浙大优学
一题一课

刷百题不如解透一题

一题一课

中考数学压轴题的分析与解

ZHONGKAO SHUXUE
YAZHOUTI DE FENXI YU JIE

惠红民 著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

一题一课

中考数学压轴题的分析与解

惠红民　著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

一题一课. 中考数学压轴题的分析与解 / 惠红民著
. —杭州:浙江大学出版社,2016. 5
ISBN 978-7-308-15676-9

Ⅰ. ①一… Ⅱ. ①惠… Ⅲ. ①中学数学课—初中—题解—升学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 054058 号

一题一课. 中考数学压轴题的分析与解
惠红民 著

策　　划	陈海权(电子信箱:chess332@163. com)
责任编辑	夏晓冬
责任校对	金佩雯　陈　宇
封面设计	林智广告
出版发行	浙江大学出版社 (杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007) (网址:http://www. zjupress. com)
排　　版	杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷	浙江省邮电印刷股份有限公司
开　　本	889mm×1194mm　1/16
印　　张	10. 25
字　　数	324 千
版 印 次	2016 年 5 月第 1 版　2016 年 5 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-15676-9
定　　价	21. 8 元

浙江大学出版社发行部联系方式:0571—88925591;http://zjdxcbs. tmall. com

刷百题不如解透一题(压轴题)

早就想写一本能够切实帮助学生解决中考数学压轴题的书。恰逢浙江大学出版社推出“一题一课”系列图书编写,我有幸能参与其中,为面临中考的同学谈谈解中考压轴题的方法,以解决广大初中生的“难题”情结。于是,集合我多年教学经验,精心编著的《中考数学压轴题的分析与解》这本书诞生了。

中考数学压轴题是对初中数学所学知识的全方位考查,是命题老师的精心研究成果,是属于考查学生思维能力和创新意识的试题,所以它会从三个方面提出挑战:

从学习层面,挑战同学们综合运用基础知识、基本技能的能力;

从思考的难度与深度,挑战同学们的逻辑思维能力;

从自我需求角度,是同学们挑战中考满分、战胜自我的必然追求。

平常的教学中,在中考的复习阶段,我经常发现有同学面对着压轴题一脸茫然、毫无头绪,随着思考时间一分一秒的增加,最终仅能完成送分的第一问,甚至还有部分同学面对压轴题从来都是知难而退,缺少探索的勇气与精神,直接就放弃了。其实,压轴题并不是凭空产生的,虽然它是命题组老师智慧的结晶,但这种智慧出发于我们的教材,来源于我们的学习,回归于我们的思考。

着急的同学肯定会问:解中考数学压轴题到底需要培养或具备什么能力呢?简单地说需要学会从已知出发分析条件,需要把综合问题化解为基础问题,完成对复杂问题的转化。

压轴题的顺利解决来源于“从已知出发”。

“从已知出发”意思就是强调对已知条件的解读,先按照条件的呈现顺序逐一分析,再重点分析不同已知条件是如何沟通、联系起来的,避免孤立地看待每一个已知条件。通俗的说,就是先看到的先分析,后看到的后分析,再把后看到的条件与对前面条件的分析结合起来思考。

压轴题的解题感觉来源于“基本图形”。基本图形指的是相关几何概念、结论、性质等所描述的图形,基本图形蕴含着线段、角之间常见的的位置关系与数量关系。可以说,任何一个几何问题的图形,都是由一个或几个基本图形组合而成的。需要注意的是,当几个基本图形组合而成为一个几何问题的时候,有的图形的性质就隐去了,所以几何问题的分析和思考过程实质上就是要辨识图形,在组合图形或复杂图形中发现、识别基本图形,并分别应用这些基本图形的性质,使问题得到解决。

在阅读学习这本书的过程中,同学们会多次感受到以下这三个观点:要具备扎实的基本功;在实战中积累解题经验;在学习中获取破题之道。这样的观点既代表了如何培养解中考数学压轴题的能力,也是秉承“一题一课”系列“刷百题不如解透一题”的原则,想让同学们摆脱题海战术,通过原创分析、解答以及经验分享,为同学们手把手地传递解题经验。

