高等职业教育“十二五”规划教材

实用高等数学练习册

SHIYONG GAODENG SHUXUE LIANXICE

李春生 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育“十二五”规划教材

实用高等数学练习册

主　编　李春生
副主编　刘毛生　熊　云　李　彪
参　编　丁　京　吴根绍　李遂清　李平萍
王娜娜　刘　乐　柳　琴　吴启波
黄　保　易飞程　张曙亮　王晓影

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是作者根据当前高等职业教育发展的趋势和广大高职高专教师的实际需要及学生自身的状况编写的，它以主教材为主要教科书，同时兼顾其他同类教材的内容，对主教材的重点、难点逐一进行分析讲解，对典型例题进行归纳，着重理清解题的思路、方法和规律，以帮助学生正确地理解数学概念，提高学生的解题能力和数学素质.

本书包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、常微分方程、无穷级数、多元函数微积分，共9章，本书的主要特点是：注意内容与实用相结合，更注重实用性，培养学生掌握基本运算和实际应用知识的能力.

本书可作为高职院校的工程类专业、管理类专业、经济类专业、医药类专业、计算机类专业的教学用书，也可作为大专或成人教育学院、继续教育学院的学生及数学爱好者的自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

实用高等数学练习册 / 李春生主编 .—北京：北京理工大学出版社，2016.6

ISBN 978-7-5682-2458-1

Ⅰ.①实… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第135443号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京富达印务有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 14.25
字　　数 / 330千字
版　　次 / 2016年6月第1版　2016年6月第1次印刷
定　　价 / 28.00元

责任编辑 / 江　立
文案编辑 / 江　立
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 王美丽

前　言

数学是高等院校的重要基础课程，对培养学生的思维能力、创新精神、科学态度及分析问题的能力都起着重要的作用. 为提高应用数学课的教学质量，全面提高学生解决实际问题的能力，编者在认真总结多年教学经验的基础上，参考中外多种同类教材，编写了这本《实用高等数学练习册》.

本书分九章，按照教学要求设计了四个板块：教学目标；知识点概括；典型例题、同步训练. 在编写过程中，力求做到以下几点.

(1)明确教学目标及要求，通过每章知识点、重点的归纳，帮助学生把握重点，理解知识间的内在联系. 在内容上，注意理论与应用相结合，注重实用价值，以培养学生解决问题的能力. 注意学习的“可持续发展”，为学生学习专业课打下基础，同时也为学生进一步深造提供必要的知识准备.

(2)典型例题与同步训练在试题选取上，力求做到深浅适度，强调知识覆盖面，无论从题型、题量，还是从难易程度等方面都能恰到好处地反映高职高专院校数学课程教学的基本要求，对文科、理科学生进行兼顾. 书中每章、每节均附有参考答案，供学生自主学习.

(3)在帮助高职高专学生系统掌握相关数学知识的同时，更注意对学生获取知识能力和思维能力的培养.

本书由李春生主编，刘毛生、熊云、李彪为副主编，丁京、吴根绍、李遂清、李平萍、王娜娜、刘乐、柳琴、吴启波、黄保、易飞程、张曙亮、王晓影参加编写.

由于编写时间仓促，加之水平有限，书中如有不足之处敬请广大读者批评指正.

编　者

目　　录

第1章　函　　数

在客观世界中,有许多量不是孤立存在的,而是彼此关联、相互依赖的.本章就是要研究和揭示客观世界中存在着的量与量之间的一种关系——函数关系.而函数是微积分学研究的对象.在中学里我们已经学习过函数概念,在这里我们要从全新的视角来对它进行描述并重新分类.

1.1　教学目标

(1)理解函数的定义,理解函数符号的含义,掌握决定函数关系的两个因素(函数的定义域和对应法则),会求函数的定义域和判断函数的值域,掌握函数的特性.

(2)基本初等函数是指常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数这六个函数.

(3)理解复合函数与初等函数的概念,掌握复合函数的复合过程.

