

数学思想教育研究论

Shuxue Sixiang Jiaoyu Yanjiulun

孙杰 著

新华出版社

数学思想教育研究论

Shuxue Sixiang Jiaoyu Yanjiulun

孙 杰 著

新 华 出 版 社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学思想教育研究论 / 孙杰 著.

北京: 新华出版社, 2015. 7

ISBN 978-7-5166-1947-6

I. ①数… II. ①孙… III. ①数学—教学研究 IV. ① O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 183906 号

数学思想教育研究论

作 者: 孙杰 著

出 版 人: 张百新

责任编辑: 鞠 景

出版发行: 新华出版社

地 址: 北京市石景山区京原路 8 号

邮 编: 100040

网 址: <http://www.xinhupub.com>

<http://press.xinhuanet.com>

经 销: 新华书店

成品尺寸: 185mm×260mm

开 本: 16

印 张: 6.75

字 数: 120 千字

版 次: 2015 年 7 月第一版

印 次: 2015 年 7 月第一次印刷

印 刷: 北京厚诚则铭印刷科技有限公司

书 号: ISBN 978-7-5166-1947-6

定 价: 32.00 元

图书如有问题, 请与出版社联系 010—63074590

前 言

学科教育学是在 20 世纪 70 年代发展起来的新兴学科群体，其中当以数学学科教育比较领先。数学学科教育作为学科教育的重要内容和表现形式，以当时的社会历史和文化为背景，随着数学学科的发展而发展，并经过历次改革而不断丰富。随着我国教育的不断深入与数学教育研究的不断深化，无论是数学教育观念，还是数学教师的角色都发生了深刻变化，各种新思想和新理论不断涌现，各种相应的教学改革实验也相继展开，这已成为世界数学教育改革的潮流。邓小平同志的“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”昭示人们：要赶上世界数学教育发展的潮流，结合我国数学教育的成功经验，建立起具有中国特色的数学教育体系，是我们面临的任务，21 世纪为数学学科教育将带来新的发展契机。可以预见，21 世纪我国的数学学科教育必将进入一个新的发展阶段，达到一个全新的理论水平，为数学学科教育的研究提供更加广阔的用武空间。在这样的一个背景下，数学教育的理论研究仍然有许多空白需要填补，数学教育需要运用现代的先进教育理论、观念和科学方法，需要在已有的基础上进一步深入地开展研究工作，以适应不断发展的新形势。基于此，撰写了本书。

本书用清晰明了的文字对数学思想教育进行了明确、清晰的表述，以学科建设的理论性与实践性的紧密结合为原则，试图从数学思想教育的角度，通过对数学思想发展、数学教学论原理、数学学习方法、数学教学实践等方面的分析，阐释数学思想教育的相关理论知识，力求体现本书的循序渐进性，使读者能够获得更广泛的理解数学思想教育的相关理论知识，为对进一步深入实践的读者提供一些可供借鉴的资料。

本书共分为五章。第一章对数学思想发展概论及方法论的研究意义进行了介绍，主要包括结构主义思想及其发展、数理统计思想及其发展、数理逻辑思想及其发展、模糊数学思想及其发展和数学方法论的研究意义。第二章对数学教学论的原理、原则进行了分析。

第三章为数学学习的科学化研究，包括数学学习的基本理论、数学学习的基本思维过程、数学学习的思维形式。第四章为数学教育的核心内容，包括数学教育目标的确定、数学教学模式和数学思想方法的教学。第五章为数学教学实践研究，包括数学课堂教学基本技能训练和数学教学设计。本书在撰写的过程中，参考了许多同仁的相

关作品，在此，对相关作者表示衷心的感谢。由于受水平、能力及视野的影响，加之材料来源及实践感悟的局限性，本书不一定全面准确，疏漏之处，敬请专家、同行及广大读者指正，以便今后更加完善。

作 者
2015 年 3 月

目 录

第一章 数学思想发展概论及方法论的研究意义	1
第一节 结构主义思想及其发展	1
第二节 数理统计思想及其发展	4
第三节 数理逻辑思想及其发展	9
第四节 模糊数学思想及其发展	14
第五节 数学方法论的研究意义	17
第二章 数学教学论原理、原则	22
第一节 数学教学论基本原理和规律	22
第二节 数学教学论原则	32
第三章 数学学习的科学化研究	40
第一节 数学学习的基本理论	40
第二节 数学学习的基本思维过程	51
第三节 数学学习的思维形式	55
第四章 数学教育的核心内容	61
第一节 数学教育目标的确定	61
第二节 数学教学模式	65
第三节 数学思想方法的教学	71
第五章 数学教学实践研究	80
第一节 数学课堂教学基本技能训练	80
第二节 数学教学设计	91
参考文献	101