特意为购买本书学习的同学,送上我的学生在解题后反思的一段话,希望你们看后会产生同感。“每一道题肯定不会只有一种做法,但是却一定有一种做法值得我们去思考与努力,只有通过这一种做法锻炼自己,锻炼自己敏锐的观察及活跃的思维,最后才可做好每一道数学题。”

最后,我要感谢我的家人和身边的老师、朋友,是大家的支持与信任让我完成了这本书;我同样要感谢购买这本书的朋友,是你们让我的写作有了意义。我也欢迎阅读本书的同学或老师与我就书中的问题多多交流,让我们共同提高。

惠红民

目　　录

学习心得

第一章　中考数学压轴题的认识与解决之道

第 1 课　拨云见日初识压轴题

进入中考复习阶段以后，同学们就会发现越来越多的压轴题需要综合运用代数、几何两部分知识才能解决（简称为代、几综合题），属于初中数学中知识覆盖面广、综合性最强的题型．这类试题综合考查同学们灵活运用数学知识的能力，对数学知识的迁移能力，对代数、几何知识的内在联系的认识，运用数学思想方法分析、解决问题的能力（有没有被这段话吓住?!）．

例 1　如图 1，在矩形 $OABC$ 中，$OA=5$，$AB=4$，点 D 为边 AB 上一点，将$\triangle BCD$ 沿直线 CD 折叠，使点 B 恰好落在 OA 边上的点 E 处，分别以 OC，OA 所在的直线为 x 轴，y 轴建立平面直角坐标系．

(1)求 OE 的长；

(2)求经过 O，D，C 三点的抛物线的解析式；

(3)一动点 P 从点 C 出发，沿 CB 以每秒 2 个单位长度的速度向点 B 运动，同时动点 Q 从 E 点出发，沿 EC 以每秒 1 个单位长度的速度向点 C 运动，当点 P 到达点 B 时，两点同时停止运动．设运动时间为 t 秒，当 t 为何值时，$DP=DQ$；

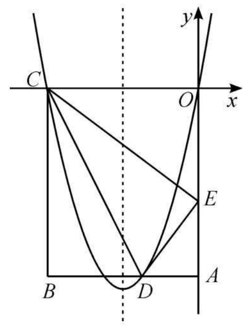

图 1

(4)若点 N 在(2)中的抛物线的对称轴上，点 M 在抛物线上，是否存在这样的点 M 与点 N，使得以 M，N，C，E 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，请求出 M 点的坐标；若不存在，请说明理由．

【分析】　(1)与矩形有关的折叠问题——轴对称、解直角三角形、方程思想．

如图 2，在矩形 $OABC$ 中，过顶点 C 折叠使点 B 恰好落在 OA 边上的点 E 处，即以点 C 为圆心、以 $CB=5$ 为半径作圆，则$\odot C$ 与 OA 边的交点为 E．然后或通过$\triangle COE$ 与$\triangle EAD$ 的相似，或利用$\angle OCE=\angle AED$（或$\angle CEO=\angle ADE$）则三角函数值相等，或在 $\mathrm{Rt}\triangle EAD$ 中应用勾股定理，都可以求得 $AD=\frac{3}{2}$，$BD=DE=\frac{5}{2}$．类似这样的计算都属于矩形折叠问题中的常规中档问题，属于稍加训练就能掌握的基本技能，只要重视基础我们都能过关，而这样的问题放在坐标系中无非是多了一步线段长与点坐标的转化而已．

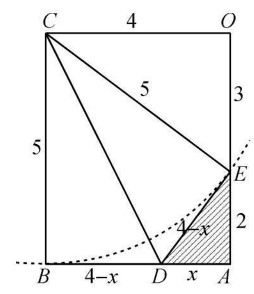

图 2

(2)求抛物线的解析式——待定系数法．

待定系数法就是利用解方程(组)求函数解析式中的字母系数，从而确定函数的解析式，这属于初中代数里最基本的运算，是学习函数的必然要求．

由点 $C(-4,0)$，$O(0,0)$，设二次函数的双根式 $y=a(x-0)(x+4)$，代入(1)中所求

学习心得

的点 $D\left(-\frac{3}{2},-5\right)$,解得 $a=\frac{4}{3}$,所以 $y=\frac{4}{3}x(x+4)=\frac{4}{3}x^2+\frac{16}{3}x=\frac{4}{3}(x+2)^2-\frac{16}{3}$.