(4)关于经济分析中常见的函数.

经济分析中常见的函数主要有这样几类:成本函数、需求函数、供给函数、收益函数、利润函数.这些函数反映的都是经济领域中一些重要因素之间的相互制约关系,在本教材中,对这些函数给出了理想化的表达式,但应该了解到在实际问题中确定这些函数关系是非常复杂的.

1.2　知识点概括

1.2.1　函数的定义

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量,若变量 x 在非空数集 D 内任取一数值,变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的**函数**.记为 $y=f(x)$,这里 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**或**函数**,f 是**函数符号**,它表示 y 与 x 的对应规则,有时函数符号也可以用其他字母表示,如:$y=g(x)$,$y=\varphi(x)$等.D 为**定义域**.

2. 函数的定义域

函数的定义域通常根据两种情形来确定:一种是对有实际背景的函数,根据现实背景中变量的实际意义确定.另一种是对抽象地用算式表达的函数,通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合,这种定义域称为函数的自然定义域,通常有下面几种情况.

(1)分式的分母不能为零;

(2)偶次根式,被开方数必须为非负;

(3)对数式中的真数要大于零；

(4)三角函数、反三角函数要考虑各自的定义域.

在求解函数定义域的过程中,还要使用本章所介绍的一些数学基本知识,且要求解不等式或不等式组.

3. 函数值

当自变量 x 在定义域内取定某确定值 x_0 时,因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$求出的对应值 y_0 叫做当 $x=x_0$ 时的**函数值**,记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

函数值的全体 $Z=\{y|y=f(x),x\in D\}$为**函数值域**.

4. 两个函数相同

确定一个函数,起决定作用的因素是：

(1)对应法则 f;(2)定义域 D_f.

若两个函数的对应法则 f 和定义域 D_f 都相同,那么这两个函数就**相同**;否则不相同.

5. 函数的表示方法

函数的表示方法一般有解析法、表格法和图形法.

1.2.2 函数的特性

函数的特性包括:有界性、奇偶性、单调性、周期性.

1.2.3 初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数包括:常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f,而函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D_φ,如果 $u=\varphi(x)$的值域 $Z_\varphi\subseteq D_f$,则称由 x 经过 u 到 y 的函数 $y=f[\varphi(x)]$为由 $y=f(u),u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,u 称为中间变量.

(1)不是任何两个函数都可以构成一个复合函数.

(2)复合函数不仅可以有一个中间变量,还可以有多个中间变量,这些中间变量是经过多次复合产生的.

(3)复合函数通常不一定是由纯粹的基本初等函数复合而成的,更多的是由基本函数经过运算形成的简单函数构成的,这样,复合函数的合成和分解往往是针对简单函数的.

准确分解复合函数成一系列简单的函数是微积分计算的基础.其基本方法是:从外往里顺序拆开,使拆开后的函数都是基本初等函数,或是由基本初等函数通过四则运算构成的简单函数.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算,并可用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.例如,下列函数等都是初等函数.

$$y=\sqrt{1-x^2}+\ln x^2,y=\frac{\tan x+3e^{\sqrt{x}}}{x^3}-5,y=\ln\cos x+\frac{x+1}{\arcsin 2x}.$$

而 $y=1+x+x^2+x^3+\cdots$不是初等函数(不满足有限的四则运算),本书所讨论的函数基本上都是初等函数.但要注意,分段函数一般不是初等函数,因为分段函数往往不满足初等函数是

由一个解析式所表示这一条件. $f(x)=\begin{cases}1, x>0\\ x, x\leqslant 0\end{cases}$不是一个解析表达式,因此不是初等函数.

1.3　典型例题

【例 1-1】　求下列函数的定义域.

(1)$f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$;　　　　(2)$f(x)=\sqrt{9-x^2}$.