第一章 数学思想发展概论及方法论的研究意义

第一节 结构主义思想及其发展

一、结构主义思想的相关认识

结构主义以法国的布尔巴基为代表，思想的来源是公理化方法，布尔巴基采用这一方法，反对将数学分为：分析、几何、代数、数论的经典划分，而要以同构概念对数学内部各基本学科进行分类。结构主义认为数学是以数学结构作为研究对象的科学，所谓“结构”就是在某个抽象集合的元素之间引进了运算或变换所组成的系统。结构中必须包含元素间的关系，而这些关系是由运算或变换来决定的。

全部理论数学或大部分数学都可以按照结构的不同而加以分类，可以利用公理化方法抽象出各个学科的各种结构，找出各个数学分支间的结构差异。这样，就可以获得各个数学分支的内在联系的清晰图景。

具体说来，数学结构可分为代数结构、序结构与拓扑结构三大类。这三大类结构称为母结构，由它们还可导出各种子结构或通过交叉，形成各种分支结构。

（一）代数结构

代数结构，也称为代数系统，是离散性对象加运算构成的结构系统。它可以分为多种类型，基本的代数系统包括群、环、域、向量空间等基本内容，当然也包括加、减、乘、除四则运算，但还包括更抽象的运算。

其中，群结构是最基本的代数结构，它反映了抽象代数的本质。群论研究在数学中经常遇到的代数运算的最一般性质：数的加法、数的乘法、向量的加法、变换的合成等都是这种运算的例子。

采用数学结构主义方法考察群时，不是注意各种具体的数学集合，而是注意集合（按群的运算）所表现的内在关系结构。为此，我们必须注意群运算所具备的基本性质，如群的公理等，这些是我们所要研究的对象。

在有理数范围内，所有的有理数运算——加、减、乘、除均可无限制地进行，这样一个数的集合叫作一个域。数域是抽象代数中的一个基本概念，有理数域是我们遇到的第一个数域。有理数域，克服了自然数系的缺陷，相对而言，是比较完美的，对

四则运算是封闭的,而且具有稠密性,它为日后数学的发展提供了一个重要的工具。在此基础上,全体实数对于加法、乘法构成域,全体复数对于加法、乘法构成域。

从 0 和 1 出发,通过有理数运算可以构造出全部的有理数。事实上,通过加法可构造出 2, 3, 4, ... 的任何自然数;再通过减法可得到全体整数;再通过除法运算就可得到全体有理数。正因为如此,英国数学家哈代曾说:“数学家同画家或诗人一样,也是造型家。”^[1]

同样,我们还可以建立环、线性空间的理论等,这样就把代数系统使用的范围扩大了。

(二) 序结构

序结构是由某种特殊的关系定义的,它通常表示为“小于或等于”,例如在实数集 $\mathbf{R}$ 中,任意两个实数总有一个比另一个大,这种关系“ $<$ ”就在 $\mathbf{R}$ 中定义了一个顺序结构。

序结构较为常用的有两种:半序集和全序集。如果集合 $\mathbf{A}$ 的元素之间定义了一个关系“ $\mathbf{R}$ ”,它具有自反性、反对称性和传递性,则称 $\mathbf{R}$ 为 $\mathbf{A}$ 上的半序关系。如果集合 $\mathbf{A}$ 上定义了一个半序关系,则称集合 $\mathbf{A}$ 为半序集。同一集合可以给出不同的半序关系而成为 $\mathbf{R}$ 的半序集。

如果集合 $\mathbf{A}$ 的元素之间定义了一个关系“ $\mathbf{R}$ ”,它具有自反性、反对称性、可比性和传递性,则称 $\mathbf{R}$ 为 $\mathbf{A}$ 上的全序关系。满足自反性、反对称性、可比性和传递性的集合 $\mathbf{A}$ 为全序集(或有序集)。相同的两个有序集,不但这两个集合的元素相同,而且它们的全序关系也必须相同。全序关系不同的两个集合是不同的有序集。

(三) 拓扑结构

拓扑结构是指在一个集合 $\mathbf{X}$ 中分出一族子集作为邻域,依邻域系可研究极限过程。这种结构可以用邻域公理、开集公理等加以描述。为了刻画图形的拓扑性质,就要运用拓扑空间,这是比欧氏空间更为一般的新的空间。拓扑空间是在开集公理上定义了开集的非空集合。

