应用型本科规划教材

主编 刘玉军 陆宜清

线性代数

Xianxing Daishu

上海科学技术出版社

应用型本科规划教材

线 性 代 数

主　编　刘玉军　陈宜清

上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘玉军,陆宜清主编.—上海:上海科学技术出版社,2017.7

应用型本科规划教材

ISBN 978-7-5478-3564-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①刘…②陆… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第104056号

线性代数

主编 刘玉军 陆宜清

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版
(上海钦州南路71号 邮政编码200235)

上海世纪出版股份有限公司发行中心发行
200001 上海福建中路193号 www.ewen.co
常熟市华顺印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 11
字数:240千字
2017年7月第1版 2017年7月第1次印刷
ISBN 978-7-5478-3564-7/O·56
定价:33.00元

作者名单 Authors

主　编　刘玉军　陆宜清

副主编　谢振宇　郑凤彩　林大志　徐香勤

参　编　刘　宇　张思胜　薛春明　王　茜

内容提要 Synopsis

本书是应用型本科规划教材，由具有多年教学经验的教师团队编写而成．全书共六章，主要内容包括行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组、矩阵的特征值及相似矩阵、二次型．每章末增加 MATLAB 数学实验内容，书后附有习题答案与提示．附录部分收录了近年来硕士研究生入学考试线性代数部分真题及参考答案．

本书可供应用型本科院校非数学类各专业线性代数课程教学使用或参考，也可供有兴趣的读者参阅．

前言 Preface

线性代数是高等数学的一个分支，是一门研究线性问题的数学基础课. 其内容主要包括行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、矩阵的特征值及相似矩阵、二次型等. 随着计算机技术的不断发展，线性代数在现实世界中的应用价值愈加巨大，可以通过矩阵在计算机中的定义完成很多工作，如小至配平化学方程式、计算体积，大至交通网络流、联合收入、电学方程、动力系统、经济均衡等问题. 因此，线性代数已经成为各高等院校理工、经管类等专业的学生必修课之一，并成为考研的科目之一.

为了适应"十三五"应用型本科教育的转型需求，针对各专业特点，编者在借鉴同类教材特色的基础上，结合多年实践教学、科研的体会，以"注重基础训练，降低理论深度，突出计算应用"为目标，编写了这本应用型本科教材.

本教材主要特点如下：

1. 整书的框架保持了线性代数的基本内容，以矩阵为主线，贯穿全书.

2. 适当调整了部分知识的顺序，省略部分理论的推导和证明，使知识结构更趋于合理.

3. 将数学、应用和计算软件相结合，培养学生借助计算机工具处理实际问题的能力.

4. 在章节练习中，适当增加填空题和选择题的分量，让学生更好地了解概念的内涵和外延.

5. 为适应部分学生的考研需求，在附录部分增加了近5年来研究生入学考试线性代数部分的真题及参考答案.

参加本书编写工作的有：河北师范大学刘玉军、谢振宇、郑凤彩、刘宇，河南牧业经济学院陆宜清、林大志、徐香勤、张思胜、薛春明、王茜. 全书由刘玉军、陆宜清担任主编，并负责统稿和定稿工作.

在编写过程中，河北师范大学的各级领导和同事给予了很大的指导和支持，在此表示由衷的感谢.

由于编者水平、经验有限，书中可能有不足之处，欢迎大家批评指正，使本教材在教学中不断趋于完善.

编 者

目录 Contents

第一章

行　列　式

学习目标

1. 掌握二阶、三阶行列式的定义和计算.
2. 掌握全排列、逆序数的相关定义.
3. 掌握 n 阶行列式的定义及三角形行列式.
4. 熟练掌握 n 阶行列式的定义及相关性质.
5. 掌握 n 阶行列式的展开方法.
6. 掌握克拉默法则解方程组.

行列式的概念最初是伴随方程组的求解而发展起来的，在线性代数、多项式理论、微积分中(比如换元积分法中)，行列式作为基本的数学工具，都有着重要的应用.

