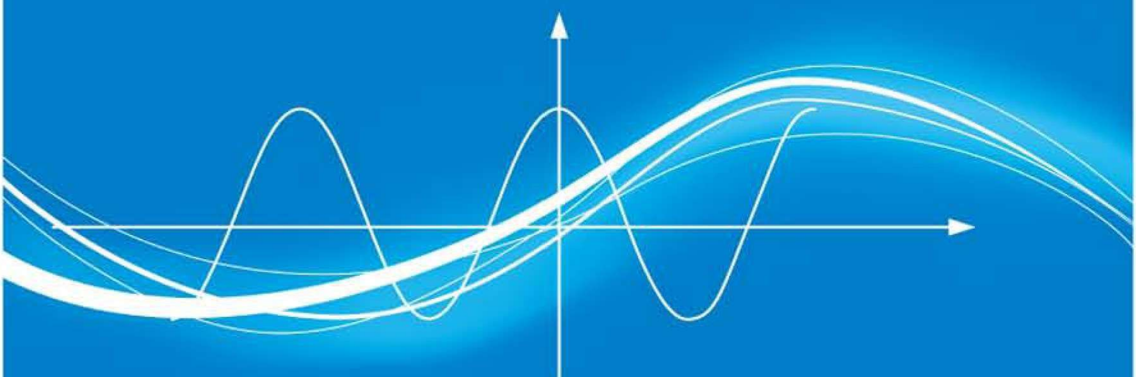
高中数学
教学“三思”

师　前◎著



★ 一脉相承——有关衔接之思

★ 一言九鼎——相关概念之思

★ 一句一悟——学会总结之思

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

高中数学
教学“三思”

师　前◎著

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书集聚了作者对高中数学教学的诸多思考. 第 1 章从数学发展的内在逻辑角度厘清高中数学与小学数学、初中数学、大学数学的衔接点，旨在从宏观及微观角度完善对数学发展脉络的认识. 第 2 章非常详细地诠释了若干重要数学概念. 第 3 章中梳理的大量一句话型总结是作者本人教学体悟的浓缩.

本书的读者对象为中学数学教师、师范大学学生及数学教育教学爱好者.

图书在版编目(CIP)数据

高中数学教学“三思”/师前著. —上海：上海交通大学出版社，2018
ISBN 978-7-313-19682-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①师… Ⅲ. ①中学数学课—教学研究—高中 Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 153689 号

高中数学教学“三思”

著　　者：师　前
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：谈　毅
印　　制：当纳利(上海)信息技术有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：710 mm×1000 mm　1/16　　印　　张：25.25
字　　数：462 千字
版　　次：2018 年 7 月第 1 版　　印　　次：2018 年 7 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-19682-8/G
定　　价：58.00 元

序
数学教育需要有心人

同样是数学教师，有的似乎从来没有什么问题，好像一切尽在掌握中，于是除了日渐老去一切都不会再有改变；而有的就常常产生各种各样的问题，于是就思考、请教、读书、研究，于是就逐渐能提出一些关键问题、重要问题，慢慢地成了会思考、有积淀的优秀教师. 我知道的师前老师就是属于后一种的高中数学教师.

在仔细读了师前老师的这部《高中数学教学“三思”》样稿之后，觉得师老师的思考又进入了一个新的层次. 可喜的是师老师结合大量的案例，通过这本专著，将他在数学衔接、数学概念以及数学教学总结上的思考与积累与大家共享. 这是一本言之有物、言之有据的数学教育专著.

在若干年前就有很多老师研究过高中数学教学的衔接问题，这是因为初、高中数学教学存在着比较多的制约学生发展的断裂点. 但若我们仔细审视高中数学教育，似乎问题并没有得到很好的解决. 其中原因或许很复杂，但是有一些因素是确定的：一是高中数学教育延续着初中数学教育的同样问题，只重高考，不关注发展；二是这类衔接研究大多只是从知识的角度出发，缺乏方法、态度以及数学文化方面的思考. 师老师敏锐地抓住这一点，从全新的角度提出了衔接教学的思路与策略，其突破创新之处在于不仅关注初高中衔接，还包括高中三个年级的衔接以及发展性地与大学教学的衔接. 同时力图以数学发展的内在逻辑为主线，厘清各学段数学教学之衔接点，以达到提升教师自身的专业素养、优化教学的目的. 相信这样的“衔接”之思一定可以给我们带来很多启发.

