\_\_\_,  $B \cup \complement_U A =$  \_\_\_\_\_.
3. 已知全集  $U = \mathbf{R}$ ,  $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$ ,  $B = \{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$ , 则  $\complement_U A =$  \_\_\_\_\_,  $\complement_U B =$  \_\_\_\_\_,  $A \cap \complement_U B =$  \_\_\_\_\_.

 **典型例题**

**【例 1】** 设  $A = \{-4, 2a - 1, a^2\}$ ,  $B = \{a - 5, 1 - a, 9\}$ , 且  $A \cap B = \{9\}$ , 求  $a$  的值.

**【例 2】** 已知集合  $A = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0\}$ , 若  $A$  中至多只有一个元素, 求  $a$  的取值范围.

**【例 3】** 已知  $A \cap B = \{x \mid 0 \leq x < 5\}$ ,  $B = \{x \mid x \geq 0\}$ , 求  $A$ .

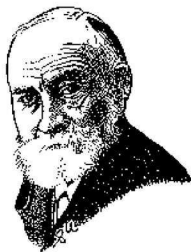


【例 4】 写出满足  $\{1,2,3\} \subseteq A \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$  的所有集合  $A$ .



### 为科学而疯的人 —— 康托尔

康托尔(G·Cantor,1845—1918)是德国数学家、19世纪数学伟大成就之一——集合论的创立人.康托尔1845年3月3日出生在俄国的圣彼得堡.11岁时,他和父母一起迁到德国的法兰克福.康托尔自幼对数学有浓厚兴趣.23岁获博士学位,以后一直从事数学教学与研究.他所创立的集合论已被公认为全部数学的基础.



1874年康托尔的有关无穷的概念,震撼了知识界.康托尔凭借古代与中世纪哲学著作中关于无限的思想而导出了关于数的本质新的思想模式,建立了处理数学中的无限的基本技巧,从而极大地推动了分析与逻辑的发展.他研究数论和用三角函数唯一地表示函数等问题,发现了惊人的结果:证明有理数是可列的,而全体实数是不可列的.由于研究无穷时往往推出一些合乎逻辑的但又荒谬的结果(称为“悖论”),许多大数学家唯恐陷进去而采取退避三舍的态度.在1874—1876年期间,不到30岁的康托尔向神秘的无穷宣战.他靠着辛勤的汗水,成功地证明了一条直线上的点能够和一个平面上的点一一对应,也能和空间中的点一一对应.这样看起来,1厘米长的线段内的点与太平洋面上的点,以及整个地球内部的点都“一样多”,后来几年,康托尔对这类“无穷集合”问题发表了一系列文章,通过严格证明得出了许多惊人的结论.

康托尔的创造性工作与传统的数学观念发生了尖锐冲突,遭到一些人的反对、攻击甚至谩骂.有人说,康托尔的集合论是一种“疾病”,康托尔的概念是“雾中之雾”,甚至说康托尔是“疯子”.来自数学权威们的巨大精神压力终于摧垮了康托尔,使他心力交瘁,患了精神分裂症,被送进精神病医院.他在集合论方面许多非常出色的成果,都是在精神病发作的间歇时期获得的.

真金不怕火炼,康托尔的思想终于大放光彩.1897年举行的第一次国际数学家会议上,他的成就得到承认,伟大的哲学家、数学家罗素称赞康托尔的工作“可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工作.”可是这时康托尔仍然神志恍惚,不能从人们的崇敬中得到安慰和喜悦.1918年1月6日,康托尔在一家精神病院去世.

## 第二节 简易逻辑及四种命题

### 学习要求

1. 了解命题的概念;能够判定分别用“且”、“或”、“非”、“如果……那么……”连接而成的复合命题的真值;能够写出命题  $p$  的否定形式,以及“非  $p$ ”的真值的判定.
2. 了解四种命题的真值判断.

### 梳理知识

#### 命题的概念

能够唯一判断真假的陈述句叫做命题.

注:不能判断真假或不涉及真假的句子不是命题.

#### 【练例】

判断下列语句哪些是命题?若是,请指出是真命题还是假命题.

- (1)  $\sqrt{2} \in \{x \mid x^2 - 2 = 0\}$ ;
- (2)  $x^2 - 1 > 0$ ;
- (3) 在三角形  $ABC$  中,最大角所对应的边最长;
- (4) 到定点的距离等于定长的点的轨迹是圆吗?
- (5) 不等式  $x^2 - 2x - 3 > 0$  的解集是  $\{x \mid x > 3\}$ .