本章主要在二阶、三阶行列式的基础上，建立起n阶行列式的理论，给出n阶行列式的定义、性质和计算方法，最后介绍n阶行列式的一个应用——克拉默(Cramer)法则，求解一类特殊的n元线性方程组.

第一节　二阶与三阶行列式

行列式是由解线性方程组产生的一种算式.

一、二元线性方程组与二阶行列式

考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. & (2) \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法解这个方程组：

$$\begin{aligned} &a_{22}\times(1)-a_{12}\times(2), \quad &\text{得}\quad (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2, \\ &a_{11}\times(2)-a_{21}\times(1), \quad &\text{得}\quad (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1. \end{aligned}$$

当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，求得方程组的解为

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

注意到式(1.2)中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得，其中分母$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$是由方程组(1.1)的四个系数确定的. 为便于记忆，把这四个数按它们在方程组(1.1)中的位置，排成二行二列(横排称行、竖排称列)的数表$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$，并把表达式$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为该数表所确定的二阶行列式，记作$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中，数a_{ij}称为行列式的元素，元素a_{ij}的第一个下标i表示这个元素所在的行数，称为行标；第二个下标j表示这个元素所在的列数，称为列标.

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆. 把a_{11}到a_{22}的实连线称为主对角线，a_{12}到a_{21}的虚连线称为副对角线，有

$$\underset{\text{副对角线}}{}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{\text{主对角线}} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

于是二阶行列式便是主对角线上的两元素乘积减去副对角线上的两元素乘积.

根据定义,容易得知式(1.2)中的两个分子可分别写成

$$a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \ a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

如果记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,

则当 $D \neq 0$ 时,方程组(1.1) 的解可以表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意这里的分母 D 是由方程组(1.1)中的系数按其原有的相对位置而排成的二阶行列式(称系数行列式). 分子中的 D_1, D_2 是把系数行列式 D 中的第 1, 2 列换成常数项得到的.

例 **1.1** 解线性方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 1, \\ x_1 + 3x_2 = 2. \end{cases}$$

解 利用上式,有

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 2 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 4 \times 2 = -5, \ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3.$$

因此,方程组的解是

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{5}{2}, \ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{2}.$$

二、三元线性方程组与三阶行列式

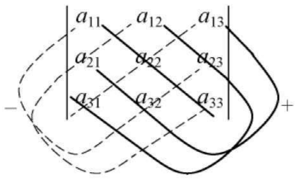
对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.3}$$

做类似二阶行列式的讨论,便引入了三阶行列式的概念.

定义 **1.1** 称符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$



为三阶行列式. 三阶行列式是六项的代数和,其中每一项均为不同行、不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循对角线法则: 每一条实线上三个元素的乘积带正号,每一条虚线上三个元素的乘积带负号.

例 **1.2** 计算三阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$\begin{aligned} D &= 2\times3\times5 + 1\times1\times2 + 2\times(-4)\times3 - 2\times1\times3 - 1\times(-4)\times5 - 2\times3\times2 \\ &= 30 + 2 - 24 - 6 + 20 - 12 = 10. \end{aligned}$$

例 **1.3** 已知 $D = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$,问 a, b 应满足什么条件?(其中 a, b 均为实数)

解 由于

$$D = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2,$$

若要 $a^2 + b^2 = 0$,则 a, b 须同时等于零. 因此,当 $a = 0$ 且 $b = 0$ 时,给定行列式等于零.

第二节 *n* 阶行列式

上一节学习了二阶、三阶行列式,要想定义更高阶的行列式,需要用到排列的相关知识,为此先介绍全排列.

一、全排列及其逆序数

定义 **1.2** 把 n 个不同的元素排成一列,称为这 n 个元素的全排列(简称 n 级排列). 例如,1234 是一个 4 级排列,3412 也是一个 4 级排列,而 52341 是一个 5 级排列.

数字由小到大的 n 级排列 $1234\cdots n$ 称为标准排列. 标准排列的元素之间的顺序称为标准顺序或自然序.

定义 **1.3** 在任一排列中,若某两个元素的顺序与标准顺序不同,就称这两个元素构成了一个逆序. 在一个排列中,逆序的总和称为这个排列的逆序数,记作 τ.