数学概念教学始终是教育研究与实践的一个热点，这是因为数学教育者都意识到概念教学是数学教育的一个至为重要的关键点. 师老师从数学的本源、历史的演变以及数学文化等多种角度，对高中数学的关键概念集合、函数、数列的

极限、几何学与公理化方法以及矩阵行列式等进行了深入系统的研究，力图对概念的内涵和外延都做出深刻剖析．同时论述结合了大量的鲜活案例，很好地展现出一线教师的这种理论与实践有机结合的研究特点，也体现了师老师深厚的数学与教学的功力．

师老师数学教学的语言一直是得到公认的，具有独特的“师式”风格．早就希望师老师能够对他自己教学用语的特点进行总结，归纳提炼出“师式”风格的具体特征，今天终于在本书中见到了较为系统的归纳．师老师从教学、学习、解题、考试等几个方面，以一句话的形式进行了汇集．从这些案例中既可以感受到师老师的教学智慧，更能体会到“寓道理于数学中”的良苦用心．著名前辈数学特级教师曾容先生一直倡导数学教育应该深入浅出，即用生动易懂的语言表述深刻的数学道理．因此教学语言对教学效果的影响是巨大的，并非无关紧要，但是相关思考与研究相对贫乏．虽说师老师的这些“一句一悟”式总结还是以案例居多，但能系统地分类，无疑是立足于经验层面的提升，离总结出数学教学语言的科学规律就更近了一步．

很高兴看到师老师多年思考与实践的又一份智慧结晶，这充分体现了作者追求教育创新的精神，以及欣赏数学之美的慧眼．希望我们的数学教育领域涌现出越来越多这样的有心人．

李秋明

上海市数学特级教师，正高级教师

上海市数学名师基地主持人

2017 年 12 月

前　言

教学是一个不断实践、思考与求索的过程.把自己平时的所思、所想、所行记录下来,日积月累便成了摆在读者朋友面前的这本书,尽管不很成熟,但也算是对自己二十几年来教学生活的一点总结吧.

本书所述内容主要缘于以下一些经历与体会.

1. 初高中数学衔接教学

10年前笔者曾与高校研究生合作,在高校教授指导下做过初高中数学衔接的相关课题,并将研究成果应用于自己任教的高一数学教学,前后积累了一点经验.2008年以来,尽管连续九年一直奋战在高三数学教学第一线,但从2012年以来每年暑假都会去外地讲学,讲学对象为当地学校高一实验班的新生,内容均聚焦于初高中数学衔接.通过讲学,笔者深深地体会到初高中数学衔接的必要性与科学衔接的重要性.同时也深深感到身为高中数学教师的自己还远未达到在初高中数学间来去自如、融会贯通的层次.推己及人,由于绝大多数高中的数学教师都缺乏从事初中数学教学的经历(这应是明显的事实),这种现象至少带来了以下一些不利：首先,高中数学教师的初中数学知识不过关.还记得16年前,笔者在江苏老家任教过的那所乡村学校的一位骨干教师去县城一所完全中学应聘,考的全是初中数学,这位教师竟然在第一关就因笔试不及格而惨遭淘汰.其原因显然归咎于自身初中知识与相应能力的严重欠缺.另有一事颇耐人寻味,在批阅我校初升高自主招生试卷时,一教师说他怎么看都觉得“平面几何图形像立体几何图形”,这令笔者在啼笑皆非之余也深受启发——初高中数学知识的脱节是高中数学教师的软肋.其次,对高中数学教师而言,初中数学知识的欠缺,直接影响到其自身素养的完善,这就导致其教学无法做到自然过渡、无痕衔接、上挂下连、无声渗透.学生成绩提高与能力发展的不理想也在情理之中了.最后,不整体、不系统的知识结构影响了教师自身专业的可持续发展.因此,只让学生去衔