拓扑方法是研究局部性质过渡到整体性质的方法。整体和局部是一对哲学范畴,全局由各个局部组成,但并非各个局部的简单总和,它高于局部。局部是整体的一部分,但有时局部会影响整体,甚至起主要的决定性作用。^[2]

从某种意义上说,拓扑学研究拓扑变换下保持不变的性质,因此有人把拓扑学形象地比喻为“橡皮几何学”。这是因为它所研究的图形的性质在图形作橡皮变形(如随意的挤压、拉伸或扭曲等)时,只要不撕裂和不粘连,就保持不变。这种变形就是拓扑变换。连续映射直观上就是使图形作各种连续变形,只要不破裂、不粘合,那么,

[1] 傅海伦,贾冠军著,《数学思想方法发展概论》,山东教育出版社,2009,126 ~ 127。

[2] 傅海伦,贾冠军著,《数学思想方法发展概论》,山东教育出版社,2009,130。

图形的大小、长短、形状都可能会改变。

像上述谈到图形的“不破裂”和“不粘合”的连续变形，就是拓扑不变性。图形边界的封闭性、内部连续性、维数等，也都是图形的拓扑性质，这是图形的最一般的本质属性。在拓扑同胚的意义上，一个圆和一个正方形是没有区别的，它们都把平面分成两个连通部分。我们通过一个“一一对应的同胚下保持不变的双方连续变换”可将圆变为正方形，反之亦然，这种变换就是拓扑变换。

但是，研究整体性质的几何拓扑学并不能够脱离局部性质。上面说到的拓扑变换定义中就有双方连续的提法，而连续正是局部性质。连续依赖于极限定义，而极限可用邻域描述。由于数学对象的扩展，邻域可以是区间，可以是平面上的圆、空间中的球、曲面体上的一小块，甚至可以是无穷维空间上的一个特定的子集。点集拓扑学正是处理最一般空间中的局部性质与整体性质的学问。它的任务是研究点集的特性，按某种特征将点集分类。^[1]

数学结构主义揭示，数学广大领域上众多的数学部门所体现的多样性，可以通过它们共同的内在渊源——“结构”而获得统一，数学发展的内在生命就源于这种对数学统一性的追求。“结构”是数学进一步发展的基础，同时又是数学中新概念、新理论的归宿，在“结构”基础上的统一性促进着今天、明天和未来的数学进展。“数学就像一座大城市，当它的远郊在多少有点杂乱无章的向外伸展时，市中心却进行着一次接一次的重建。每一次都依据构思更为新颖、清晰和合理的计划，在拆除陈旧的、迷宫般的小胡同时，又修筑更方便、更宽敞、更笔直的林荫大道通向四方。”这段话是对数学结构主义基本思想方法极形象的概括。

二、结构主义思想的形成与发展

谈到结构主义，不得不先讨论一下公理化方法。数学的公理化方法是数学自身发展的一种结果，是数学严格表述的基本方法之一，自从公理化方法问世以来，它对推动数学的发展起了积极的作用。

公理化方法（也称之为公理方法），就是从尽可能少的无定义的概念（基本概念）出发去定义其他的一切概念，从一组不证自明的命题（基本公理或公设）出发，经过逻辑推理证明其他的一切命题，进而把一门学科的知识建构成为演绎系统的一种方法。人们通常也把由原始概念（或称之为基本概念）、公理所构成的演绎系统称之为公理系统。^[2]

几何《原本》的成功，使人们开始广泛地运用公理化方法来发展数学。公理化的现代发展就是结构方法。20世纪30年代，法国的布尔巴基学派运用公理化方法，对整个数学加以整理，发现数学分支之间的区别在于结构不同。

[1] 傅海伦，贾冠军著，《数学思想方法发展概论》，山东教育出版社，2009，131。

[2] 王宪昌主编，《数学思维方法》，人民教育出版社，2010，127～128。

布尔巴基学派的观点和主张对数学教育改革思潮起到了推波助澜的作用。20 世纪 60 年代前后国外曾兴起的中学数学教学革新运动,即所谓“新数学运动(new mathematics movement)”,就是在结构主义观点影响下所形成的一个浪潮。

布尔巴基学派一贯坚持共同讨论,合作研究。他们运用公理化方法力图把一些数学分支中进行论证的最基本、最重要的出发点分离出来,并加以比较,这样便形成了各种结构的观念。他们分工合作,陆续出版了一大套书籍,名为“数学原本”。1939 年出版了第一卷,名为“数学史原本”,此书完全按照结构发展的观点叙述了数学发展史。到 1973 年,《数学原本》共出版了 36 卷,但这一进程仍未结束。