如在 3 级排列 213 中,2 与 1 就构成了一个逆序;321 中 2 与 3, 1 与 2, 1 与 3 都构成逆

序. 因此 213 的逆序数为 1，321 的逆序数为 3.

一般地，从第二个元素起开始数，该元素前有几个数比它大，这个元素的逆序就是几，将一个排列所有元素的逆序相加，即得到这个排列的逆序数.

例 **1.4** 求排列 53241 逆序数.

解 在 53241 排列中，

5 排在首位，逆序数为 0；

3 的前面比 3 大的数有 1 个(5)，故逆序数为 1；

2 的前面比 2 大的数有 2 个(5，3)，故逆序数为 2；

4 的前面比 4 大的数有 1 个(5)，故逆序数为 1；

1 的前面比 1 大的数有 4 个(5，3，2，4)，故逆序数为 4.

于是这个排列的逆序数为

$$\tau(53241) = 1 + 2 + 1 + 4 = 8.$$

如果排列的逆序数是奇数，则称此排列为奇排列；逆序数是偶数的排列则称为偶排列.

容易看出，标准排列的逆序数为 0，是偶排列.

在 6 个 3 级排列中，123，231，312 为偶排列，而 132，213，321 为奇排列，即奇偶排列各占一半. 这并非偶然现象.

事实上，在 $n!$ 个 n 级排列中，奇偶排列各占一半. 为证明这个规律，将对排列的奇偶性做进一步的讨论.

二、对换

定义 **1.4** 在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果把其中两个元素 i_s 与 i_t 对调位置，其余元素位置不变，就得到一个新的 n 级排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换称为一个对换，记作 $(i_s,\ i_t)$.

例如，对排列 3214 做对换(3，1)后便得 1234.

定理 **1.1** 任一排列经过一次对换后，其奇偶性改变.

证 首先讨论对换相邻两个数的情况.

设排列为 $a_1a_2\cdots a_nijb_1b_2\cdots b_n$，对换 i 与 j，则排列变为 $a_1a_2\cdots a_njib_1b_2\cdots b_n$，显然对 $a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_n$ 来说，本次对换并不改变它们的逆序数. 而当 $i<j$ 时，经过 i 与 j 的对换后，排列的逆序数增加 1；当 $i>j$ 时，经过 i 与 j 的对换后，排列的逆序数减少 1. 所以对换相邻两数后，排列的奇偶性改变.

再讨论一般情况. 设排列为 $a_1a_2\cdots a_lib_1b_2\cdots b_mjc_1c_2\cdots c_n$，将 i 与 j 做一次对换，则排列变为 $a_1a_2\cdots a_ljb_1b_2\cdots b_mic_1c_2\cdots c_n$. 这就是对换不相邻的两个数的情况. 但它可以看成是先将 i 与 b_1 对换，再与 b_2 对换，…，最后与 b_m 对换，即 i 与它后面的数做 m 次相邻两数的对换变成排列 $a_1a_2\cdots a_lb_1b_2\cdots b_mijc_1c_2\cdots c_n$；然后将数 j 与它前面的数 i，b_m，…，b_1 做 $m+1$ 次相邻两数的对换而成 $a_1a_2\cdots a_ljb_1b_2\cdots b_mic_1c_2\cdots c_n$. 所以对换不相邻的数 i 与 j(中间有 m 个数)，相当于做 $2m+1$ 次相邻两数的对换. 由前面的证明知，排列的奇偶性改变了 $2m+1$ 次，而 $2m+1$ 为奇数，因此，不相邻的两数 i，j 经过对换后的排列与原排列的奇偶性不同.

定理 **1.2** 在所有的 n 级排列中($n\geqslant 2$)，奇排列与偶排列的个数相等(各占一半)，各为

$\frac{n!}{2}$个.

证　设在$n!$ 个n级排列中,奇排列共有p个,偶排列共有q个.对这p个奇排列施以同一个对换,则由定理 1.1 知p个奇排列全部变为偶排列,由于偶排列一共只有q个,所以$p \leqslant q$;同理,将全部的偶排列施以同一对换,则q个偶排列全部变为奇排列,于是又有$q \leqslant p$,所以$p = q$,即奇排列与偶排列的个数相等.