接过渡是不够的.作为教师,首先自己要过好衔接这一关,高中数学教师要在小、初、高及大学数学知识整体的理解与把握上多下功夫.通过现场观摩、网络下载等各种渠道多听小学、初中的课,看小学、初中及大学数学相关的专著或杂志,多思考相关的问题.这样才能通过不断提升自身数学素养,进而造福于自己身边的莘莘学子.在平时的教学中,若能有意识地将大学所学的数学史等知识融入自己的教学设计中,则自己的教学定会自然流淌,且发人深省、饱含文化韵味.

2. 概念教学的“无痕化”倾向

复旦大学附属中学著名特级教师、正高级教师李秋明先生认为,要想做好数学教学,强化对数学这门学科自身的理解尤其重要.并提倡:作为一个用心的教师,应好好阅读并梳理各年级教科书中的疑惑点,并通过深入数学内部寻找知识发展的过去、今生而展开研究.具体到尤为重要的概念教学,人民教育出版社章建跃博士曾总结过“一个定义、三项注意、几道例题、大量练习”的概念课教学陋习.这种教学不讲概念产生的背景,也不经历概念的概括过程,仅从“逻辑意义”列举“概念要素”和“注意事项”,忽视“概念所反映的数学思想方法”,导致学生难以达成对概念的实质性理解,无法形成相应的“心理意义”.没有“过程”的教学,因为缺乏数学思想方法为纽带,概念间的关系无法认识,联系也难以建立,导致学生的数学认知结构缺乏整体性,其可利用性、可辨别性和稳定性等功能指标就会大打折扣.总之,上述教学没有为学生留下相应的“思维痕迹”和“心理痕迹”,笔者姑且称其为“无痕化”教学.究其原因,表面来看是课时所限与急功近利的分数压力所迫,因为相对过程教学,“告诉+模仿+大量练习”式教学更容易收获好的分数.但笔者认为,从根本上来看,正如李秋明先生所说,教师对概念理解力的不足才是影响他们无法做到“缓缓过渡、浅入深出、概括提炼、驻足细品”的关键原因.这启发我们:对概念的深入理解是教师专业发展的又一着力点.

3. 提升教师专业素养的重要途径

众所周知,反思是教师专业成长的必经之路.然而,如何反思?如何反思得有效?却颇有讲究.著名数学特级教师任勇认为“名师的成长过程是一个学者化的过程”,并说:“教师在发展的过程中,无论是书教得比较好,还是班主任当得比较好,都是事业的基础.但要持续发展,还要进行教育教学研究,探索教育规律,提升教育实践,进而将研究的东西整理出来,也就是写作.这其实也就是学者化的进程.”笔者在繁忙的教学工作之余,除撰写文章外,编写、积累教育教学总结

也是自己已经坚持了近20年的做法.

上述经历与认识促使笔者在近两年努力地思考了以下三个问题：如何达成数学教学的整体性；如何促进数学理解的深刻性；如何永葆专业发展的持续性. 本书即欲在回答以上三个问题做一些尝试.

该书汇聚了作者对高中数学教学的诸多思考，聚焦三个方面：小、初、高与大学数学的衔接、高中数学中若干较难理解与不易把握的重要概念、学会总结”. 本书分3章：第1章　一脉相承——有关衔接之思，第2章　一言九鼎——相关概念之思，第3章　一句一悟——学会总结之思.

第1章从数学发展的内在逻辑角度厘清高中数学与小学数学、初中数学、大学数学的衔接点，从宏观及微观角度完善对数学发展脉络的认识. 旨在以衔接为线索，提升教师的专业素养，进而改进数学教学设计，提高课堂教学质量，优化学生思维品质，促进学生全面发展. 第2章非常详细地诠释了作者本人在教学与研究过程中遇到的若干重要概念，诠释时也注重了小初高及大学数学的衔接. 第3章中梳理的大量教育教学一句话型总结是作者本人教学体悟的浓缩，具有鲜明的新颖性、深刻性、独特性及实用性等特点.