#### 复合命题的真值判断

- (1) 复合命题连接词:“且”、“或”、“非”、“如果……那么……”
- (2) 复合命题真值表:

$p$	$q$	$p$ 且 $q$	$p$ 或 $q$	如果 $p$ , 那么 $q$
真	真	真	真	真
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真

#### 【练例】

判断下列语句是否是命题.若是,再判断是简单命题还是复合命题;若是复合命题,写出构成它的简单命题及构成形式并判断其真值.

- (1) 矩形难道不是平行四边形吗?
- (2) 垂直于同一条直线的两条直线必平行吗?
- (3) 菱形的对角线互相垂直平分;
- (4) 一个数不是合数就是质数;
- (5) 求证:  $x \in \mathbf{R}$ , 方程  $x^2 + x + 1 = 0$  无实根.



### 命题 $p$ 的否定形式

(1) 非  $p$  命题的真值表:

$p$	非 $p$
真	假
假	真

(2) 德摩根定律:  $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q, \neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ .

#### 【练例】

写出下列命题的否定形式:

(1) 2, 3, 6 都是偶数;

(2)  $|3|$  和  $|-3|$  都等于 3;

(3) 0.0001 与 0 至少有 1 个为 0;

(4) 直线  $l$  与  $m$  平行或重合.

### 四种命题

原命题 若  $p$  则  $q$ ;

逆命题 若  $q$  则  $p$ ;

否命题 若  $\neg p$  则  $\neg q$ ;

逆否命题 若  $\neg q$  则  $\neg p$ .

注: 一个命题与它的逆否命题等价(即真值相同).

#### 【练例】

已知命题“若  $x^2 + y^2 = 0$ , 则  $x, y$  全为零”. 写出它的逆命题、否命题和逆否命题.



### 典型例题

【例 1】 写出下列命题的“非”:

(1) 存在一个三角形是直角三角形;

(2) 所有的分数都是有理数;

(3) 至少有一个锐角  $\alpha$ , 使  $\sin \alpha = 0$ ;

(4) 在实数范围内, 有一些一元二次方程无解;

(5) 不是每一个人都会开车.

【例 2】 判断下列命题的真假:

(1) 正方形是矩形也是菱形;

(2) 如果今天星期一, 那么明天星期二;

(3) 0 既不是奇数, 也不是偶数.

### 第三节 充分条件和必要条件

#### 学习要求

1. 理解充分条件、必要条件和充要条件的意义.
2. 会判断两命题之间的关系.

#### 梳理知识

##### 充分条件与必要条件

对于命题  $p, q$ , 如果  $p \Rightarrow q$ , 则称  $p$  是  $q$  的充分条件, 同时称  $q$  是  $p$  的必要条件.

##### 充要条件

如果  $p \Rightarrow q$  且  $q \Rightarrow p$ , 则称  $p$  是  $q$  (或  $q$  是  $p$ ) 的充要条件; 或称  $p$  与  $q$  等价; 或称  $p$  当且仅当  $q$ , 记作  $p \Leftrightarrow q$ .

#### 典型例题

**【例 1】** 用“充分条件、必要条件、充要条件、既不充分又不必要条件”填空:

- (1)  $x \in \mathbf{Z}$  是  $x \in \mathbf{N}$  的 \_\_\_\_\_;
- (2)  $x < 2$  是  $x < 3$  的 \_\_\_\_\_;
- (3)  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则  $|a| = |b|$  是  $a^2 = b^2$  的 \_\_\_\_\_;
- (4)  $\alpha > \beta$  是  $\sin \alpha > \sin \beta$  的 \_\_\_\_\_;
- (5)  $a, b, c$  成等差数列是  $2b = a + c$  的 \_\_\_\_\_;
- (6)  $\sin A = \frac{1}{2}$  是  $\angle A = 30^\circ$  的 \_\_\_\_\_;
- (7)  $a = 1$  是直线  $x + ay = 2a + 2$  与  $ax + y = a + 1$  平行(不重合)的 \_\_\_\_\_;
- (8)  $x = 1$  是  $x^2 - 3x + 2 = 0$  的 \_\_\_\_\_;
- (9)  $a > b$  是  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$  的 \_\_\_\_\_;
- (10)  $ab \geq 0$  是  $\frac{a}{b} \geq 0$  的 \_\_\_\_\_.

**【例 2】** 已知  $p$  是  $q$  的充要条件,  $r$  是  $s$  的充分条件,  $q$  是  $s$  的必要条件,  $r$  是  $q$  的必要条件, 问:

- (1)  $r$  是  $p$  的什么条件? (2)  $p$  是  $s$  的什么条件?



## 第四节 不等式的性质和证明



### 学习要求

1. 理解实数大小的基本性质,并能够较熟练的应用性质比较两个实数或两个代数式的大小.
2. 理解不等式的基本性质,能用作差比较法证明简单不等式.
3. 理解均值定理,会用均值定理和基本不等式解决一些简单问题.



