初等数学基础

主编　李奕

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

初等数学基础

主　编　李　奕

副主编　覃明森

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

初等数学基础/李奕主编．—北京：北京理工大学出版社，2017.8
ISBN 978 - 7 - 5682 - 4666 - 8

Ⅰ．①初…　Ⅱ．①李…　Ⅲ．①初等数学 - 高等职业教育 - 教材　Ⅳ．①O12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 201808 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 /
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 9
字　　数 / 220 千字
版　　次 / 2017 年 8 月第 1 版　2017 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 / 24.80 元

责任编辑 / 李秀梅
文案编辑 / 杜春英
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 施胜娟

前 言

本教材是根据教育部2009年颁布的《中等职业学校数学教学大纲》，并结合高等职业教育的人才培养目标和五年制高职学生实际编写的。

本教材的编写遵循以下几个原则：

1. 适度、够用的原则。

教材编写从学生实际情况出发，以人为本。五年制高职招收的学生主要以初中毕业生为主，这些学生对小学、初中数学知识掌握的程度不高，进入高职院校直接接受当前大纲规定的数学课程学习极为困难。为了达到五年制高职数学课程教学的要求，本教材以帮助学生构建必要的数学基础知识为目的，降低数学知识的系统性要求，降低推理和证明的难度，使学生在学习时可接受、愿意学，增强其学习数学的信心。

2. 文化课与专业课相结合的原则。

为了体现为专业学习服务的功能，降低数学知识的系统性要求，与传统的数学教材相比，增加了适应专业学习的实际应用内容，如为学前教育专业增加了数论方面的知识，为经贸类专业增加了合适的应用问题，等等。

本教材分为7章，内容包括数与运算、代数式、方程与不等式、函数、数列、立体几何、概率与统计初步，可供五年制高职第一学期使用。

参加编写工作的有李奕、覃明森、梁淑双、陈甦甦、周福和覃拥民。全书由陆显琛校订。

在编写本教材的过程中，还获得了韦英、姜思佳、蒋武生和廖苑蓉等同志提出的宝贵意见和帮助，在此，谨向这些同志表示感谢。

由于编写时间仓促，教材中难免存在疏漏之处，恳请广大读者在使用的过程中提出宝贵意见，以便进一步修改。

编　者

目 录

第 1 章

数与运算

1.1　数与运算概述

引入

数的原始本质在于表达多与少。能分辨多与少，是动物的本能之一。一只狗面对一匹狼和一群狼的反应是不一样的；一只野猫和一群野猫面对一根骨头的反应也是不一样的。由此可见，一般的动物有一定的分辨数量的能力。

案例：乌鸦具有一定的分辨数量的能力

在欧洲某地庄园的望楼上有一个乌鸦巢，里面住着一只乌鸦。主人打算杀死这只乌鸦，可是几次都没有成功，因为他一走进这个望楼乌鸦就飞走，远远地栖在树上，直到他离开望楼才飞回来。

最后他想到一个好办法：两个人一起走进望楼，一个人出来，一个人留在里面。可是乌鸦不上当，直到第二个人离开望楼才飞回来。主人不死心，连续试了几天，三个人、四个人都没有成功。最后用了五个人，四个人走出来，一个人留在里面，最终乌鸦分不清了，飞回了乌鸦巢。

新知识

一、数的产生

人类与其他许多动物一样，在蒙昧时代就具有辨别事物多寡的能力，这就是原始的“数感”，后来逐渐发展成数的概念。远古人类在狩猎、采集等社会生活中就注意到一只羊与一群羊、一个果子与一堆果子的区别，通过比较，逐渐意识到一只羊、一个果子、一棵树等之间存在着共同的数量属性，这就是单位性，它构成了数量的基本单位。