本书不是练习册、教案集，它具有以下几个特点：

(1) 鲜明的个体性. 本书中的研究成果均为作者个人长期实践与思考的结果，绝少借用他人、他书中的现成结论. 尤为突出的是本书的第3章，里面呈现的大量教育教学总结，无一例外地均为作者本人从教二十几年来思考、反思的结晶.

(2) 很强的实践性. 本书中总结的一些具体结论或做法均源于作者本人的教育教学实践，有很强的可操作、可复制、可推广性，因此具有很强的教学实践价值.

(3) 一定的学术性. 学术意味着“研究、争鸣、进步”，本书对部分概念或相关内容的教法给出了自己的评论或看法，同时对相关内容作了引申或拓展，期望得到广大同行的批评指正.

(4) 适时的技术性. 本书在诠释作者行动研究与长期思考的某些成果时融入了技术的元素，比如对数学图形等对象的呈现借助了 TI－nspire CAS 图形计算器或几何画板等技术，在清晰、简明的同时做到了多角度、全方位、大跨度，相信会对读者有较好的启发与触动.

(5) 较好的培训性. 鉴于本书乃为长达二十余年坚守教学第一线的笔者历经数年写作而成，而且正是这些思考帮助作者收获持续的成长，因此，有理由相信本书若作为教师培训用书的话也会收获很好的效果.

在写作本书的过程中，虽然自感殚精竭虑，但无奈能力有限、才智不足，深恐自己笔下的符号与文字浪费了读者朋友的宝贵时间，十分担心呈现在大家面前的只是一堆附着无用墨迹的废纸，因此曾几度想中途放弃. 每当这时，笔者总会想起著名语文特级教师李镇西在微信公众号“镇西茶馆”《每位老师都能写出好文章》一文中的谆谆教诲：“我至今依然坚持这样的观点：任何一个有实践有思考的普通老师，都可以写出好文章. 有些教师往往以自己不是语文教师为由而不愿提笔. 其实，我们不是写小说散文诗歌，而表达自己对教育教学的感受或理解，只要源出内心，内容实在，条理清楚，语言通顺，且有独立思考就可以了. 应该说，这些要求对于经常练笔的教师来说，是不难达到的. 至于记录的内容，一是记录自己平时在教育教学方面的思想火花：一次联想、一回顿悟、一个念头、一缕思绪……都可以以随感、格言的形式记下来. 二是教育笔记：在课堂教学、学生教育或班级管理中成功或失败的做法. 三是根据自己的工作经验或体会写成的相对比较正规的论文.”正是很多这种教育名家激励人心的话语让我时断时续并坚持下来，然而由于水平所限，书中定有诸多不妥之处，敬请读者朋友不吝指正.

师　前

2017 年 12 月

目　　录

第1章 一脉相承——有关衔接之思

理解数学是教好数学的重要前提，也是数学教师永葆可持续专业发展活力的必经之路，而厘清数学发展的脉络可促进对数学的深层次理解. 对于如何厘清数学发展的脉络并进而优化数学教学设计，笔者通过教学实践体会到“做好有效的衔接教学是重要途径”. 此处的衔接既包括小学、初中数学与高中数学的衔接，也包括高中三个年级教学内容的衔接，还包括高中数学与大学数学的衔接(含大学所学的数学分析、高等代数等基础数学内容及数学史知识等). 本章试从数学发展的内在逻辑角度理清高中数学与小学数学、初中数学、大学数学一脉相承的衔接点，从宏观上(逻辑角度与数学史角度)完善对数学发展脉络的认识. 旨在以衔接为线索，提升教师的专业素养，进而改进数学教学设计，提高课堂教学质量，优化学生思维品质，最终促进学生全面发展.