在《数学原本》内,许多数学分支都经过仔细的结构分析,并安放到适当的位置上。《数学原本》是一套博大精深的著作,它涉及现代数学的各个领域,并概括了一系列最新成果,其内容包括集合论、代数、一般拓扑、实变函数、线性拓扑空间、积分、Riemann 几何、微分拓扑、调和分析、Lie 群等。

结构主义本质上可以看成是近代形式公理化思想的一个发展。数学公理化思想仅限于分析、探讨每门数学的公理化方法,并设法把每门数学搞成纯形式的演绎系统。而结构主义则采取全局观点,旨在分析各个数学分支之间的结构差异和内在联系,对每门数学而言,也着重分析其结构特征或关于它的某些基本结构的组成方式(当然,在以结构观点来分析问题时,同构的概念特别重要,因为凡是具有同构性质的一些结构,本质上都是同一种东西)。

可以说,布尔巴基的结构主义学派为专业研究的数学家提供了一张解剖图和一把手术刀,它能帮助人们认清一些数学对象的本质。但是,它的缺点也是明显的。结构主义对数学用演绎方法、公理化方法进行整理,却没有提供创造性的思维导向。因此,在数学教育改革历史上,试图把中学数学全盘结构化是有极端化倾向的,并因此成为导致新数学运动失败的原因之一。结构主义忽视应用也是其自身存在的问题。结构主义试图概括整个数学的愿望最终归于破灭。^[1]布尔巴基的结构主义观点,自 20 世纪 30 年代形成以来,在 20 世纪 50、60 年代盛极一时,在中学数学教材改革中也曾奉为经典,20 世纪 70 年代以来,结构主义观点开始走下坡路了。

第二节 数理统计思想及其发展

一、数理统计思想的相关认识

数理统计是一门以概率论为基础的关于数据的收集、整理、分析和推断的数学学科,它通过对大量随机现象的观察、研究,以发现其内在规律性,并以此对其作出一

[1] 傅海伦,贾冠军著,《数学思想方法发展概论》,山东教育出版社,2009,134。

定的判断和预测。

（一）数理统计的特性

首先，数据必须带有随机性的影响，才能成为数理统计学的研究对象。在数理统计中，研究的随机变量分布是未知的，只能通过对其进行大量的观察或试验，从得到的信息（如观察值等）中进行分析、找寻事件的发生规律，对随机变量的分布或特性作出种种推断。如考虑一个国家的全面人口普查，假定人力、物力、时间允许我们对国内每一个人的状况调查，而这种调查又是准确无误的，则我们可以利用普查所获得的数据通过既定的方法，把所感兴趣的指标计算出来。总之，数据是否具有随机性，是区别数理统计方法和其他数据处理方法的根本点。

数据的随机性来源有二：一是抽样的随机性，出于经济原因的考虑或时间的限制或问题性质决定。不可能或没有必要得到研究对象的全部资料，而只能用“一定的方式”抽取其中一部分进行考察。这样所得到的数据的随机性就是来自抽样的随机性；二是试验过程中的随机误差，即在试验过程中未加控制或无法控制或不便控制，甚至是不了解的因素所引起的误差。在实际问题中这两类随机性常常交织在一起。^[1]

其次，收集数据要用有效的方法。一是建立一个在数学上可以处理并尽可能简单方便的模型来描述所得数据，二是数据中要包含尽可能多的、与所研究问题有关的信息。

最后，有效地使用数据。就是要用有效的方法去集中和提取试验数据中的有关信息，对所研究的问题作出合理的、尽可能精确和可靠的结论。

（二）数理统计的思想方法

从理论上讲，只要对随机现象进行足够多次的观察，其规律性一定能够显现出来。但实际上人们常常无法对所研究对象的全体进行观察，而只能选取具有代表性的一小部分（即样本）来进行试验，利用试验数据提供的局部信息对整体（即总体）的特性进行合理的推断。这种由样本来推断总体的方法实际上是由特殊到一般的归纳推理方法，即统计的研究方法。^[2]

