iPraclass

高等职业教育“十三五”规划新形态教材

高等应用数学

主　编　马树燕　王海萍　许卫球

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等应用数学

主　编　马树燕　王海萍　许卫球

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书注重基本概念、基本理论和基本技能的训练，注重培养学生应用数学知识分析和解决问题的能力．全书共分为 7 章，第 1 章～第 5 章讲述一元函数微积分知识，第 6 章和第 7 章分别讲述线性代数和概率论基础知识．为了能较好地实施高职高专数学教学，本书开头增添了“中学数学知识回顾”，使该书既保持高职数学理论的系统性和科学性，又兼顾知识的衔接性和实用性．

本书的编写在数学内容的深度和广度方面，力求做到易教、易学、易懂，在教材结构和内容选择上，遵循由浅入深的原则，便于学生对概念的了解、对基本知识和方法的掌握，并能使学生将所学知识与实际应用很好地联系起来．

本书可作为高职高专院校“高等数学”“应用数学”或“经济数学”课程的教材．

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学/马树燕，王海萍，许卫球主编．—北京：北京理工大学出版社，2018. 8

ISBN 978－7－5682－6051－0

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①马…②王…③许…　Ⅲ．①应用数学－高等职业教育－教材　Ⅳ．①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 182538 号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址／http：//www. bitpress. com. cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／11. 5
字　　数／275 千字
版　　次／2018 年 8 月第 1 版　2018 年 8 月第 1 次印刷
定　　价／35. 00 元

责任编辑／钟　博
文案编辑／钟　博
责任校对／周瑞红
责任印制／施胜娟

前　言 PREFACE

高等数学作为高等院校理工科专业的基础学科，在我国已有近百年的教学史，但其作为高职高专的基础知识学科，在我国仅有十几年的历史．近些年，随着国家经济的高速发展，各行各业对技能型人才的数量和质量的要求都在不断提高．

为了适应高职院校人才培养的新要求，充分发挥数学课程在学院人才培养中的重要作用，本着“拓宽文化基础、增强能力支撑、构建学生可持续发展平台和提供专业工具”的精神，针对高职院校学生的学习特点，昆山登云科技职业学院数学组的教师结合多年来的教学实践经验编写了本教材．在教材编写中，编者们认真遵循实用、够用的原则，对以往教材中的微积分内容进行了适当的精简和弱化，增加了一些更为基础的内容以适应学生对数学知识的承受能力，并依据对专业课教师的走访交流结果，在内容编写上增添了使用面较为广泛的线性代数和概率论两部分的初步知识．本书为学生学习专业基础课、专业课提供必需的数学知识和数学方法，突出高职高专数学教学“学以致用”的特点．全书着重数学应用方法的介绍，淡化理论的推导和证明，取消繁杂的计算，既保证基本知识要点，又满足各专业对数学学习的基本需求，并为学生的后续课程学习和可持续发展奠定了必要的数学基础．

本书由马树燕、王海萍、许卫球主编，由马树燕统稿．本书的编写分工为：王海萍编写第 1 章、第 3 章、第 7 章，马树燕编写第 4 章、第 5 章、第 6 章，许卫球编写第 2 章．这本教材是数学组同仁共同研讨、团结合作的结果，其作为学院数学课程改革的一个部分，会存在一些不足之处，在今后的教学实践中，我们将使之更加完备和完善．

本书在编写过程中，得到学院领导的有力支持和帮助，章合利教师对本书编写提出了许多宝贵意见．在此，对他们表示衷心的感谢．

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中的错漏之处在所难免，敬请读者批评指正．

编　者

目　录 CONTENTS

中学数学知识回顾

1. 合并同类项

(1)如果两个单项式,它们所含的字母相同,并且各字母的指数也分别相同,那么就称这两个单项式为**同类项**. 如$2ab$与$-3ab$,$3m^2n$与$-2m^2n$都是同类项. 特别的,所有的常数项也都是同类项.

(2)把多项式中的同类项合并成一项,叫作同类项的合并(或合并同类项). 同类项的合并应遵照法则进行:把同类项的系数相加,所得结果作为系数,字母和字母的指数不变.