这里需要提醒的是,在求二次函数的解析式时,要有意识地从一种形式变形得到另外两种形式,这样这个二次函数的基本情况就都能掌握了.

(3)动点问题——时间参数 t 表示线段长,三角形全等,方程思想,数形结合思想.

如图3,几何图形中的动点,以函数思想中的变量来体现,此即为最基本的学习数学的数形结合思想.对动点 P,Q 的理解,就是会用变量 t 表示出线段 $CP=2t,PB=5-2t,EQ=t,QC=5-t$.审题后发现动点 P,Q 若满足 $DP=DQ$,则图形中蕴涵着 $\mathrm{Rt}\triangle DBP$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle DEQ$ 的全等关系,所以 $PB=EQ$,解方程 $5-2t=t$ 即可.

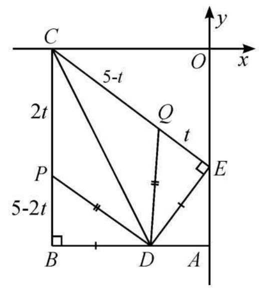

图3

(4)平行四边形的存在性问题——平行四边形的性质与判定,图形的平移、旋转,点的坐标,二次函数的性质以及分类讨论思想等.

平行四边形的存在性问题,一般考查给出两个顶点去探究另外两个顶点的位置,常以确定的两个点(如本题的点 C,E)所连线段(CE)为分类标准,分两种情况讨论:已知线段(CE)为对角线时,需要用到中心对称的知识;已知线段(CE)为边时,需要用到平移的知识.

具体分析如图4,5,6所示,若 CE 为对角线,根据 C,E 两点坐标能判断其中点在抛物线的对称轴 $x=-2$ 上,而点 N 也在对称轴上,所以抛物线上的 M 点必为顶点 $\left(-2,-\frac{16}{3}\right)$.若 CE 为一边,又分两种情况:点 C 平移到抛物线上,或点 E 平移到抛物线上.最终的困难在于如何确定平移的距离,也就是如何抓住已知信息求出 M,N 的坐标?解铃还须系铃人,既然 M,N 是由 C,E 平移所得,那就得从 $C(-4,0),E(0,-3)$ 两点入手——点 C 与点 E 的横坐标相差4、纵坐标相差3(这也是一种平移的观点),所以点 M 与点 N 的坐标之间也符合这样的数量关系,若设点 N 的坐标为 $(-2,n)$,则 M 点的坐标为 $(-2-4,n+3)$ 或 $(-2+4,n-3)$,又因为 M 点的坐标满足函数解析式 $y=\frac{4}{3}x^2+\frac{16}{3}x$,代入求得 $n=13$ 或 $n=19$.

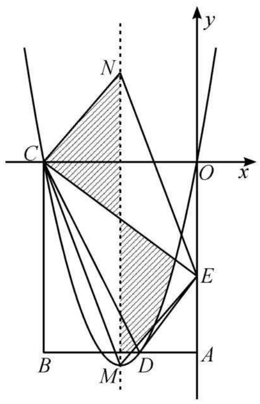

图4

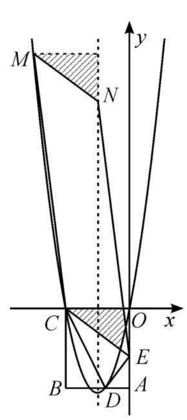

图5

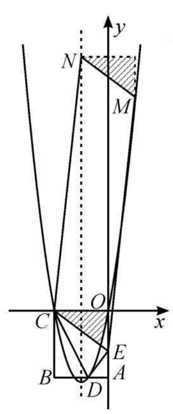

图6

这道题目作为中考试卷的最后一道大题,通过多层设问的方式,为不同层次的学生提供不同的展示与发展平台,遵循中考命题"注重基础,能力立意"的原则,符合现在教育与课程改革的要求.整个题目从运动与变化的角度,通过观察、实验、猜测、计算、推理、验证等活动过程,综合运用直角三角形、矩形、平行四边形、函数、方程等有关内容分析和解

学习心得

决问题，重点考查了计算能力以及分类讨论和数形结合的数学思想. 通过对这道题目的完整分析，想必同学们已经意识到了掌握初中数学的基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验，对于破解中考压轴题有多么重要！

【解答】 (1)由题意知，$CE=CB=5$，$CO=AB=4$，

在 $Rt\triangle COE$ 中，$OE=\sqrt{CE^2-CO^2}=3$.