同样，人类会注意到一双手、一对小鸟、两条鱼等可以一一对应，且由两个基本单位构成，即存在数量上的共同属性。以此类推，逐渐抽象事物的这一数量属性，便形成了数的概

念。当数的概念越来越清晰时，人们便用语言、符号表示这些结果，即计数。

由此可见，数的产生源于人类社会生产生活实践的需要，同时又促进人类社会的发展。从逻辑关系来看，数概念的产生大致需要经历以下几个阶段。

1. 分类

分类，就是根据事物的特点进行归类，把具有相应共同特征和属性的事物放在一起，以便进行研究和讨论。

2. 比较

比较，即对两种或两种以上的同类事物辨别异同，以便更好地认识同类事物。人们常将事物按照大小、多少、高矮、长短、轻重等进行比较。

3. 多少

多少，即同类事物在数量上进行比较，考查它们在数量上的差异。

4. 数数

数数（shǔshù），即采用实物一一对应或口头叨念或心中默念等方式查点数目，逐个说出数目，这是对事物的数量进行比较精确的界定。

5. 替代

替代，用具体事物（如石子、贝壳等），以一一对应的形式替代要记录的物体，表述物体的数量。

6. 计数

计数，即用语言、符号、文字等将数数的结果记录下来，便于日后使用。

早期的数主要指自然数，它容易和自然界中的事物建立对应关系，有直观形象的背景，在很大程度上是看得见、摸得着的。而以后的数，如小数、分数、有理数、无理数、复数等都是人类在自然数的基础上创造的，是比较抽象的，并不真实存在于自然界中。因此，德国数学家克罗内克曾经说："上帝创造了自然数，其他的数都是人为的。"

有了数，人们便开始用数进行交流，进而产生了运算。例如，昨天打猎捕获 2 只羊，今天捕获 3 只羊，圈养在一起就是 5 只羊（5 是数出来的），于是就有了 $2+3=5$。这就产生了加法，加法的结果是可以数出来的。

又如，一共有 5 只羊，宰杀 3 只，还剩下 2 只，于是就有了 $5-3=2$，这就产生了减法，也可以认为减法是加法的逆运算。

假如有 4 个人，在一次打猎活动中，每人都捕获 2 只羊，那么 4 个人就捕获 $2+2+2+2=8$ 只羊。像这种相同数自身连加的运算，可以简便地表示为 $2\times4=8$，这就是乘法。乘法是一种特殊的加法，表示相同数的连加。

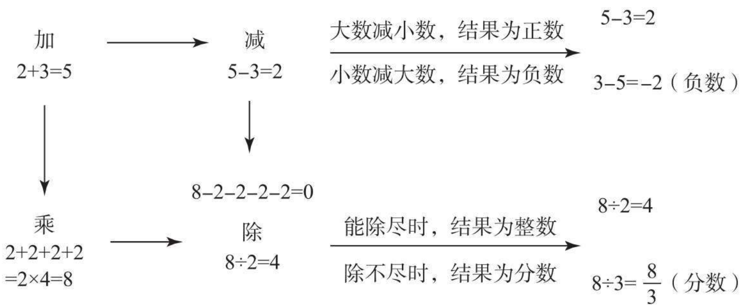
人们也会遇到乘法的逆运算问题。例如，2 个人一共捕获 8 只羊，每人分多少只呢？原始社会是一个比较公平的社会，希望分配公平，将 $2\times4=8$ 反过来，每人可以分得 4 只羊，用算式表示就是 $8\div2=4$（等分除的雏形），这就产生了除法。从这层关系上看，除法是乘法的逆运算。

2 个人分 8 只羊的问题还可以用减法来处理，具体这样操作：第一次分，每人各拿走一只羊，对应 $8-2=6$；第二次分，每人又各拿走一只羊，对应 $8-2-2=4$；依次进行，到第四

次分，每人又各拿走一只羊，对应 $8-2-2-2-2=0$。最终结果是每人分得 4 只羊。可见 8 里面有 4 个 2，这就是包含除的雏形。从这种意义上讲，除法是特殊的减法。

后来人们发现，在自然数范围内，加法和乘法可以畅通无阻地进行，而减法和除法则不行。为了进行小数减大数的运算，可以采用类比大数减小数的方法进行运算。例如 $5-3=2$，那么定义 $3-5=-2$，这就需要引进新的数——负数。

同时，当两个数相除，商不是自然数时，人们也想表示运算结果，就引入了分数，比如 $8\div3=\dfrac{8}{3}$。



由此可见，负数和分数都是应运算的需要而产生的数。两数相减，大数减小数的结果是正数，小数减大数的结果是负数。两个整数相除，能整除时，商是整数；不能整除时，商就是分数。