数理统计着重于通过对试验数据或者某些特定指标的研究，来发现随机现象的规律，并做出某些预测和估计。具体地，数理统计的基本思想是：

- （1）确定一个客观存在的总体；
- （2）得到上述总体的一个样本；
- （3）根据样本得出的数据来推测总体的某些特性。

数理统计作为数学的一个分支，其方法本质是归纳式的，统计方法的归纳性，源于它所做出的结论是根据观察到的大量的个别情况“归纳”起来所得，而不是由一些

[1] 曹莉，文海玉编，《应用数理统计》，哈尔滨工业大学出版社，2012，1。

[2] 陈文英等主编，《概率论与数理统计》，科学出版社，2012，124。

假设、命题和已知的事实，按逻辑推理得到。

（三）数理统计的内容^[1]

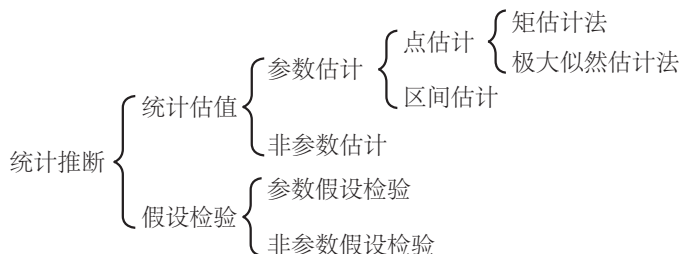
数理统计的内容十分丰富，大体上可分为收集数据和统计推断两个方面。

1. 收集数据

收集数据，是数理统计研究内容的一个方面，它研究如何对随机现象进行观察或试验，以便获得能够很好地反映整体情况的局部数据。其内容包括抽样技术、试验设计等。

2. 统计推断

统计推断是数理统计的核心部分，它研究如何对收集到的局部数据进行整理、分析，并对所考察的对象的整体特性作出尽可能准确可信的估计和推测。其内容归纳如下：



注：资料来源于陈文英等主编，《概率论与数理统计》，科学出版社，2012，125。

（四）数理统计学的应用

数理统计是概率论的应用，并且这种应用在自然科学、管理科学、工程技术、农林科学、计量经济学以及人文社科等学科中越来越广泛，几乎在人类活动的一切领域中都能不同程度地找到它的应用，且其研究内容也随着科技和社会的不断发展而迅速拓展。

随机性的普遍存在，为数理统计学的应用提供了一个广阔的用武之地。^[2]

（1）在农业方面，诸如在若干个种子品种中挑选一些优良品种，及通过田间试验决定种子最优的生产条件方面，“试验设计”及“方差分析”已经是常规手段；在工农业生产中，新产品、新工艺、新材料的开发研究，大批产品的抽样检验，元件和设备的可靠性分析等，皆依赖于统计方法。

（2）统计方法在医疗卫生中有广泛的应用。例如，一种药品的疗效如何，要通过细心安排的试验并使用正确的统计分析方法，才能比较可靠地得出结论。其他，如分析某种疾病的发生是否与特定因素有关（一个著名的例子是吸烟与患肺病的关系），关系大小如何，再比如在污染大气的许多有害成分中，哪些成分对人体有何种程度的影响，这些问题常常是用统计方法去研究的。

[1] 陈文英等主编，《概率论与数理统计》，科学出版社，2012，124～125。

[2] 魏立力，马江洪，颜荣芳编著，《概率统计引论》，科学出版社，2012，145～146。

(3) 现在用统计方法进行社会调查很普遍。如社会学家在研究各种社会问题, 心理学家在研究各种心理学问题时, 离不开实地调查的工作, 而这些工作常用“抽样调查”的方式进行。统计方法在确定调查规模和制定适当的抽样方案, 以及对所得来的资料进行正确分析上, 都是很有用的。

(4) 经济活动离不开种种数量指标及其关系, 因而这个领域是统计方法得到较早和较多使用的一个领域。例如在市场预测方面, 现在有一门“数量经济学”的学科, 其内容主要就是将统计方法用于分析种种经济问题的数量方面。

(5) 统计方法在气象预报、地震和地质探矿等方面有一些应用。在这类领域中, 人们对事物的规律性认识尚不充分, 使用统计分析方法可能有助于获得一些对潜在的规律性的认识, 而用以指导人们的行动。不过, 在人们对事物的规律性认识很不充分的情况下, 一些起较大作用的系统性因素, 只好当作随机性因素来处理, 这样, 统计分析的精度或可靠性就较差。