(2)设 $AD=x$，则 $BD=DE=4-x$.

因为 $OE=3$，

所以 $AE=2$.

在 $Rt\triangle ADE$ 中，由 $x^2+2^2=(4-x)^2$，

解得 $x=\dfrac{3}{2}$，

所以点 $D\left(-\dfrac{3}{2},-5\right)$.

设过点 $C(-4,0)$，$O(0,0)$，$D\left(-\dfrac{3}{2},-5\right)$的抛物线为 $y=a(x-0)(x+4)$，

所以 $-5=a\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}+4\right)$，

解得 $a=\dfrac{4}{3}$.

所以 $y=\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{16}{3}x$.

(3)若 $DP=DQ$，则在 $Rt\triangle DBP$ 与 $Rt\triangle DEQ$ 中，

$\begin{cases}BD=DE\\DP=DQ\end{cases}$，

所以 $Rt\triangle DBP\cong Rt\triangle DEQ$.

所以 $BP=EQ$.

又因为 $EQ=t$，$CP=2t$，$PB=5-2t$，

所以 $5-2t=t$，解得 $t=\dfrac{5}{3}$.

所以，当 $t=\dfrac{5}{3}$时，$DP=DQ$.

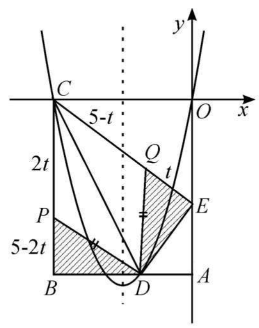

图 7

(4)因为 $y=\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{16}{3}x=\dfrac{4}{3}(x+2)^2-\dfrac{16}{3}$，

所以顶点坐标为$\left(-2,-\dfrac{16}{3}\right)$，对称轴为直线 $x=-2$.

所以可设点 $N(-2,n)$.

①若四边形 $EMCN$ 是平行四边形(CE 为对角线)，

因为点 $C(-4,0)$，$E(0,-3)$，

所以 CE 的中点坐标为$\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$，

即 MN 的中点坐标也为$\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$.

所以 M 点的坐标为$(-2,-3-n)$，

代入解析式 $y=\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{16}{3}x$，求得 $M\left(-2,-\dfrac{16}{3}\right)$.

②若四边形 $ECMN$ 是平行四边形(CE 为边)，

因为点 $C(-4,0)$，$E(0,-3)$，$N(-2,n)$，

学习心得

所以 $M(-2-4,n+3)$,

代入解析式 $y=\frac{4}{3}x^2+\frac{16}{3}x$,

求得 $M(-6,16)$.

③若四边形 $ECNM$ 是平行四边形(CE 为边),

因为点 $C(-4,0)$,$E(0,-3)$,$N(-2,n)$,

所以 $M(-2+4,n-3)$,

代入解析式 $y=\frac{4}{3}x^2+\frac{16}{3}x$,

求得 $M(2,16)$.

综上所述,M 点的坐标为 $\left(-2,-\frac{16}{3}\right)$ 或 $(-6,16)$ 或 $(2,16)$.

【经验分享】 在平行四边形的存在性探究过程中,当 CE 为一边时,求得 $M(-6,16)$ 或 $M(2,16)$,同学们有没有意识到这两个 M 点是抛物线上的对称点呢?

学习心得

第 2 课　破解综合题的前提是基础

第 1 课的压轴题及其分析有没有给同学们启发呢？其实，只要同学们具备扎实的基础知识和基本技能，学会将大题分解为小题，将复杂问题分解为简单问题，将陌生问题分解为常见问题，那就是解决压轴题的有效途径.

例 2　如图 1，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=5$，$BC=12$，对角线交于点 O，$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E、交 BD 于点 F，分别过顶点 B，D 作 AE 的垂线，垂足为 G，H，连接 OG，OH.