解　(1)在分式$\dfrac{3}{5x^2+2x}$中,分母不能为零,所以 $5x^2+2x\neq 0$,解得 $x\neq\dfrac{-2}{5}$且 $x\neq 0$,即定义域为

$$\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)\cup\left(-\frac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty).$$

(2)在偶次根式中,被开方式必须大于等于零,所以有 $9-x^2\geqslant 0$,解得 $-3\leqslant x\leqslant 3$,即定义域为 $[-3,3]$.

【例 1-2】　已知函数 $f(x)$的定义域是$[1,2]$,求下列函数的定义域.

(1)$f(x^2+1)$;　　　　(2)$f(ax)(a\neq 0)$.

解　(1)因为 $f(x)$的定义域是$[1,2]$,则有 $1\leqslant x^2+1\leqslant 2$,即 $0\leqslant x^2\leqslant 1$,故 $f(x^2+1)$的定义域为$[-1,1]$.

(2)对于 $f(ax)(a\neq 0)$,有 $1\leqslant ax\leqslant 2$.

当 $a>0$ 时,即$\dfrac{1}{a}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{a}$,故有$\left[\dfrac{1}{a},\dfrac{2}{a}\right](a>0)$为 $f(ax)$的定义域.

当 $a<0$ 时,即$\dfrac{2}{a}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{a}$,故有$\left[\dfrac{2}{a},\dfrac{1}{a}\right](a<0)$为 $f(ax)$的定义域.

【例 1-3】　下列各对函数是否相同?为什么?

(1)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$,$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(2)$f(x)=1$,$f(x)=\sec^2x-\tan^2x$.

解　(1)相同.因为定义域、对应法则均相同.

(2)不同.因为定义域不同.

【例 1-4】　判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(2)$f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解　(1)因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$,所以 $f(x)$是偶函数.

(2)因为 $f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$,所以 $f(x)$是偶函数.

【例 1-5】　设 $f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数,若 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加,证明$f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

证明　对于$\forall x_1,x_2\in(l,0)$,且 $x_1<x_2$,有$-x_1,-x_2\in(0,l)$且$-x_1>-x_2$.

因为 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加且为奇函数,所以

$$f(-x_2)<f(-x_1),-f(x_2)<-f(x_1),f(x_2)>f(x_1).$$

这就证明了对于 $\forall x_1 x_2 \in (l,0)$ 有 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

【例 1-6】 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$；　　(2) $y=\cos 4x$；　　(3) $y=1+\sin \pi x$；

(4) $y=x\cos x$；　　(5) $y=\sin^2 x$.

解：(1)是周期函数，周期为 $l=2\pi$.

(2)是周期函数，周期为 $l=\dfrac{\pi}{2}$.

(3)是周期函数，周期为 $l=2$.

(4)不是周期函数.

(5)是周期函数，周期为 $l=\pi$.

【例 1-7】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$.

求：(1) $f[g(x)]$；　(2) $g[f(x)]$.

解　(1)当 $|x|<1$ 时，$f[g(x)]=f(2-x^2)=0$；

当 $|x|>1$ 时，$f[g(x)]=f(2)=0$；

当 $|x|=1$ 时，$f[g(x)]=f(2-1^2)=f(1)=1$；

故
$$f[g(x)]=\begin{cases}0, & |x|\neq 1\\ 1, & |x|=1\end{cases}.$$

(2)当 $|x|\leqslant 1$ 时，$g[f(x)]=g(1)=2-1^2=1$；

当 $|x|>1$ 时，$g[f(x)]=g(0)=2-0^2=2$；

故
$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}.$$

$f[g(x)]\neq g[f(x)]$，可见复合运算不可交换

【例 1-8】 指出下列各复合函数的复合过程.

(1) $y=2^{\sin^2 x}$；　(2) $y=\ln\sqrt{x^2-3x+2}$；　(3) $y=\tan^5\sqrt[3]{\lg(\arcsin x)}$.

解　(1) $y=2^{\sin^2 x}$ 由 $y=2^u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 复合而成.