(3)合并同类项的理论依据是分配律:$a(b+c)=ab+ac$.

(4)注意括号的使用.

【同步训练 0.1】

对下列各题进行化简:

(1)$-xy+3-2xy+5xy-4xy-7$;

(2)$\frac{1}{x}(1+\ln x)-(1-\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)$;

(3)$2(1-x^2)+2x(-2x)$;

(4)$e^x(\cos x-\sin x)+e^x(\sin x+\cos x)$.

2. 因式分解

把一个多项式化为几个最简整式的乘积的形式,这种变形叫作把这个多项式**因式分解**(也称为分解因式). 常用的方法有:

(1)提取公因式法.

(2)公式法:

①平方差公式:$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

②完全平方公式:$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

(3)十字相乘法. 口诀:首尾分解,交叉相乘,求和凑中.

(4)分组分解法.

【同步训练 0.2】

将下列各式分解因式：

(1)$5x^2-xy$；　　(2)x^4-1；

(3)x^2-4x+3；　　(4)$6x^2+7x-5$.

3. 指数公式与幂的运算

$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}(a\neq0)$，　$a^0=1(a\neq0)$，　　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a\geqslant0,m、n$ 为正整数$)$.

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}(a\neq0)$，　　$a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq0)$.

$(ab)^n=a^n\cdot b^n(ab\neq0)$，　　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}(ab\neq0)$.

【同步训练 0.3】

化简下列各题：

(1)$3x^2y^3\cdot\sqrt{x}\dfrac{2}{y^5}$；　　(2)$\dfrac{x^2-\sqrt[3]{x^2}}{x^2}$；

(3)$\ln\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^4}}$；　　(4)$16x\cdot x^2+5(-x^2\cdot x)$.

4. 常用三角函数公式与正弦、余弦定理

(1)三角函数公式：

$$\sin^2x+\cos^2x=1,\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},1+\tan^2x=\sec^2x,$$

$$\sin2x=2\sin x\cos x,\cos2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x.$$

(2)正弦定理:

对△ABC,有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{C}{\sin C}.$$

(3)余弦定理:

在△ABC 中,有

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A;$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cdot\cos B;$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C.$$

【同步训练 0.4】

1. 化简下列各题.

(1)$(\sin x+\cos x)^2-1$;　　　　(2)$\dfrac{2\sin^2 x}{1+\cos 2x}$.

2. 证明:$1+\cot^2 x=\csc^2 x$.

3. 已知力 $F1$ 的大小为 10N,力 $F2$ 的大小为 5N,两个力的夹角为 60°,求它们的合力 $F3$ 的大小及 $F3$ 与 $F1$ 夹角的正弦值.

5. 复数与平面向量

1)复数

规定 $i^2=-1$,其中 i 为虚数单位,形如 $z=a+bi$,a、$b\in\mathbf{R}$ 的数称为**复数**,a 称为复数的实部,b 称为复数的虚部. 当 $b\neq0$ 时,z 称为虚数,若 $a=0$,$b\neq0$,则 z 称为纯虚数. 复数的**模** $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

复数相加时,实部与实部相加,虚部与虚部相加,其原理与合并同类项相同. 复数相乘时,符合多项式乘法法则,同时运用 $i^2=-1$.

2)平面向量

平面向量即平面内既有大小(即长度,或称为模长),又有方向的有向线段,记作 $\vec{z}$ 或 $\overrightarrow{AB}$(A、B 分别为向量的起点和终点)等. 平面坐标系内把向量 $\vec{z}$ 平移至起点与原点重合,则终点坐标(a,b)即向量 $\vec{z}$ 的坐标. 向量 $\vec{z}$ 的模长 $|\vec{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$.

向量加法符合平行四边形法则,向量减法符合三角形法则(箭头方向指向被减向量). 坐标运算则是横坐标和纵坐标分别相加或相减.

向量的数量积来源于物理上功的计算.

设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ,则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$,又称 $|\vec{a}|\cos\theta$ 为 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影. 易知 $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$,若 $\vec{a}=(x,y)$,$\vec{b}=(m,n)$,则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=xm+yn$,所以有 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{xm+yn}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{m^2+n^2}}$.