1.1 数

首先从“数”谈起. 我们知道，汉字“数”有三种读法，对应着三层基本意义：① shù(英文为 number，名词，如数量、数据、数额等)；② shǔ(英文为 enumberate，动词，如数落、数不清、数得着、数数等)；③ shuò(英文为 repeatedly，副词，如数见不鲜等). 此处，取其为名词且含义为大家熟知的“有理数、实数”等数学名词中“数”的情况.

在古代，作为名词的数有“算法”的含义. 如古代六艺“礼、乐、射、御、书、数”中的“数”.《周礼·保氏》中说：“养国子以道，乃教之六艺：一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五驭，五曰六书，六曰九数.”中国古代数学体系的形成以汉代《九章算术》的出现为重要标志. 古代数学家把数学的起源归于《周易》以及“河图洛书”，如宋朝时期著名大数学家秦九韶说：“周教六艺，数实成之. 学士大夫，所从来尚矣. ……爰自河图、洛书闿发秘奥，八卦、九畴错综精微，极而至于大衍、皇极之用，而人事之变无不该，鬼神之情莫能隐矣.”中国传统数学以计算为中心、具

有程序性和机械性的算法化模式(如在世界数学史上占有光辉地位的宋元算法：隙积术、大衍术、开方术、垛积术、招差术、天元术等)，与以几何定理的演绎推理为特征、具有公理化模式的古希腊数学互相辉映，交替影响着世界数学的发展.

“学之初，数本正”. 在小学，我们最先接触的是正数，且是正整数(由阿拉伯数字 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 及基底 $10^k(k\in\mathbf{N})$ 组成)，在此基础上并入零和负整数就组成了整数. 接下来，整数和分数组成了有理数，其中分数包括有限小数和无限循环小数. 如果把整数看作分母为 1 的特殊的分数，那么，任何一个有理数都可以由符号语言“$\dfrac{q}{p}$”给出，其中 p，q 均为整数，$p\neq 0$，p 与 q 互质. 古希腊数学家、哲学家毕达格拉斯(Pythagoras，约公元前 580 年—前 500 年)说：万物皆数，这儿的“数”是自然数. 他认为：1 是最神圣的数字，1 生 2，2 生诸数(直到有理数)，数生点，点生线，线生面，面生体，体生万物. 毕达格拉斯的门徒希帕苏斯(Hippasus，约公元前 500 年)用毕达格拉斯本人发现的勾股定理计算出了边长为 1 的正方形的对角线的长度，但他发现这个长度无法用毕达格拉斯所说的数表示，这导致了世界数学发展史上的第一次数学危机——人们发现了无理数，又不敢承认它是数. 当然，从哲学观点看，毕达格拉斯提出“万物皆数”的观点也是错误的. 因为数是概念，不是物. 物的数量特征在人的头脑中反映为数，不是客观存在的数转化为物，而毕达格拉斯把事情弄颠倒了.

现在我们知道，边长为 1 的正方形的对角线的长度为 $\sqrt{2}$，它是无理数(即不能精确表示为两个整数之比的数，并非没有道理的数)，无理数和有理数组成了实数. 但 $\sqrt{2}$ 只不过是一个表示该长度的符号而已，它是一个得不出准确值的东西，那么 $\sqrt{2}$ 究竟是什么呢？对这个问题，欧洲哲学家和数学家在过去的两千多年间一直陷在迷雾中. 数学家们一方面为了解题不得不使用根号，另一方面又说不清带根号而得不出准确值的东西是不是数. 事实上，直到 17 世纪还有一些数学家坚决不承认无理数是数. 从毕达格拉斯时代，经过历代数学家、哲学家、物理学家的探索，直到两千多年之后的 19 世纪末，数学上严格的实数理论才由德国数学家戴德金(Dedekind，1831—1916)与康托尔(Cantor，1845—1918)几乎同时建立起来. 这里面涉及“数列、无穷、极限、连续性、连续统”等数学概念，大学时会继续学习. 自此，第一次数学危机被克服了，这一危机的克服，使数真正具有了表达一切量的能力.