又由于n级排列共有$n!$ 个,所以$p + q = n!$, $p = q = \frac{n!}{2}$.

三、n 阶行列式

对于二阶、三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

从中易分析得:

(1) 二阶行列式是 2! 项的代数和,三阶行列式是 3! 项的代数和,一半的项取正号,一半的项取负号.

(2) 二阶行列式中每一项是两个元素的乘积,它们分别取自不同的行和不同的列;三阶行列式中的每一项是三个元素的乘积,它们也是取自不同的行和不同的列.

(3) 每一项的符号是:当这一项中元素的行标是按自然序排列时,如果元素的列标构成的排列为偶排列,则取正号;列标构成的排列为奇排列,则取负号.

作为二阶、三阶行列式的推广,可以给出n阶行列式的定义.

定义 1.5　由排成n行n列的n^2个元素$a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$组成的符号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$称为$n$阶行列式. 它是$n!$ 项的代数和;每一项是取自不同行和不同列的n个元素的乘积;各项的符号是:每一项中各元素的行标按自然序排列时,如果列标的排列为偶排列时,则取正号;排列为奇排列时,则取负号. 于是得:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

其中,$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的n级排列$j_1 j_2 \cdots j_n$求和,也可简记为$|a_{ij}|$. 此式称为n阶行列式按行标自然序排列的展开式,$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项.

当 $n=2, 3$ 时，这样定义的二阶、三阶行列式与第一节中用对角线法则定义的是一致的. 当 $n=1$ 时，一阶行列式为 $|a|=a$，但注意不要将其与绝对值混淆.

上述定义中，把 n 个元素的行标按自然序排列，即 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 事实上，数的乘法是满足交换律的，因而这 n 个元素的次序是可以任意交换的. 一般地，n 阶行列式的项可以写成 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，其中 $i_1i_2\cdots i_n$，$j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 级排列，也就是说行列式也可定义为

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n\text{或}j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

其中，$\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n\text{或}j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对行标构成的所有 n 级排列或列标构成的所有 n 级排列求和.

这是因为，若根据 n 阶行列式的定义来决定 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的符号，就要把这 n 个元素重新排一下，使它们的行标排成自然序，也就是排成 $a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}$，于是它的符号是 $(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}$.

现在来说明 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 与 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是一致的. 由前可知，从 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 变到 $a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}$ 可经过一系列元素的对换来实现. 每做一次对换，元素的行标与列标所组成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$，$j_1j_2\cdots j_n$ 就同时做一次对换，也就是 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 同时改变奇偶性，因而它的和 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性不改变. 也就是说，对 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 做一次元素的对换不改变 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的值，因此在一系列对换之后有 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}=(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}$. 这就证明了 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 与 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是一致的.

同样，由数的乘法的交换律，也可以把行列式的一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中元素的列标排成自然序 $123\cdots n$，而此时相应的行标的 n 级排列为 $i_1i_2\cdots i_n$，则行列式定义又可叙述为

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

称为 n 阶行列式按列标自然序排列的展开式.

例 1.5 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$，其中 $a_{ii}\neq0\,(i=1, 2, \cdots, n)$.

解 由 n 阶行列式的定义，应有 $n!$ 项，其一般项为 $(-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 但由于 D 中有许多元素为 0，只需求出上述一切项中不为 0 的项即可. 在 D 中，第 n 行元素除 a_{nn} 外，其余均为 0. 所以 $j_n=n$；在第 $n-1$ 行中，除 a_{n-1n-1} 和 a_{n-1n} 外，其余元素都是 0，因而 j_{n-1} 只取 $n-1$，n 这两个可能，又由于 a_{nn}，a_{n-1n} 位于同一列，而 $j_n=n$，所以只有 $j_{n-1}=n-1$. 这样逐步往上推，不难看出，在展开式中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 一项不等于 0. 而这项的列标所组成的排列的逆序数是 $\tau(12\cdots n)=0$，故取正号. 因此，由行列式的定义有

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$