(1)补全图形；

(2)求证：$OG=OH$；

(3)若 $OG\perp OH$，直接写出 $\angle OAF$ 的正切值.

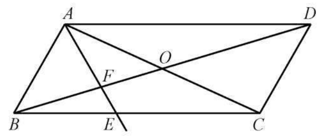

图 1

【分析】　(1)补全图形考查的是学生对已知的理解能力和动手画图能力.

补图并不是简单地添加线条，而是在完善图形关系，因此一定要在审题以后明确补图前的图形基础是什么、补全图形以后又会形成哪些新的位置关系与数量关系.

以本题为例，补图前呈现的就是几何里最基础、最简单的图形关系——角平分线与平行线的组合，如图 2 所示，角平分线＋平行线⇒等腰三角形，并不需要过多的解释.

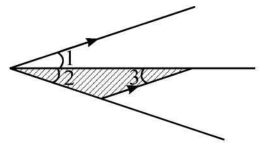

图 2

因为 AE 平分 $\angle BAD$，围绕 $\angle BAD$ 的边有两组平行线 $BE\parallel AD$，$DC\parallel AB$，所以就会形成两个不同的等腰三角形：$\triangle ABE$ 与 $\triangle ADP$（延长 DC 与 AE 的延长线交于点 P），这其实是补图以前应该认识到的，但是实际上后一个等腰三角形容易被同学们忽略，暴露出来的问题还是基础不扎实、考虑问题不全面. 一旦这样的图形基础认识到位了，我们就会明白所作的两条垂线段即为两个等腰三角形各自底边上的高.

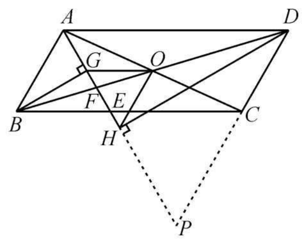

图 3

(2)证明两条线段相等是初中几何推理的基本功.

证明两条线段相等经常采用的是三角形全等、等腰三角形的相关内容、相等线段代换以及圆、锐角三角函数等知识. 继续上面的图形分析，作出 $BG\perp AE$，$DH\perp AE$ 以后，则点 G，H 即为线段 AE，AP 的中点，出现这两个中点并不意外，因为点 O 就是两条对角线 AC，BD 的中点，此时再应用中位线的性质就不难证明 $OG=OH$ 了. 这一问主要是围绕初中几何里的重点基础知识“中点”而展开的.

(3)研究特殊位置关系下的数量关系.

$OG\perp OH$，则说明原来的平行四边形 $ABCD$ 是矩形，已知 $AB=5$，$BC=12$ 就有了用武之地，在(2)的基础上容易求出 $BE=AB=5$，$AE=5\sqrt{2}$，$CE=7$. 而 $\angle OAF$ 的正切值意味着有直角三角形，若作 $CQ\perp AP$ 于点 Q，则 $CQ=EQ=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$，从而 $\tan\angle OAF=\dfrac{CQ}{AQ}=\dfrac{7}{17}$.

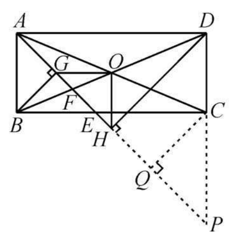

图 4

回顾这道题的分析过程，在连续应用角平分线、平行线、等腰三角形、平行四边形、中位线、矩形、直角三角形的性质后，一道几何综合题就迎刃而解，再一次说明了基础知识对破解综合题的重要性.

学习心得

【解答】 (1)补全图形如图5所示.

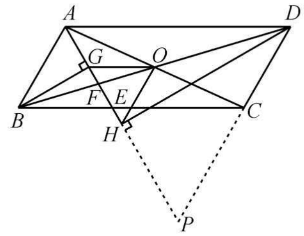

图5

(2)证明:如图5,延长 DC 与 AE 的延长线交于点 P.

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

所以 $AD /\!/ BC, AB /\!/ CD$.

所以 $\angle DAE=\angle AEB, \angle BAE=\angle DPA$.

因为 AE 平分 $\angle BAD$,

所以 $\angle DAE=\angle BAE$.