而后，又产生了有理数和无理数。有理数是由所有整数、分数组成的，它们都可以化成有限小数或无限循环小数；无理数是无限不循环小数，如圆周率 π、$\sqrt{2}$ 等。

二、数的分类

在数学上，可以根据不同的标准把数进行分类，尽管人们对数的分类还有一些不同的看法，但都承认数的概念还会不断扩充和发展，到目前为止，数的家族已发展得十分庞大，如图 1.1.1 所示。

- 数
  - 狭义数
    - 实数
      - 有理数
        - 正有理数
          - 正整数
          - 正分数
        - 零（0）
        - 负有理数
          - 负整数
          - 负分数
      - 无理数
        - 正无理数
        - 负无理数
    - 复数
  - 广义数
    - 向量
    - 矩阵
    - 其他（如张量、群、环、域等）

正整数、0 } 自然数

图 1.1.1

三、数轴

在小学学习数学时，就能用直线上依次排列的点来表示自然数，它帮助我们认识了自然数的大小关系。而学完实数后，我们可以用数轴形象地表示实数，利用数轴比较数的大小，等等。

在数学中，可以用一条直线上的点表示数，这条直线叫作数轴，如图 1.1.2 所示。

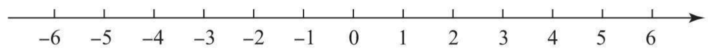


图 1.1.2

数轴三要素：原点、正方向和单位长度。

（1）在直线上任取一个点表示 0，这个点叫作原点。

（2）通常规定直线上从原点向右为正方向，从原点向左为负方向。

（3）选取适当的长度为单位长度，直线上从原点向右，每隔一个单位长度取一个点，依次表示 1，2，3，…；从原点向左，用类似方法依次表示-1，-2，-3，…

像这样规定了原点、正方向和单位长度的直线叫作**数轴**（numberaxis）。

从数轴上可以看出，正数>0，负数<0，正数$>$负数。

知识巩固

例 1 画出数轴，并在数轴上画出表示下列各数的点。

4，-2，-4.5，$1\dfrac{1}{3}$，0。

解：如图 1.1.3 所示。

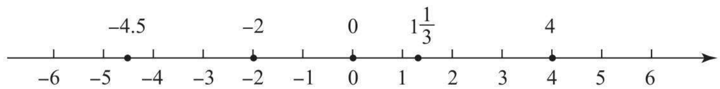


图 1.1.3

数学是研究数和形的学科，在数学里，数和形是有密切联系的。我们常用代数的方法来处理几何问题；反过来，也借助于几何图形来处理代数问题，寻找解题思路。这种数与形之间的相互作用叫作数形结合，是一种重要的数学思想。

有了数轴，数和形便得到初步结合，这有利于对数学问题的研究。

四、计数与读数

1. 计数

计数的发展是一个由繁到简的漫长过程，经历了手指计数、石子计数和结绳计数等实物计数阶段，之后逐渐过渡到符号计数阶段。但是早期的计数方式是用一个符号表示一个数，要表示很多数，就需要很多符号，使用起来不太方便。后来，人们使用有限的符号，按照一定的顺序加上排列规则来表示很多的数，这就是计数。

计数的方法有很多，目前常用的是十进制计数法。十进制计数法包括“十进位”和

“位值制”两条原则，这是十进制计数法的“位值原则”。

所谓“十进位”，就是满十进一，即相邻两个计数单位之间的进率为十，10 个一向十位进一，10 个十向百位进一……也就是说，百位上的 1 相当于 10 个十位上的 1，十位上的 1 相当于 10 个个位上的 1。

0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这 10 个阿拉伯数字按照一定的顺序排列起来，每个数字所占的位置叫作数位。如，45 230 这个数里有 5 个数位，它们分别是个位、十位、百位、千位和万位。

所谓“位值制”，就是同一个数字在不同数位上表示的数值不同。例如，在“22”中，前一个 2 表示两个 10，后一个 2 表示两个 1。

以十进制计数法为依据，我国是按照“四位一级”给自然数命名的，具体如下：

（1）自然数的前十个数给予单独的名称，即〇、一、二、三、四、五、六、七、八、九，对应的大写为零、壹、贰、叁、肆、伍、陆、柒、捌、玖，对应的阿拉伯数字为 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9。