【同步训练 0.5】

1. 计算$(3-4i)(2+i^3)$.

2. 化简$\dfrac{1-2i}{3i}$.

3. 已知 $|\vec{a}|=1$,$|\vec{b}|=4$,$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 60°.

求:(1)$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(3\vec{b}-\vec{a})$;

(2)$|\vec{a}+\vec{b}|$.

4. 已知 $\vec{a}=(-2,1)$,$\vec{b}=(5,-3)$,求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ 的余弦.

6. 直线与方程

1)直线的倾斜角

在平面直角坐标系内,若直线与 x 轴相交,则 x 轴正向以逆时针绕交点旋转至与该直线重合,转过的角度 α 称为直线的倾斜角. 若直线与 x 轴平行或重合,则倾斜角 α 为 $0°$. 显然 $\alpha\in[0°,180°)$. 当 $\alpha\neq 90°$时,定义 $k=\tan\alpha$ 为直线的斜率.

两直线平行或重合⇔倾斜角相同⇔斜率相同(若存在).

2)直线方程的五种形式

(1)两点式:$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$,其中$(x_1,y_1)$,$(x_2,y_2)$是直线上两个点.

(2)点斜式:$y-y_1=k(x-x_1)$,(x_1,y_1)是直线上的点.

(3)斜截式:$y=kx+b$,直线过点$(0,b)$.

(4)截距式:$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,直线过点$(a,0)$,$(0,b)$,且 $ab\neq 0$.

(5)一般式:$Ax+By+C=0$(A、B 不能同时为零).

【同步训练 0.6】

1. 已知直线 $y=x-7$,求它的倾斜角度数.

2. 已知直线的倾斜角为 $60°$,且过点$(-1,3)$,求直线方程.

3. 已知直线 l 过点$(1,-1)$且与直线 $2x+3y=1$ 平行,求直线 l 的方程.

第1章 函数、极限和连续

【学习目标】

☞ 理解函数的概念、性质及函数的图像,掌握复合函数的分解过程.

☞ 了解数列极限与函数极限的相关概念,理解无穷小与无穷大的概念,会求函数的极限.

☞ 理解函数连续与间断的概念.

1.1 函　　数

1.1.1 函数的概念和性质

1. 函数的概念

1)常量与变量

对各种现象的发展变化过程进行定量的描述时,总要涉及两种基本的量,即常量和变量.在某过程中数值保持不变,取固定值的量称为**常量**;在研究过程中数值发生变化,在一定范围内可能取不同值的量称为**变量**.

注意:常量与变量是相对“过程”而言的.

常量与变量的表示方法:通常用字母 a,b,c 等表示常量,用字母 x,y,z 等表示变量.

2)函数

在研究问题时,为了描述某一变化过程中不同变量之间的依赖关系,给出函数的概念.先来看两个实际的例子.

例 1.1 自由落体运动中,质点下落的距离 s 与下落时间 t 之间的关系由下式确定:

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 $g\approx 9.8\text{m/s}^2$ 为重力作用下自由落体的加速度.由这个关系式可知,对于任意大于零的 t 值,有唯一的 s 值与之对应.

例 1.2 在几何中,圆的面积 S 由半径 r 唯一确定,它们之间的关系由下式给出:

$$S=\pi r^2$$

对于每个非负的 r 值,由此关系式都可以得到唯一的面积 S 与之对应.

以上两例虽然背景不同,但它们都表达了两个变量之间相互依赖的关系.这个关系由一个对应法则给出,当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,根据这个对应法则,另一个变量有唯一确定的值与之对应.两个变量之间的这种对应关系就是函数的实质.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个非空实数集，如果对于每个数值 $x\in D$，按照某个法则 f，总有确定的数值 y 和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$（图 1－1）.

数集 D 叫作这个函数的**定义域**.

当 $x_0\in D$ 时，称 $f(x_0)$ 为函数在 x_0 处的函数值. 当自变量 x 在定义域内取每一个数值时，对应的函数值的全体叫作函数的**值域**.