(2) $y=\ln\sqrt{x^2-3x+2}$ 由 $y=\ln u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2-3x+2$ 复合而成.

(3) $y=\tan^5\sqrt[3]{\lg(\arcsin x)}$ 由 $y=u^5$，$u=\tan v$，$v=\sqrt[3]{w}$，$w=\lg t$，$t=\arcsin x$ 复合而成.

根据复合函数的结构，将复合函数分解成若干个简单函数时，应从外到里，一层一层地分解，千万不能漏层.

【例 1-9】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，且对一切 x 有 $f(x)\leqslant g(x)$. 证明：$f[f(x)]\leqslant g[g(x)]$.

证明　因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，且 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)\leqslant g(x)$，所以
$$f[f(x)]\leqslant f[g(x)].$$
又因为 $f[g(x)]\leqslant g[g(x)]$，所以 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]$.

1.4　同步训练

习题 1.1

1. 选择题.

(1)函数 $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$的定义域是(　　).

A. $(-1,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $[-1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

(2)函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$的定义域是(　　).

A. $(1,+\infty)$　　B. $(0,1)\cup(1,+\infty)$

C. $(0,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $(1,2)\cup(2,+\infty)$

(3)函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$的定义域是(　　).

A. $(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

C. $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

(4)下列各函数对中,(　　)中的两个函数相等.

A. $f(x)=\ln x^2,g(x)=2\ln x$　　B. $f(x)=\ln x^3,g(x)=3\ln x$

C. $f(x)=(\sqrt{x})^2,g(x)=x$　　D. $f(x)=\sqrt{x^2},g(x)=x$

(5)若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},0<x\leqslant 1\\ \ln x,1<x\leqslant \mathrm{e}\end{cases}$,则 $f(x)$的定义域是(　　).

A. $(0,1]$　　B. $(1,\mathrm{e})$　　C. $(0,\mathrm{e}]$　　D. $[0,\mathrm{e}]$

2. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$;　　(2)$y=\log_a\arcsin x$.

3. 设函数 $f(x)=\arcsin x$,求下列函数值.

$f(0)$,　　$f(-1)$,　　$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,　　$f(2)$.

4. 下列函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$，$g(x)=x-1$；　　(2) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=x^0$.

习题 1.2

1. 选择题.

(1)下列函数中为偶函数的是(　　).

A. $y=x\sin x$　　B. $y=e^x-e^{-x}$　　C. $y=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$　　D. $y=x^2-x$

(2)下列函数中，图形关于原点对称的是(　　).

A. $y=\sin x^2$　　B. $y=\sqrt[3]{x}-x$　　C. $y=x^3+1$　　D. $y=e^{-x}+1$

(3)设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，则函数 $f(x)-f(-x)$ 的图形是关于(　　)对称.

A. $y=x$　　B. x 轴　　C. y 轴　　D. 坐标原点

(4)下列函数在其定义域内为无界函数的是(　　).

A. $y=\sin x$　　B. $y=\cos x$　　C. $y=\lg x$　　D. $y=\operatorname{arccot} x$

(5)下列函数在其定义域内为单调函数的是(　　).

A. $y=\sin x$　　B. $y=\cos x$　　C. $y=\lg x$　　D. $y=x^2+1$

(6)下列函数为周期函数的是(　　).

A. $y=\sin x^3$　　B. $y=x\cos x$　　C. $y=\sin 2x$　　D. $y=x^2\sin x$

2. 设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，试证：$f(x)$ 是奇函数.

3. 设 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，试证：$f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, -3\leqslant x\leqslant 0\\ -x^2, 0<x\leqslant 2\end{cases}$的奇偶性、周期性、单调性和有界性.

5. 证明:当函数 $y=f(x)$以 T 为周期时,函数 $y=f(ax)(a>0)$的周期为$\dfrac{T}{a}$.

习题 1.3

1. 选择题.

(1)下列结论中,(　　)是正确的.