（2）按照“满十进一”的原则规定计数单位，10 个一叫作十，10 个十叫作百，10 个百叫作千，10 个千叫作万，10 个万叫作十万，后面依次为百万、千万、亿、十亿、百亿、千亿、兆……，十、百、千、万、亿的大写分别为拾、佰、仟、万、亿。其中，个、十、百、千为个级，万、十万、百万、千万为万级，之后依次为亿级……

按“四位一级”给自然数命名的方式具体如表 1.1.1 所示。

表 1.1.1

级名			亿级				万级				个级			
计数单位	…	兆	千亿	百亿	十亿	亿	千万	百万	十万	万	千	百	十	个
	…						3	0	2	0	9	3	0	4
			4	0	0	3	0	0	0	0	0	3	0	0

（3）其他自然数的命名，由前 10 个数和计数单位组合而成。写数的时候，各计数单位对应写上数字。例如，一个自然数由 3 个千万、2 个十万、9 个千、3 个百、4 个一构成，写作 30 209 304，读作三千零二十万九千三百零四。如果一个自然数由 4 个千亿、3 个亿、3 个百构成，则写作 400 300 000 300，读作四千零三亿零三百。

知识巩固

例 2　有一个四位数，各位数字互不相同，将它的各位数字顺序颠倒过来，得到一个新的四位数，新数比原数大 7 452，则原来的四位数是多少？

解：设原来的四位数是 $abcd$，依题意知 $dcba-abcd=7\ 452$。根据十进制计数法可得 $1\ 000d+100c+10b+a=1\ 000a+100b+10c+d=7\ 452$。

整理得 $999d+90c-90b-999a=7\ 452$，可变形为 $111(d-a)+10(c-b)=828$。

用 111 和 10 表示 828，只有 $111\times8-10\times6=828$，所以 $d-a=8$，$b-c=6$。解得 $a=1$，$b=8$，$c=2$，$d=9$，即原来的四位数是 1 829。

2. 读数

按照我国传统的习惯，我们这样读数：

(1) 不含 0 的数，从低位到高位进行四位分级，然后从高位起，顺次读出各级里的数和它们的级名。

(2) 含有 0 的数，从低位到高位进行四位分级，然后从高位起，顺次读出各级里的数和它们的级名，每一级中间的 0 只读一次，每一级末尾的 0 不读。

知识巩固

例 3 8 524 读作“八千五百二十四”，9 647 531 读作“九百六十四万七千五百三十一”。

例 4 3 500 读作“三千五百”，3 010 读作“三千零一十”，307 001 读作“三十万七千零一”，500 000 000 读作“五亿”，5 040 030 500 读作“五十亿四千零三万零五百”。