(6) 自然科学的任务是揭示自然界的规律性。一般是先根据若干观察或试验资料提出某种初步理论或假说, 然后再从种种途径通过试验去验证。统计方法在这里起相当的作用。一个好的统计方法有助于提取观察或试验数据中带根本性的信息, 因而有助于提出正确的理论或假说。在有了一定的理论或假说后, 统计方法可以指导人们如何去安排进一步的观察或试验, 以使所得数据更有助于判定理论或假说是否正确。统计学同时也提供了一些理论上健全的方法, 以估计观察或试验数据与理论的符合程度如何, 一个著名的例子是遗传学中的孟德尔(Mendel)定律。这个根据观察资料提出的定律, 经历了严格的统计检验。数量遗传学的基本定律——哈迪-温伯格(Hardy-Weinberg)平衡定律, 也是属于这种性质。

综上所述, 统计方法有很广泛的实用性, 它与很多专门学科都有关系, 而且随着计算机的普及和计算技术的廉价化, 以前因计算上的困难而限制其应用的统计方法重新被不同领域的学者所认识而焕发出新的活力, 从而为统计学的应用打开了一个前所未有的广阔空间。

二、数理统计思想的形成与发展

(一) 数理统计思想的形成^[1]

数理统计思想起始很早。但 17 世纪以前, 统计只是和反映或表示国家情况的事实记录制度相联系在一起。据记载, 中国早在公元前 2238 年尧舜时代就有人口调查的事例, 此外, 古代埃及、罗马以及波斯等也有人口调查的记载, 这可作为统计思想的早期萌芽。而统计学作为学理研究则始于古希腊的亚里士多德时代, 迄今已有 2300 多年的历史。

[1] 傅海伦, 贾冠军著, 《数学思想方法发展概论》, 山东教育出版社, 2009, 134 ~ 135。

一般认为,数理统计学是英国统计学家格兰特于17世纪60年代创立的。他最早用数学方法研究人口现象进行统计推断。1662年,他组织调查伦敦市死亡人数,从数量上去掌握整体的推断,来揭示人口现象的数学规律。他的专著《自然和政治方面观察死亡统计表》被认为是数理统计学中的第一部重要的科学文献。他这一学问曾被称为“政治算术”。他对生命统计、保险统计及经济统计进行了数学的研究,提出的“大数恒静定律”成为统计学的基本原理。到了18世纪,统计才开始向一门独立的学科发展,用于描述表征一个状态的条件的一些特征,这是由于受到概率的影响。当时各国对人口和资源的测定很感兴趣,对有关经济、社会和政治等方面的统计数据的搜集与解释成为当时政府所特别关注的目标。统计学的数学性质逐步加强,特别是概率论日益成熟,为统计学的兴起不断地提供理论根据,并应用到各种统计方法中。1763年贝叶斯发表的《论机会学说问题的求解》对后世的统计思想产生深远影响。

18世纪末至19世纪中叶,已产生将概率论引进统计学而形成的数理学派。首先是数据分析开始借助于概率模型来研究,最早的代表是德国数学家高斯,他为了描述天文观测的误差而引进正态分布,并使用最小二乘法作为估计方法,是近代数理统计学发展初期的重要里程碑。20世纪以来,最小二乘法经过俄国数学家马尔可夫和其他学者的的工作,成为数理统计学中的一个重要方法。

19世纪中叶,以比利时统计学家A.凯特勒(1796—1874年)和英国人类学家高尔顿(1822—1911年)的工作为代表,统计学有了许多新发展。高尔顿最早把统计方法应用于生物学。他对遗传学尤为感兴趣,搜集了很多资料,从豌豆到人类,专门研究数据的模型及相关关系。他首先引入了回归和相关的概念。1889年他出版《自然的遗传》一书,提出了相关系数和回归直线,创立了回归分析。高尔顿还提出了中位数、四分位数、百分位数及四分位偏差等概念。凯特勒主张用研究自然科学的方法研究社会现象,正式将古典概率引进统计学,使统计学发展到一个新阶段,并使统计方法获得普遍应用。他对天文学、数学、物理学、生物学、社会统计学及气象学均有研究。将统计方法应用到上述范围中,并强调了正态分布的用途,指出这一分布可适用于许多学科范畴。他曾致力于比利时国势调查以及组织国际统计活动,引进了“平均人”的概念,起了总体概念的先导作用。

(二) 数理统计思想的发展

从19世纪到第二次世界大战结束,是数理统计学发展的极其重要的时期,现在越来越多的人倾向于把现代数理统计学的发展和达到成熟定在这个时期的始末。数理统计学中的许多根本性的重要概念、原理和方法,统计学中主要的分支学科,都是在这个时期建立和发展起来的。^[1]