函数的两要素：定义域与对应法则（图 1－2）.

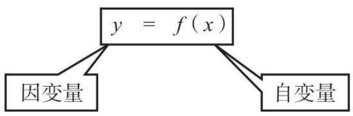

图 1－1

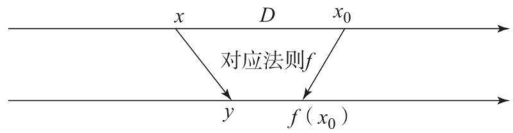

图 1－2

约定： 定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值. 例如 $y=\sqrt{1-x^2}$，D：$[-1,1]$，再如 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$D$：$(-1,1)$.

2. 函数的性质

1）函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义. 如果存在常数 $M>0$，使得对任意的 $x\in D$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**；如果这样的 M 不存在，即对于任意的正数 M，无论它多大，总存在 $x\in D$，使得 $|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

如果存在常数 M（或 m），使得对任意的 $x\in D$，恒有 $f(x)<M$（或 $f(x)>m$），则称函数 $f(x)$ 在 D 上有**上界**（或有**下界**）.

显然，在某区间上有界的函数在此区间上也必有上界和下界；反之，若函数在某区间上既有上界，也有下界，那么它在此区间上一定是有界的. 无界函数可能只有上界，而没有下界；或者只有下界，而没有上界；或者既没有上界，也没有下界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在其定义域 $\mathbf{R}$ 上是有界的，这是因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$. 而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在其定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上无界，但是如果研究范围是区间 $[1,2]$，显然对任意的 $x\in[1,2]$，恒有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，这就是说 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上是有界的. 由此可见，一个函数是否有界，与所讨论的区间有关.

2）函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，如图 1－3 所示，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果对于区间 I 上的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，如图 1－4 所示，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的. 单调增加的函数和单调减少的函数统称**单调函数**，使函数单调的区间称为函数的**单调区间**.

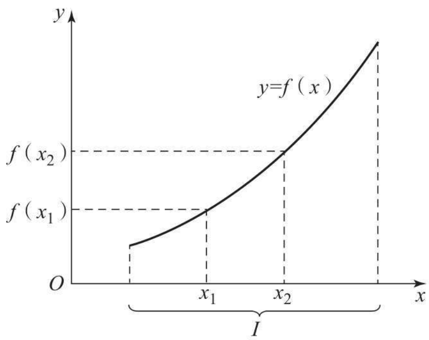

图 1－3

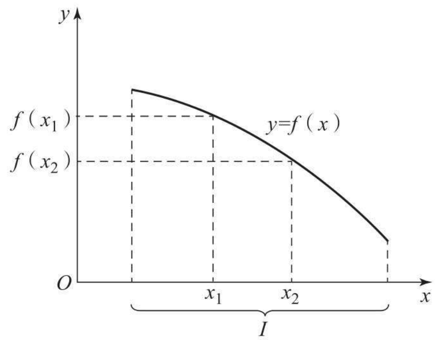

图 1－4

函数的单调性不仅和函数表达式有关,也和定义区间有关．一般的,如果函数在整个定义域内不单调,可以将定义域分成多个子区间,使函数在各个子区间内单调．例如,函数 $y=x^2$ 在整个定义域$(-\infty,+\infty)$内不是单调的,但是在定义域的子区间$(-\infty,0)$上单调减少,在$(0,+\infty)$上单调增加．

3)函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,其中 D 关于原点对称,即当 $x\in D$ 时,有 $-x\in D$. 如果对于任意 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为**偶函数**．如果对于任意 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为**奇函数**．例如函数 $y=x^2$ 与 $y=x\sin x$ 都是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数,函数 $y=x^3+x$ 是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的奇函数,而函数 $y=x^2+x$ 是非奇非偶的函数．