所以 $\angle BAE=\angle AEB, \angle DAP=\angle DPA$.

所以 $BA=BE, DA=DP$.

又因为 $BG\perp AE, DH\perp AE$,

所以 G 为 AE 中点,H 为 AP 中点.

又因为 O 为 AC 中点,$AD=BC$,

所以 $OG=\frac{1}{2}CE=\frac{1}{2}(BC-BE)=\frac{1}{2}(AD-AB)$,

$OH=\frac{1}{2}CP=\frac{1}{2}(DP-CD)=\frac{1}{2}(AD-AB)$.

所以 $OG=OH$.

(3)若 $OG\perp OH$,则 $\tan\angle OAF=\frac{7}{17}$.

【经验分享】 在证明 $OG=OH$ 时,若不考虑第(3)问的计算功能,还可以利用另一个重要的基础结论"直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半"完成.如图6所示,延长 GO 交 DH 于点 K,围绕 BD 的中点 O 先证明中心对称型全等——$\triangle BOG\cong\triangle DOK$,得点 O 是 Rt$\triangle GHK$ 斜边 GK 的中点.所以 $OH=\frac{1}{2}GK=OG$.

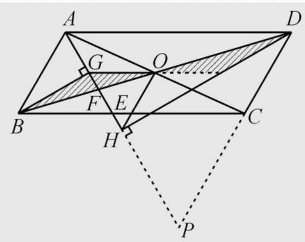

图6

学习心得

第 3 课　辨识基本图形提升破题能力(1)

在综合了代数与几何知识的压轴题里，会着重考查同学们关于代数的运算、变形能力，以及几何的推理、识图能力，这类题的综合性较强，需要同学们具备一定的把控复杂数学问题的能力，掌握相应的数学思想方法. 其中，在代数部分需要综合运用函数、方程、不等式的有关内容来分析和解决问题，在几何部分需要在观察图形的基础上能将复杂图形转化为基本图形，利用几何直观和图形性质逐步分解问题，最终选择有效方法，创造性地解决问题.

而要具备以上所说的分析和解决问题的能力，其中有一点就是牢牢掌握一些常见的基本图形作为自己的破题利器，最需要教给同学们的利器之一就是“一线三等角”模型(又称“K”字形模型)，在多数平面直角坐标系为背景的压轴题里，手握这一宝剑就能无往而不胜.

如图 1 所示，“一线三等角”模型是最常见的综合题的解题工具. 点 C 在线段 BD 上，在线段 BD 的同侧作$\triangle ABC$ 和$\triangle CDE$，若$\angle ACE=\angle ABC=\angle EDC$，则不难由三角形外角的知识证明$\triangle ABC\backsim\triangle CDE$. 特殊地，当 $CA=CE$ 时，则图 2 中的两个三角形$\triangle ABC\cong\triangle CDE$；当点 C 恰好是线段 BD 的中点时，连接 AE，则图 3 中的三个三角形$\triangle ABC\backsim\triangle CDE\backsim\triangle ACE$. 为了更深刻地理解“一线三等角”模型及后续学习的需要，这三个图中三角形的相似、全等的详细证明过程，还是请同学们自己动手实践完成.

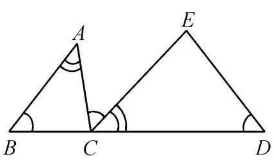

图 1

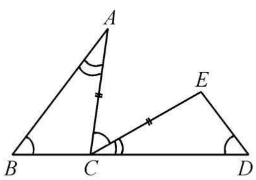

图 2

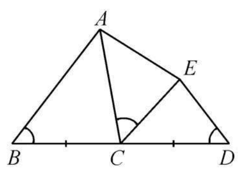

图 3

注：你是否注意到了，在图 3 中除了$\triangle ABC\backsim\triangle CDE\backsim\triangle ACE$ 以外，还有一个意外就是 AC，EC 恰好分别是$\angle BAE$，$\angle DEA$ 的角平分线，为什么呢？请自行思考.