练 习

1. 填空：

(1)（ ）个一百亿是一千亿，10 个（ ）是一百亿，10 个亿是（ ）。

(2) 7 246 500 000 是（ ）位数，最高位是（ ）位，6 在（ ）位上，表示 6 个（ ）。

(3) 从个位起，第（ ）位是万位，第（ ）位是亿位。

2. 读出下面各数：

1 204 000 000；103 050 600 000。

1.2 四则运算

引入

四则运算是指加法、减法、乘法和除法的计算，这些运算的含义、运算性质、运算法则你了解吗？在四则混合运算中，为何先算乘除再算加减？

新知识

一、加法

1. 加法的含义

求两个数的和的运算叫作加法。记作：$a+b=c$；读作：a 加 b 等于 c。其中，a 与 b 叫作加数，c 叫作和，“+”叫作加号。

加法的基本意义是聚合，并由聚合延伸出比较。

1）聚合

知识巩固

例 1　小明有 5 颗玻璃珠，小强有 4 颗玻璃珠，小明和小强共有几颗玻璃珠？

解：采用数数的形式进行计算，如图 1.2.1 所示。

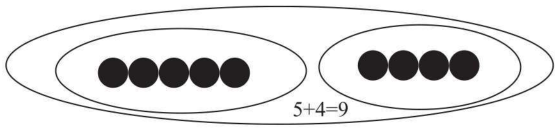


图 1.2.1

2）比较

知识巩固

例 2　小明有 5 颗玻璃珠，小强比小明多 4 颗玻璃珠，小强有几颗玻璃珠？

解：计算方法如图 1.2.2 所示。

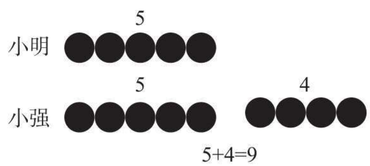


图 1.2.2

2. 运算性质

加法交换律　两个数相加，交换加数的位置，它们的和不变，即 $a+b=b+a$。

加法结合律　三个数相加，先把前两个数相加，再加第三个数，或者先把后两个数相加，再加第一个数，它的结果不变，即 $(a+b)+c=a+(b+c)$。

拓展一　若干个数相加，任意交换加数的位置，或者先把其中任意几个加数作为一组加起来，再与其他加数相加，它们的和不变。

拓展二　若干个数的和加若干个数的和，可以先把第一个和中的数分别与第二个和中的数相加，再把所得的和加起来，即 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = \sum\limits_{i=1}^{n}(a_i + b_i)$。

我们也可以直观地理解加法交换律和加法结合律。例如，图 1.2.3 所示第一排的 5 个石子，从左向右数就是 $3+2=5$，而从右向左数就是 $2+3=5$。可见，最终结果与数数顺序无关，因而得到 $3+2=2+3$。再如第二排石子，从左向右数就是 $3+2+1=6$，从右向左数就是 $1+2+3=6$。可见，$(3+2)+1=3+(2+1)$，这就是加法结合律。

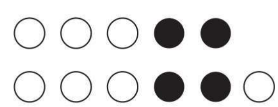


图 1.2.3

和不变的性质　两个数相加，其中一个加数加上某个数，另一个数减去相应的数，和不变，用数学语言表示是：若 $a+b=c$，那么 $(a\pm m)+(b\mp m)=c$。

如果把“和不变的性质”作为基础，可以证明加法交换律和加法结合律。

如证明 $15+12=12+15$，根据和不变的性质，有 $15+12=(15-3)+(12+3)=12+15$。

对于结合律，$(a+b)+c=a+(b+c)$，只需要把 $a+b$ 和 c 看作两个数，那么根据和不变的性质，有 $(a+b)+c=(a+b-b)+(b+c)=a+(b+c)$。

更为重要的是，我们在进行加法的简便运算时，常常利用和不变的性质先凑整再计算。

知识巩固

例 3 计算 236+189。

解：$236+189=(236-11)+(189+11)=225+200=425$。

例 4 计算 456+205。

解：$456+205=(456+5)+(205-5)=461+200=661$。

3. 运算法则

1）表内加法

加法就是数数，而且是顺着数数。例如，3+2 就是在 3 的基础上再数两个数——4，5，得到 3+2=5。当然也可以在 2 的基础上加三个数——3，4，5；还可以合并起来，先数 3 个数再加 2 个，即 1，2，3，4，5，得到 3+2=5。

把几加几的结果整理成表和口诀，就称为加法表和加法口诀，它和乘法口诀一样，是进行运算的基本工具。有时将加法表或加法口诀中包含的加法称作表内加法。

2）表外加法

但是当加数很大时，我们一个一个地数数，需要花很长时间，于是人们就发明了笔算加法，其本质是十进制计数法的“位值原则”。

当加数和被加数的相同数位上的数相加不超过 10 时，其算理是相同数位上的数分别相加的结果。

例如，$35+23=(3\times10+5)+(2\times10+3)=(3\times10+2\times10)+(5+3)=(3+2)\times10+(5+3)=5\times10+8=58$。

当加数和被加数相同数位上的数相加超过 10 时，问题就显得复杂了，这就是所说的进位加法。其算理要遵守“满十进一”的原则，当相同数位上的数之和大于 10 时，要向前进位（前一位相当于加上一），而把余下的数作为相同数位上的数相加的结果。

例如，$35+28=(3\times10+5)+(2\times10+8)=(3\times10+2\times10)+(5+8)=(3+2)\times10+13=5\times10+1\times10+3=6\times10+3=63$。