### 梳理知识

#### 实数大小的基本性质

$$(1) \text{ 若 } a, b \in \mathbf{R}, \text{ 则 } \begin{cases} a - b > 0 \Leftrightarrow a > b \\ a - b = 0 \Leftrightarrow a = b; \\ a - b < 0 \Leftrightarrow a < b \end{cases}$$

(2) 在数轴上,右边的点所代表的实数要比左边的点所代表的实数大.

#### 【练例】

比较大小(作差法):

(1) 比较  $\frac{5}{8}, \frac{4}{7}$  的大小;

(2) 对  $x \in \mathbf{R}$ , 比较  $x^2 + 3$  与  $3x$  的大小.

#### 不等式的性质

(1)  $a > b \Leftrightarrow b < a$  (对称性);

(2)  $\left. \begin{matrix} a > b \\ b > c \end{matrix} \right\} \Rightarrow a > c$  (传递性);

(3)  $a > b, c \in \mathbf{R} \Rightarrow a \pm c > b \pm c$ ;

(4)  $\left. \begin{matrix} a > b \\ c > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac > bc, \left. \begin{matrix} a > b \\ c < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac < bc$ ;

注:以上四条是不等式的基本性质.

(5)  $\left. \begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + c > b + d$ ;

(6)  $\left. \begin{matrix} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac > bd$ ;

(7)  $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbf{N} \text{ 且 } n > 1)$ ;

(8)  $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbf{N} \text{ 且 } n > 1)$ .

#### 【练例】

判断真假:

(1)  $a > b > 0, d > c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ ;

(2)  $a > b, c > d \Rightarrow a - c > b - d$ ;

(3)  $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2} \Rightarrow a > b$ ;

(4)  $a > b \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbf{N}, n > 1)$ ;

(5)  $a > b \Rightarrow ac^2 > bc^2$ .

**基本不等式**

(1)  $a^2 \geq 0, (a \in \mathbf{R});$

(2)  $a^2 + b^2 \geq 2ab, (a, b \in \mathbf{R});$

(3) 均值定理: 当  $a, b \in \mathbf{R}^+$  时,  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$   $\xrightarrow{\text{变形形式}}$   $\begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ ab \leq (\frac{a+b}{2})^2 \end{cases}$

(上式当且仅当  $a = b$  时, 等号成立.)

**【练例】**

1. 已知  $a > 0, b > 0, a + b = 9$ , 则  $ab$  有最\_\_\_\_\_值为\_\_\_\_\_.
2. 已知  $a > 0, b > 0, ab = 10$ , 则  $a + b$  有最\_\_\_\_\_值为\_\_\_\_\_.
3. 已知  $a > 0, b > 0, c > 0$ , 求证:  $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ .

 **典型例题**

**【例 1】** 比较  $x^2 - 2x + 1$  与  $2x^2 - 2x + 2$  的大小.

**【例 2】** 求最值:

(1)  $x(8 - x), (0 < x < 8);$  (2)  $6x - x^2, (0 < x < 6);$  (3)  $3x^2 + \frac{1}{2x^2}, (x \neq 0);$

(4)  $3x + \frac{4}{x-1} + 2, (x > 1);$

(5) 已知  $x, y \in \mathbf{R}^+$  且  $2x + 3y = 4$ , 求  $xy$  的最大值.

**【例 3】** 根据条件  $-2 < p + q < 0$  与  $0 < p - q < 4$ , 试确定  $p, q$  的取值范围.



### 骗人的“平均数”

吉斯莫先生有一个小工厂,生产超级小玩意儿.管理人员由吉斯莫先生、他的弟弟、六个亲戚组成.工作人员由5个领工和10个工人组成.工厂经营得很顺利,现在需要一个新工人.现在吉斯莫先生正在接见萨姆,谈工作问题.吉斯莫:“我们这里报酬不错.平均薪金是每周300元.你在学徒期间每周得75元,不过很快就可以加工资.萨姆工作了几天之后,要求见厂长.

萨姆:“你欺骗我!我已经找其他工人核对过了,没有一个人的工资超过每周100元.平均工资怎么可能是一周300元呢?”吉斯莫:“啊,萨姆,不要激动.平均工资是300元.我要向你证明这一点.”吉斯莫:“这是我每周付出的酬金.我得2400元,我弟弟得1000元,我的六个亲戚每人得250元,五个领工每人得200元,10个工人每人100元.总共是每周6900元,付给23个人,对吧?”萨姆:“对,对,对!你是对的,平均工资是每周300元.可你还是蒙骗了我.”吉斯莫:“我不同意!你实在是不明白.我已经把工资列了个表,并告诉你了,工资的中位数是200元,可这不是平均工资,而是中等工资.”萨姆:“每周100元又是怎么回事呢?”吉斯莫:“那称为众数,是大多数人挣的工资.”吉斯莫:“老弟,你的问题是出在你不懂平均数、中位数和众数之间的区别.”