然而数学对数的认识并没有停留于此. 数的概念在不断扩大：复数(属于高中学习内容)、四元数、超限数、理想数、非标准实数，各种各样的数都创造出来了，用这些数就可以表达世界上一切可以精确化、形式化的关系，可以畅想我们

大学之后可能有幸与数相伴的研究生涯会无限充实而多彩.

可以看到,一部数的发展史,恢宏壮观、一波三折,让我们的思维横跨了小学、中学、大学及大学后的研究人生.各位读者可以从爱尔兰人戴维·弗兰纳里(David Flannery)写的一部306页的书《2的平方根：关于一个数与一个数列的对话》(上海科技教育出版社,郑炼 译)中体会到数学探索的乐趣与奥秘.确实,理解数的发展史,对于我们理解很多重要数学概念或法则的发展具有直接的影响作用.例如,幂的概念及幂的运算法则从小学到中学再到大学的螺旋式发展即是如此.作为多数相乘的特例,乘方(其实是相同数连乘的速算)概念的提出发轫于小学已经接触的数的乘法运算,由此得到正整数指数幂及同底数幂相乘的运算法则(教材七年级第一学期9.7“同底数幂的乘法”、9.8“幂的乘方”、9.9“积的乘方”,此处指沪教版教材,以下同)：

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;(2) $(a^m)^n = a^{mn}$;(3) $(ab)^n = a^n b^n$(m, n 为正整数)

进而,在七年级第一学期10.6“整数指数幂及运算”中推广为整数指数幂并获得了相应的运算性质：若 m, n 为整数,则

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}(a \neq 0)$;(2) $(a^m)^n = a^{mn}(a \neq 0)$;(3) $(ab)^n = a^n b^n(a \neq 0, b \neq 0)$.

在七年级第二学期“分数指数幂”中继续推广为有理数指数幂并获得了相应的运算性质：设 $a > 0$, $b > 0$, p、q 为有理数,那么

(1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $a^p \div a^q = a^{p-q}$;(2) $(a^p)^q = a^{pq}$;(3) $(ab)^p = a^p b^p$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$.

东北师范大学原校长史宁中教授在其文章《论数及数字符号的产生》(见《东北师范大学学报：哲学社会科学版》,2000(6)：31－35)中分析指出,十个数字符号0,1,2,3,4,5,6,7,8,9及位值制的产生至少用了三万年.与此相比,数的概念的发展,从有理数到实数的跨越虽相对较短,但仍算漫长.相应地从有理数指数幂到实数指数幂则从初中数学直接跨入大学数学,在高中数学中留下的是有关这个知识点的真空层.在高等学校试用教材《数学分析》上册(高等教育出版社,华东师范大学数学系 编)第四章第3节“初等函数的连续性”中,编者用极限观点讨论了“具有实指数的乘幂”,证明了有关实指数幂的(与有理数指数幂相同的)下列性质及相应法则：

(1) 若 $a > 1$, r 为正实数,则 $a^r > 1$;若 $a > 0$, r 为任一实数,则 $a^r > 0$.

(2) 设 r_1、r_2 为任意两个实数,且 $r_1 < r_2$,则：(i) 若 $a > 1$,则 $a^{r_1} < a^{r_2}$;

(ii) 若 $0<a<1$，则 $a^{r_1}>a^{r_2}$.

(3) 设 α，β 为任二实数，a，$b>0$，则：$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$，$(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$，$(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$.

利用上述性质，得到在高中一年级要学习的指数函数 $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$ 的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$，值域为 $(0,\ +\infty)$，并在其定义域上严格单调. 但由于证明上述性质所需的理论知识无法在高中渗透，故高中一年级第一学期 4.1“幂函数的性质与图像”与 4.2“指数函数的图像与性质”（请注意这两节的标题中性质与图像两个词出现的先后顺序，颇耐人寻味）分别给出了以下处理：

① 在幂函数的定义“函数 $y=x^k$（k 为常数，$k\in Q$）称为幂函数”中规定幂指数 k 为有理数. 若 $k\in\mathbf{R}$，当 $x>0$ 时（即对于第一象限的幂函数），由 $y=x^k=e^{k\ln x}$ 可知，幂函数 $y=x^k$ 可以视为函数 $y=e^u$ 与 $u=k\cdot v$ 及 $v=\ln x$ 的复合函数，显然 $u\in\mathbf{R}$. 这说明对幂指数为实数的幂函数的研究可以转化为以著名的无理数 e（自然对数的底）为底数的指数函数、正比例函数及以 e 为底数的对数函数的复合函数的研究. 这对高中生来讲要求太高，因此，教材中规定了 $k\in Q$.