由此可见，加法的法则是这样的：

（1）一位数加一位数，可用数数的加法求和；但在通常情况下，把两个一位数相加的结果编成加法表，直接使用。

（2）多位数加多位数（含一位数），把两个数写成十进制和的形式，按照运算性质拓展二，转化为一位数加一位数进行运算，某位上满十向前进一。

二、减法

1. 减法的含义

在数学上，一般借助加法来定义减法。已知两个数 a 和 b，求一个数 c，使得 c 与 b 的和等于 a，这种运算叫作减法。记作：$a-b=c$；读作：a 减 b 等于 c。其中，a 叫作被减数，b 叫作减数，c 叫作 a 与 b 的差，“$-$” 叫减号。

将减法定义为从一个大数中去掉一个小数而剩下的数的数学运算。减法的基本意义是分离，并由分离延伸出比较。

1）分离

知识巩固

例 5　小强有 6 颗玻璃珠，他给了小明 4 颗，还剩下几颗？

解：解题方法如图 1.2.4 所示。

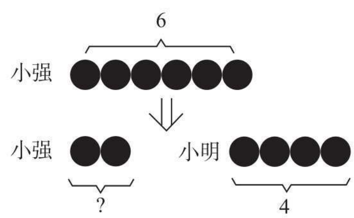


图 1.2.4

2）比较

知识巩固

例 6　小强有 9 颗玻璃珠，小明比他少 4 颗，小明有几颗玻璃珠？

解：解题方法如图 1.2.5 所示，用数数的方法进行运算。

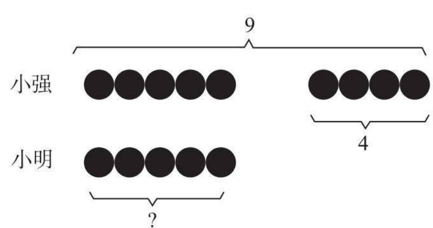


图 1.2.5

例 7　小强有 9 颗玻璃珠，小明有 5 颗玻璃珠，小强比小明多几颗玻璃珠？

解：解题方法如图 1.2.6 所示。

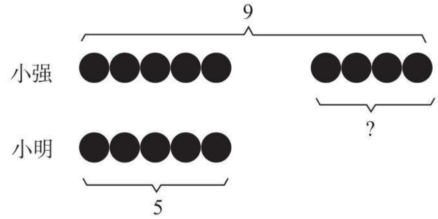


图 1.2.6

需要说明的是，由减法的定义，可以得到下面结论：

（1）在自然数范围内，减法不一定总可以进行，也就是说差不一定存在，如果差存在，那么一定唯一。也就是说，如果 $a-b=x$，且 $a-b=y$，那么 $x=y$。

例如，在自然数范围内，3-5 就不能进行。

（2）某数减去一个数，再加上同一个数，仍得原数。例如，$(a-b)+b=a$。

证明：设 $a-b=c$，那么 $b+c=a$，于是 $(a-b)+b=c+b=b+c=a$。

（3）某数加上一个数，再减去同一个数，仍得原数。例如，$(a+b)-b=a$。

证明：设 $a+b=c$，那么 $c-b=a$。于是 $(a+b)-b=c-b=a$。

2. 运算性质

性质一　一个数减去两个数的和，等于从这个数中依次减去和里的每一个加数。例如，$a-(b+c)=a-b-c$。

性质二　一个数减去两个数的差，等于这个数先加上差里的减数，再减去差里的被减数，或者等于先减去差里的被减数，再加上差里的减数。例如，$a-(b-c)=a+c-b=a-b+c$。

性质三　若干个数的和减去若干个数的和，等于第一个和中的各个加数，分别减去第二个和中不比它大的加数，再把所得的差加起来。例如，$\sum_{i=1}^{n} a_i-\sum_{i=1}^{n} b_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)(a_i>b_i)$。

差不变的性质　被减数和减数同时加上或减去一个数，结果不变。即若 $a-b=c$，那么 $(a\pm m)-(b\pm m)=c$。

如果把“差不变的性质”作为基础，可以推得“去括号”法则。例如，要计算 $a-(b-c)$，可以将被减数和减数同时加上 c，得到 $a+c-(b-c+c)=a+c-b=a-b+c$。