英国是数理统计的研究中心,它代表了当时科学与生产力发展的最高水平,以费

[1] 傅海伦,贾冠军著,《数学思想方法发展概论》,山东教育出版社,2009,135。

希尔和皮尔逊为首。英国数学家 K. 皮尔逊 (K. Pearson, 1857—1936 年) 是对生物学进行统计研究的第一人, 他将数理统计应用于生物遗传和进化诸问题, 得到生物统计学和社会统计学的一些基本结论, 进一步发展了回归和相关的理论。1891 年他提出“概率”和相关的概念, 后来他又提出“总体”“众数”“标准差”“变差系数”“均方根误差”“正态曲线”“平均变差”等一系列数理统计基本术语。1900 年, 他引进著名的 χ^2 检验法, 以说明实际数据与分布族的拟合分布优劣问题, 并证明其极限分布是 χ^2 分布, 这个结果是大样本统计的先驱性工作。他发展了回归分析理论, 引入了复相关系数和净相关系数, 他还提出了第一个小样本分布—— χ^2 分布以及 χ^2 检验拟合优度检验。

费希尔是数理统计作为一个进一步完善的数学学科的奠基者, 他的理论研究成果有: 数据信息的测量、压缩数据而不减少信息、对一个模型的参数估计等。他提出了“方差分析”和“试验设计”这两个统计学理论, 系统地发展了正态总体统计量的抽样分布, 这标志着相关、回归分析和多元分析等分支学科的初步建立。他还提出了极大似然估计法, 至今, 还支配着统计学的发展。

一门学科的形成, 其标志是该学科面貌内容的确定, 对统计学来说就是 χ^2 分布、 t 分布和 F 分布的导出及其在统计方法中的应用。^[1] 到了 20 世纪 40 年代, 现代数理统计学已形成了自己完整的体系。

二战后, 数理统计学在理论上也出现了若干根本性的新进展, 主要是贝叶斯统计、统计决策理论和多元分析的兴起。

20 世纪 60 年代后, 电子计算机的应用日益广泛和深入, 有力地促进了数理统计的发展, 使得过去一些停留在理论上的方法付诸实现。比如, 涉及数十个自变量的大型回归问题的变量选择问题, 有了计算机才得以实现。利用计算机进行模拟和仿真, 在短时间处理大量数据, 从多个角度进行透彻分析, 使“数据分析”从中提取更多的有用信息成为可能。^[2]

由于统计学与其他科学新理论的结合, 不断产生新的边缘科学和新的统计分支, 数理统计学急速发展, 愈加严谨系统、愈加数学化, 也使得统计方法的应用范围愈加广泛, 统计学的地位也日趋重要。

第三节 数理逻辑思想及其发展

一、数理逻辑思想的相关认识

人们在交往活动中, 尽管自然语言是一种非常好的交流思想的工具, 但它不适合

[1] 傅海伦, 贾冠军著, 《数学思想方法发展概论》, 山东教育出版社, 2009, 136。

[2] 吴炯圻, 林培榕编著, 《数学思想方法》, 厦门大学出版社, 2009, 119。

用来进行严格的推理,因为自然语言在叙述时往往不够确切,易产生二义性。因此,就需要制定一种符号语言(也称为客观语言、形式语言、目标语言)。在这种符号语言中,为了避免二义性,需要引进一些符号,并对这些符号给出明确的定义。

逻辑是探索、阐述和确立有效推理原则的学科,最早是由古希腊学者亚里士多德创建的。数理逻辑是用数学方法即建立一套符号体系的方法来研究推理的形式结构和规律的一门学科,包括逻辑演算、集合论、证明论、模型论、递归论等内容。由于在逻辑学中使用了符号,故数理逻辑也称为符号逻辑。数理逻辑研究的主要问题是推理。所谓推理是指研究前提和结论之间的关系与思维规律。数理逻辑的特点是讲言叙述简单明了,通俗流畅,逻辑性强。^[1]

(一) 数学与逻辑^[2]

一般认为,数学是研究空间形式和数量关系的一门科学,逻辑是研究思维形式及其规律和方法的一门科学,但它们都完全撇开其内容,仅仅从形式方面加以研究,因而均具有高度的抽象性,所以在分类上它们同属于形式科学。同时,数学和逻辑的应用都十分广泛,往往成为研究其他科学的工具,因此又常常同被人们称为工具性科学。

数学与逻辑的研究对象虽各不相同,但它们的性质、特点却有很多共同和类似的地方,正因为如此,它们关系十分密切,在内容和方法上可以互相运用和相互渗透。

认识数学和逻辑的关系,应着重把握二者的辩证关系——一致性、差异性和相互作用性。

(1) 数学和逻辑具有一致性的关系。这是因为:

其一,数学和逻辑都是一门形式科学,数学是研究空间形式和数量关系结构的,逻辑是研究思维的形式结构的,二者的研究对象都是高度抽象的结构,它们的定义、定理、原理、法则等都撇开了研究对象的具体事物的内容,而仅仅保留其形式和关系,是一种形式化的思想材料。

其二,数学和逻辑都具有严谨性,数学的科学性是靠推理论证的严密性和结论的确定性来得证的,逻辑也只有当它的推理论证严格而形成严谨的公理化系统时才形成科学。

其三,数学和逻辑的规则都是普遍有效的,因而二者都具有广泛的应用性。数学的应用自不待言,对逻辑而言,可以肯定地说哪里有思维哪里就有逻辑,一切科学都在应用逻辑。

(2) 数学与逻辑也具有差异性。一方面,数学和逻辑的研究对象不同,数学的研究对象是客观事物的空间形式与数量关系,而逻辑学的研究对象是思维的形式及规律;另一方面,数学和逻辑的任务和目标不相同,数学的主要目标和任务是揭示客观事物的空间形式与数量关系的特征,探索其规律性,而逻辑的主要目标和任务却是为了解

[1] 王昆仑主编,《计算机专业导论》,清华大学出版社,2013,144。

[2] 傅海伦,贾冠军著,《数学思想方法发展概论》,山东教育出版社,2009,154~155。

决思维推理形式的有效性或真实性问题。

(3) 数学和逻辑又具有很强的相互作用性关系。一方面数学的发展得益于逻辑。首先,数学是一门具有高度抽象性和严谨性的科学,它的公式、定理、法则、原则等的正确性不可能由具体实验和经验实践来证明,只能从逻辑上加以严格演绎论证才被确认。如果没有逻辑,数学的大厦就无法建造,至少可以说不能建构系统的公理化的演绎的数学科学,即现今意义上的数学是根本不可能存在的。再从数学或其某一分支的产生和发展来看,数学发展有其自身的规律,但它的发展阶段也是伴随着逻辑的发展而前进的,集中体现出人类思维和智慧的成果。数学理论的形成,需要有一个有关经验材料的积累过程,然后进入提炼整理阶段,再经过组织和演绎,最后才形成一个系统。无疑,在整个过程中都需要运用逻辑(开始阶段运用归纳逻辑多一些,在整理阶段则应用演绎逻辑多一些)。

另一方面,逻辑的发展也要依靠数学的推动。数学理论的突破和数学方法的创新是推动逻辑发展的重要力量。从古典逻辑学到近现代逻辑学的产生和发展,中西方数学都做出了各自的独特贡献。数学方法与逻辑方法的融合,借用数学的方法来研究逻辑关系和问题,也使得两种学科的关系更加紧密。数理逻辑的诞生和发展便是明证。数理逻辑就是用数学方法即用人工语言研究概念、命题以及命题之间的关系,构成十分严密的符号系统,因此有人把数理逻辑叫作符号逻辑。逻辑发展史表明,逻辑是离不开数学方法应用的,当今逻辑学的发展更是需要站在相当的数学基础之上,离开了数学方法,当今逻辑学的最先发展就不可能实现。如果说传统形式逻辑向数理逻辑发展依靠的是数学方法的应用的话,那么当今或今后逻辑学的发展与进步也必须以广泛的数学方法应用为基础。

总之,数学与逻辑的发展是密切相关的,它们相互影响,互相推进,数学发展影响和推进了逻辑的前进,反过来逻辑发展又影响和推动了数学的进步。

(二) 数理逻辑的结构^[1]

1. 语言

逻辑语言是一种形式化语言,它与自然语言的不同之处在于它是人工定义的语言。逻辑语言通常包括符号表和语法,其中符号表规定了逻辑语言中所使用的符号,由符号表和相关语法可生成项和公式。直观上说,逻辑语言中的符号、项、公式分别类似于自然语言中的字、词、句。逻辑语言中的公式并不是符号的任意组合,而是由符号表中的符号按照给定的语法规则构造的表达式,通常将这种表达式称为良构公式(well-formed formulas)或合式公式,简称公式。

2. 语义

逻辑语言中的语句是由抽象符号构成的公式,它本身并没有具体的含义,要使其

[1] 雷新锋,薛锐著,《密码协议分析的逻辑方法》,科学出版社,2013,3~4。