由定义可知,奇函数的图像关于原点对称,如图 1－5 所示;偶函数的图像关于 y 轴对称,如图 1－6 所示．

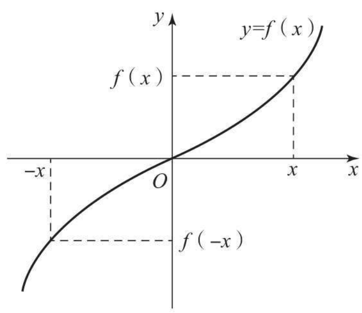

图 1－5

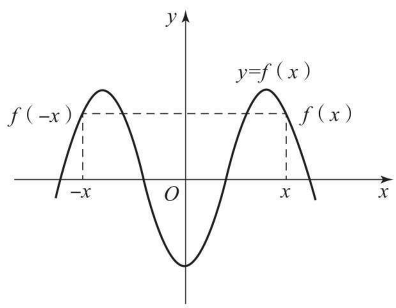

图 1－6

4)函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个正数 l,使得对于任意 $x\in D$,均有$(x\pm l)\in D$,且有恒等式

$$f(x+l)=f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 称为函数 $f(x)$ 的周期(通常所说周期函数的周期是指其**最小正周期**).

例如,函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数,而 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数. 周期函数的图像在每个长度为一个周期的区间上都有相同的形状,自然也有相同的单调性等特性,如图1-7所示.

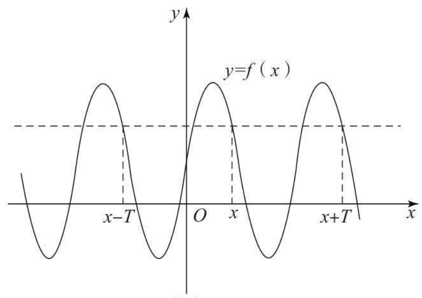

图1-7

1.1.2 初等函数

本书主要研究初等函数,而初等函数是由基本初等函数组成的.

1. 基本初等函数及其图形

把中学时学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六类函数统称为基本初等函数. 下面简单给出常用的基本初等函数的表示式及其图形、特征.

1)幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 是常数)

幂函数 $y=x^{\mu}$ 的定义域和值域依 μ 的取值的不同而不同,但是无论 μ 取何值,幂函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义,而且图形都经过点(1,1),如图1-8所示.

2)指数函数 $y=a^x$($a>0, a\neq1$)

指数函数 $y=a^x$(a 是常数)的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(0,+\infty)$,图像都经过点(0,1),如图1-9所示.

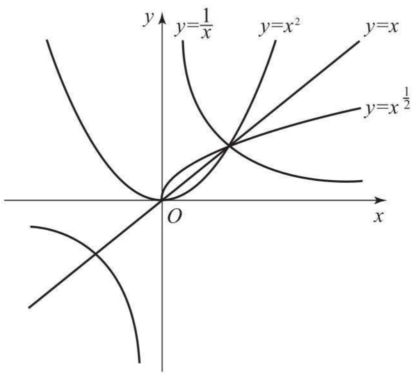

图1-8

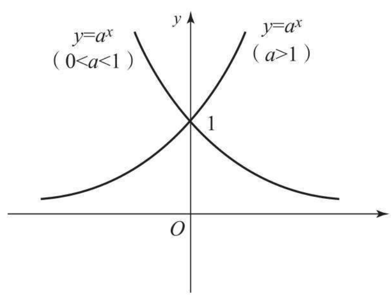

图1-9

常用的指数函数为 $y=\mathrm{e}^x$($\mathrm{e}\approx2.718\,281\,8$).

3)对数函数 $y=\log_a x$($a>0, a\neq1$)

对数函数 $y=\log_a x$(a 是常数)的定义域为 $(0,+\infty)$,值域为 $(-\infty,+\infty)$,其图像始终在 y 轴右侧,当 $a>1$ 时,图像严格单调递增;当 $0<a<1$ 时,图像严格单调递减. 对数函数的图像都经过点(0,1),如图1-10所示.

对数函数和指数函数互为反函数,它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

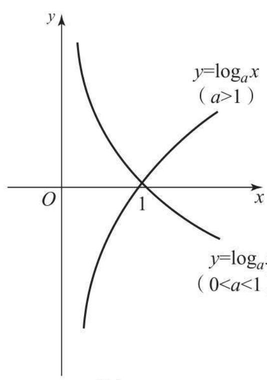

图1-10