② 在 4.2，教材中用语言描述和观察数值的方法，让学生体会幂指数的取值范围从有理数集拓展到实数集的过程及含义，并以“可以证明”直接给出了拓展后指数的运算法则：

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y}(a>0,\ x、y\in\mathbf{R});$$
$$(a^x)^y=a^{xy}(a>0,\ x、y\in\mathbf{R});$$
$$(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x(a>0,\ b>0,\ x\in\mathbf{R}).$$

实数可以用数轴上的点表示，这体现了数学中重要的数形结合思想.

讲完了数，接下来自然要讲数与数之间的关系，这可以分为运算关系和大小关系. 其实，作为定义实数的一种途径，德国数学家希尔伯特（Hilbert，1862—1943）在集合论发展的基础上，于 1899 年首次提出了实数公理. 按照它，所谓实数系就是定义了两种二元运算（加法与乘法）和一种次序关系（$>$）的集合，并且要求这些运算和次序满足规定的公理. 由这些公理可以推出实数的一切性质. 现将实数公理介绍如下，其中域公理、序公理和阿基米德公理是比较熟悉的实数的性质：

设 $\mathbf{R}$ 是一个集合，若它满足下列三组公理，则称为实数系，它的元素称为实数：

(1) 域公理.

对任意 a，$b\in\mathbf{R}$，有 $\mathbf{R}$ 中唯一的元素 $a+b$ 与唯一的元素 $a\cdot b$ 分别与之对应，依次称为 a，b 的和与积，且满足：

①（交换律）　对任意 $a, b \in \mathbf{R}$，有 $a+b=b+a$，$a \cdot b=b \cdot a$

②（结合律）　对任意 $a, b, c \in \mathbf{R}$，有 $a+(b+c)=(a+b)+c$，$a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$

③（分配律）　对任意 $a, b, c \in \mathbf{R}$，有 $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$

④（单位元）　存在 $\mathbf{R}$ 中两个不同的元素，记为 0、1，分别称为加法单位元与乘法单位元，使得对所有的 $a \in \mathbf{R}$，有 $a+0=a$，$a \cdot 1=a$

⑤（逆元）　对每个 $a \in \mathbf{R}$，存在 $\mathbf{R}$ 中唯一的元素，记为 $-a$，称为加法逆元；对每个 $a \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$，存在 $\mathbf{R}$ 中唯一的元素，记为 a^{-1}，称为乘法逆元，使 $a+(-a)=0$，$a \cdot a^{-1}=1$.

（2）序公理.

在任意两个元素 $a, b \in \mathbf{R}$ 之间存在一种关系，记为“$>$”，使对任意 $a, b, c \in \mathbf{R}$，满足：

①（三歧性）$a>b$，$b>a$，$a=b$ 三种关系中必有一个且仅有一个成立.

②（传递性）　若 $a>b$ 且 $b>c$，则 $a>c$.

③（与运算的相容性）　若 $a>b$，则 $a+c>b+c$；若 $a>b$，$c>0$，则 $a \cdot c>b \cdot c$.

（3）阿基米德公理.

对任意 $a, b \in \mathbf{R}$，$a>0$，存在正整数 n，使 $n \cdot a>b$.

（4）完备性公理.

$\mathbf{R}$ 中的任何基本列都在 $\mathbf{R}$ 中收敛.