类似地，可以推得 $a+(b-c)=a+b-c$。（请读者自行推导）

此外，在进行减法的简便运算时，常常使用差不变的性质先凑整再计算。

知识巩固

例 8　计算 235-189。

解：$235-189=(235+11)-(189+11)=246-200=46$。

例 9　计算 456-205。

解：$456-205=(456-5)-(205-5)=451-200=251$。

3. 运算法则

1）表内减法

计算减法最初级的方法是“倒着数数”。例如，要计算 8-3，就从 8 往回数 3 个数，依次为 7，6，5，结果就是 5，因此 $8-3=5$。

但在数学上，我们是根据加法表来计算表内减法的，所以这一类减法又称为表内减法。例如，要计算 8-5，可以根据加法口诀“$5+3=8$”，得出 $8-5=3$。再如，要计算 15-8，可以根据加法口诀“$8+7=15$”，得出 $15-8=7$。

2）表外减法

当数很大时，我们一个一个地数数，需要花很长的时间，也不可能用表内加法进行计算。于是人们便发明了笔算减法，其本质是十进制计数法的“位值原则”。

当减数同数位上的数小于等于被减数时，其差是同数位上的数分别相减的结果。

当减数同数位上的数大于被减数时，要遵守“借一当十”的原则向前借位（前一位相当于减去一，后一位相当于加上十）后相减，把剩余的数作为同数位相减的结果。

例如，$35-18=(3\times10+5)-(1\times10+8)=(3\times10-1\times10)+(5-8)=(3-1-1)\times10+(10+5-8)=1\times10+7=17$。

这种减法被称为退位减法。

仿照上述方式，还可进行三位数以及更多位数的减法算理的推导。

三、乘法

1. 乘法的含义

一般情况下，我们用加法来定义自然数的乘法。b 个相同加数 a 的和 c 叫作 a 与 b 的积，即 $c=a+a+a+\cdots+a$。求两个数积的运算叫作乘法，记作 $a\times b=c$ 或 $b\times a=c$；读作“a 乘以 b 等于 c”或者“b 乘以 a 等于 c”。其中，a 与 b 叫作乘数，c 叫作积，符号“×”叫作乘号。乘号有时也可用符号“·”表示，即 $a\times b$ 也可以写成 $a\cdot b$。

乘法的意义是小学数学的重要知识点。可通过实物和图片列出 $2+2+2+2+2=10$，$3+3+3+3+3+3=18$ 等算式，明确这些算式都是相同的加数自身连加，式子比较长，为便于书写，两个算式可写成 $2\times5=10$，$3\times6=18$；进而明确“×”的意义，并且乘号前面的数是加数，乘号后面的数表示加数的个数，两种算式计算的结果相同。

由乘法的定义可知，乘法的本质是相同的加数自身连加。因为在自然数范围内加法是封闭的，结果是唯一的，所以在自然数范围内乘法是封闭的，结果也是唯一的。

2. 运算性质

乘法交换律　两个数相乘，交换乘数的位置，乘积不变。例如，$a\times b=b\times a$。

乘法结合律　三个数相乘，先把前两个数相乘，再与第三个数相乘，或者先把后两个数相乘，再与第一个数相乘，它们的积不变。例如，$(ab)\times c=a\times(bc)$。

乘法分配律　两个数的和与一个数相乘的积，等于和里的每一个加数与这个数相乘，再把所得的积加起来。例如，$(a+b)\times c=ac+bc$。

另一形式，两个数的差与一个数相乘的积，等于被减数与减数分别与这个数相乘，再把所得的积相减。例如，$(a-b)\times c=ac-bc$。

乘法分配律可以推广，多个数相加减的情况请读者自己完成。

知识巩固

例 10　计算 $12\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)$。

解：$12\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)=12\times\frac{1}{4}+12\times\frac{1}{6}-12\times\frac{1}{3}=3+2-4=1$。

积不变的性质　两个数相乘，其中一个乘数扩大某个倍数，另一个数缩小至相应的几分之一，积仍然不变。即若 $a\times b=c$，那么 $(a\times m)\times(b\div m)=c$。

以“积不变的性质”为基础，可以证明乘法交换律和结合律（请读者自行完成）。此