A. 基本初等函数都是单调函数　　B. 偶函数的图形关于坐标原点对称

C. 奇函数的图形关于坐标原点对称　　D. 周期函数都是有界函数

(2)若 $f(x)=\ln 2$,则 $f(x+1)-f(x)=$(　　).

A. $\ln\dfrac{3}{2}$　　B. $\ln 2$　　C. $\ln 3$　　D. 0

(3)设 $f(x)=\dfrac{1}{x}+1$,则 $f(f(x))=$(　　).

A. $\dfrac{x}{1+x}+1$　　B. $\dfrac{x}{1+x}$　　C. $\dfrac{1}{1+x}+1$　　D. $\dfrac{1}{1+x}$

(4)设函数 $g(x)=1+x$,$f(x)=\dfrac{2-x}{x-1}$,则 $f\left[g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. -3

2. 下列函数是由哪些函数复合而成?

(1)$y=\sin 2x$;　　(2)$y=\sin^2 x$;

(3)$y=\mathrm{e}^{-x^2}$;　　(4)$y=\dfrac{1}{\ln\ln x}$;

(5)$y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$;　　(6)$y=2^{\arcsin\sqrt{1+x}}$.

3. 设 $f(x)$的定义域是$[0,2]$,求复合函数 $y=f(\ln x)$的定义域.

总习题 1

1. 选择题.

(1)函数 $y=\dfrac{x}{\lg(x+1)}$的定义域是(　　).

A. $x>-1$　　B. $x\neq 0$

C. $x>0$　　D. $x>-1$ 且 $x\neq 0$

(2)下列函数中为奇函数的是(　　).

A. $y=x^2-x$　　B. $y=e^x+e^{-x}$　　C. $y=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$　　D. $y=x\sin x$

(3)设函数 $y=f(x)$的定义域是$[0,1]$,则 $y=f(x+1)$的定义域是(　　).

A. $[-2,-1]$　　B. $[-1,0]$　　C. $[0,1]$　　D. $[1,2]$

(4)若函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$,$g(x)=1+x$,则 $f[g(-2)]=$(　　).

A. -2　　B. -1　　C. -1.5　　D. 1.5

(5)设 $f(x)=\sin(x^2+1)$,则 $f[f(x)]=$(　　).

A. $\sin[(x^2+1)^2+1]$　　B. $\sin[\sin(x^2+1)+1]$

C. $\sin\sin(x^2+1)$　　D. $\sin[\sin^2(x^2+1)+1]$

(6)若函数 $f(x+1)=x^2$,则 $f(x)=$(　　).

A. x^2　　B. $(x-1)^2$　　C. $(x+1)^2$　　D. x^2+1

(7)下列各对函数中,(　　)中的两个函数相等.

A. $y=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}$与 $g=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$　　B. $y=\ln x^2$ 与 $g=2\ln x$

C. $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$与 $g=\cos x$　　D. $y=\sqrt{x(x-1)}$与 $y=\sqrt{x}\sqrt{(x-1)}$

(8)若函数 $y=f(x)$的定义域是$[0,1]$,则 $f(\ln x)$的定义域是(　　).

A. $(0,+\infty)$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $[1,e]$　　D. $[0,1]$

(9)下列函数中,(　　)不是基本初等函数.

A. $y=2^{\sqrt{10}}$　　B. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　C. $y=\ln(x-1)$　　D. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$

2. 确定下列函数的定义域.

(1)$y=\dfrac{2}{\sin\pi x}$;　　(2)$y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}+\log_a(2x-3)$;

(3) $y=\arccos\dfrac{x-1}{2}+\log_a(4-x^2)$.

3. 求函数 $y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的定义域和值域.

4. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?

(1) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;　　(2) $f(x)=\cos x, g(x)=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

5. 设 $f(x)=\sin x$,证明:$f(x+\Delta x)-f(x)=2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$.

6. 设 $f(x)=ax^2+bx+5$,且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$,试确定 a,b 的值.