细心的读者已经注意到，在域公理中只定义了加法和乘法，四则运算尚缺少减法与除法. 我们知道减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算，而之所以能定义这两种逆运算的关键在于负数与倒数概念的引入. 这恰恰可以由域公理中的 4(单位元)和 5(逆元)来保证. 至于乘方则可视为因数相同时连乘积的速算，而开方即乘方的逆运算. 值得一提的是在等式 $4^3=64$ 中，64 是 4 的乘方(3 次方)的结果，4 是 64 开 3 次方的结果 $(4=\sqrt[3]{64})$，而 3 是什么呢？这正是高一年级第二学期 4.4 学习的对数的概念 $(3=\log_4 64)$.

加、减、乘、除四则运算均为二元运算，即实数集中的两个实数作运算获得一个新的实数. 此处，可以借助于图形来直观地理解两个正实数(其中至少有一个是无理数)的和或积一定存在且唯一. 如把“两个正实数的和”看成分别以这两个实数为长度的两条线段的和；把“两个正实数的积”看成以如上所说的两条线段为邻边的长方形的面积. 相反数与绝对值可以看作实数集中的一元运算，它们是进行实数运算、比较实数大小不可缺少的工具.

绝对值具有几何与代数双重意义，其几何意义是：一个实数的绝对值就是

这个实数在数轴上所对应的点到原点的距离，这也是绝对值这个概念的内涵所在. 绝对值的代数意义（或代数定义）是运用分类讨论的思想方法通过揭示其外延来完成的，即分别阐明一个正数、负数或零的绝对值是什么，其符号表示为

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{当 } a>0 \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } a=0 \text{ 时;}\\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时.}\end{cases}$$

上述双重意义分别体现了数形结合及分类讨论的数学思想. 而在进行含绝对值问题的求解时，一个基本的做法是利用绝对值的代数意义将其转化为不含绝对值的相应问题，这体现了等价转化的数学思想. 绝对值这个概念的价值还在于它建立了“距离”的一个数学模型，距离作为一种几何量，其代数刻画往往离不开绝对值这个数学概念. 另一方面，距离体现的往往是某些数学量的最小值，这就和函数有了密切的联系. 而且，这种数学模型（或标准）的建立，正像解析几何中选择标准方程仔细研究一样，体现了数学研究的特性，反映了一种大的数学思考，即“求简与化归”.

例 1.1 (1) 平面直角坐标系 xOy 中，x 轴上两点 A、B 对应的实数分别为 x_1、x_2，则 A、B 之间的距离等于平面上从点 A 到点 B 路程的最小值，即线段 AB 的长，其值为 $|x_1-x_2|$.

(2) 平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(x, y)$ 到 x 轴的距离为点 P 到 x 轴上所有点之间的距离中的最小值，即从点 P 向 x 轴所作垂线段的长度，其值为 $|y|$. 同理 $P(x, y)$ 到 y 轴的距离为 $|x|$.

(3) 平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 l：$y=kx+b$ 的距离等于点 P 到直线 l 上点的距离中的最小值. 从几何上容易发现，此即求从点 P 向直线 l 所作垂线段的长度. 这对于没学习过高二解析几何 11.4“点到直线的距离”的读者来说似乎十分困难. 但其实若紧紧抓住“最小值”三字，则对于初中生来讲亦为一道繁而不难的用代数方法（函数方法）解决几何问题的好练习题，而且从此过程中可感受到解析几何“消元化归，灵活变形，有序计算”的风采.

在直线 l 上取点 $Q(x, y)$，则

$$|PQ|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{(x-x_0)^2+(kx+b-y_0)^2}$$
$$=\sqrt{(1+k^2)x^2-2[x_0+k(y_0-b)]x+x_0^2+(y_0-b)^2}$$

由于 $x\in\mathbf{R}$，故当 $x=-\dfrac{-2[x_0+k(y_0-b)]}{2(1+k^2)}=\dfrac{x_0+k(y_0-b)}{1+k^2}$ 时，

$$|PQ|_{\min}=\sqrt{\frac{4(1+k^2)[x_0^2+(y_0-b)^2]-4[x_0+k(y_0-b)]^2}{4(1+k^2)}}$$