萨姆:“好,现在我可懂了.我……我辞职!”

统计学的解说可能是极富逆论性的,常常被完全误解.关于吉斯莫工厂的故事揭示出:误解产生的一个共同根源是不了解平均数、中位数(中值)和众数之间的差别.

“平均”这个词往往是“算术平均值”的简称.这是一个很有用的统计学的度量指标.然而,如果有少数几个很大的数,如吉斯莫的工厂中少数高薪者,“平均”工资就会给人错误的印象.

读者还可考虑一些类似的引起误解的例子.譬如,报纸上报道有个人在一条河中淹死了,这条河的平均深度仅只2尺.这不使人吃惊吗?不!你要知道,这个人是在一个10多尺深的陷坑处沉下去的.

一个公司可能报告说它的策略是由股东们民主制订的,因为它的50个股东共有600张选票,平均每人12票.可是,如果其中45个股东每人只有4票,而另外5人每人有84张选票,平均数确实是每人12票,可是只有那5个人才完全控制了这家公司.

还有一个例子:为了吸引零售商到一个城里来,商会吹嘘道:这个城市每个国民的平均收入非常高.大多数人看到这个就以为这个城的大多数市民都属于高收入阶层.可是,如果有一个亿万富翁恰好住在该城,其他人就可能都是低收入的,而平均个人收入却仍然很高.

统计学的报告有时甚至更加使人糊涂,这是因为有时“平均”这个词不是指算术平均值,而是指中值或众数.中值(中位数)是按大小顺序排列的数值表中中心位置对应的数值.如果表中数值有奇数项,则中值就简单地是中间项的值.如果有偶数项,中值往往取中间两项的算术平均值.

中值对萨姆来说比算术平均值重要,但就是中值也使人对这个工厂的工资情况得出歪曲了的印象.萨姆反而要知道的是“众数”——表中经常出现的数.在这里,众数是发给工厂中数目最多的人的工资数.有时候这叫做典型情况,因为它比其他任何情况出现次数都多.在上面最后一个例子中,那个城里一个典型家庭代表收入为众数的家庭,它也许很穷,但由于有少数亿万富翁,这个城的平均收入也还非常高.



## 第五节 不等式的解法

### 学习要求

1. 会解一元一次不等式(组);会解一元二次不等式和分式不等式;会解含有绝对值的不等式;会在数轴上表示不等式(组)的解集.
2. 领会解不等式过程的等价变形(转换)思想.

### 梳理知识

#### 一元一次不等式的解法

去分母 → 去括号 → 移项 → 合并同类项 → 两边同除一次项的系数.

##### 【练例】

解不等式:  $2(x+1) + \frac{x-2}{3} > \frac{7x}{2} - 1.$

#### 一元二次不等式的解法

一元二次不等式的一般形式是  $ax^2 + bx + c > 0 (a \neq 0)$  或  $ax^2 + bx + c < 0 (a \neq 0)$ , 它们的解集情况如下表所示:

(1) 当二次项系数  $a > 0$  时

$\Delta = b^2 - 4ac$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$\Delta > 0$ $x_1 < x_2$	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$	$(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$	$(x_1, x_2)$	$[x_1, x_2]$
$\Delta = 0$ $x = x_0$	$(-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$	<b>R</b>	$\emptyset$	$\{x_0\}$
$\Delta < 0$ 无实根	<b>R</b>	<b>R</b>	$\emptyset$	$\emptyset$

(2) 当二次项系数  $a < 0$  时, 两边同乘  $-1$  后, 总可以转化成二次项系数  $a > 0$  来解.

##### 【练例】

解不等式:

- (1)  $x^2 - 2x - 3 < 0$ ; (2)  $(x-1)(2-x) < 0$ ; (3)  $x^2 + 4x + 5 \leq 0$ ;  
 (4)  $x^2 - 8x + 16 \leq 0$ ; (5)  $4x^2 + 4x + 1 > 0$ ; (6)  $-3x^2 > -6x + 2.$

#### 绝对值不等式的解法

$$\begin{aligned} (1) \left. \begin{array}{l} |x| > a \\ a > 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow x < -a \text{ 或 } x > a; & (2) \left. \begin{array}{l} |x| > a \\ a < 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow x \in \mathbf{R}; \\ (3) \left. \begin{array}{l} |x| < a \\ a > 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow -a < x < a; & (4) \left. \begin{array}{l} |x| < a \\ a < 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$