根据图形特征，我们不难想到这一模型总是会与等边三角形、等腰直角三角形、正方形结合起来. 如图 4 所示，在等边三角形的每条边上，两个顶点处的 $60°$角相等，在一条边上任取一点为顶点作一个 $60°$的角，与另两条边相交，即可形成“一线三等角”模型. 同样的，如图 5、图 6 所示，等腰直角三角形的斜边上、正方形的每条边上都可形成这一模型. 当“一线三等角”模型与这些特殊的几何图形结合以后，就可根据相似三角形的性质以及这些特殊图形的性质，展开相关的线段长的计算或角度之间的计算.

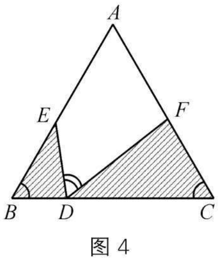

图 4

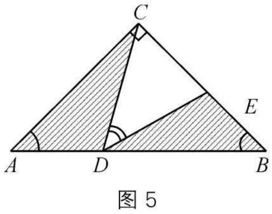

图 5

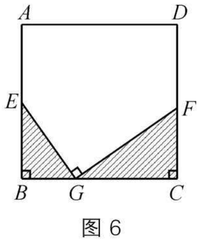

图 6

学习心得

一、几何综合题中模型的应用

例 3 如图 7,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,$AC=BC$,点 D 是 AB 边上的动点,直角 EDF 的两边分别与 AC,BC 交于点 E,F,若 $AD:DB=m:n$,判断 DE 与 DF 的比值,并完成证明.

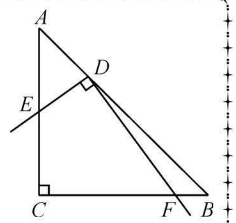

图 7

【分析】 同学们在实际动手做题的过程中,会发现有一些困难,因为我们不容易把已知比值的两条线段 AD,DB 跟问题中的两条线段 DE,DF 联系起来. 其实,由 $\angle EDF=90^\circ$ 以及背景中的等腰直角三角形的特性,可以想到如图 8 那样还原“一线三等角”模型:过点 D 作 $DG\perp AC$ 于点 G,作 $FH\perp DG$ 于点 H,则易证 $\triangle DEG\backsim\triangle FDH$,从而 $\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{DG}{FH}$.

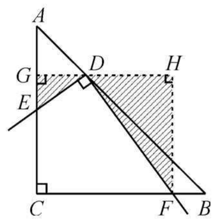

图 8

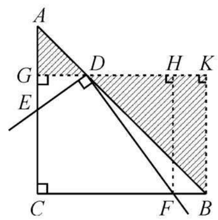

图 9

进一步的,在图 9 中,过点 B 作 $BK\perp DG$ 于点 K,则四边形 $FBKH$ 是矩形. 由于 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,所以 $\triangle ADG$ 与 $\triangle BDK$ 也都是等腰直角三角形,且 $\triangle ADG\backsim\triangle BDK$(其实这也是常见的相似模型),从而 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{DG}{DK}=\dfrac{DG}{BK}=\dfrac{DG}{FH}$,所以 $DE:DF=m:n$. 显然,我们能感觉到通过辅助线 DG,FH 还原模型是问题获得解决的关键因素,相当于利用解题模型为我们搭建起了一个沟通已知与未知之间的有效桥梁.

【解答】 $DE:DF=m:n$. 证明如下:

如图 10,过点 D 作 $DG\perp AC$ 于点 G,作 $FH\perp DG$ 于点 H,过点 B 作 $BK\perp DG$ 于点 K.

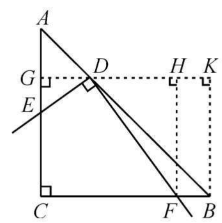

图 10

则 $\angle DGE=\angle DHF=\angle EDF=90^\circ$,$BK\parallel AC$.

因为 $\angle EDH=\angle DGE+\angle DEG$,

即 $\angle EDF+\angle FDH=\angle DGE+\angle DEG$,

所以 $\angle FDH=\angle DEG$,所以 $\triangle DEG\backsim\triangle FDH$,

所以 $\dfrac{DG}{FH}=\dfrac{DE}{DF}$.

因为 $BK\parallel AC$,

所以 $\triangle ADG\backsim\triangle BDK$,所以 $\dfrac{DG}{DK}=\dfrac{AD}{DB}$.

又因为 $\angle DBK=\angle A=\angle ADG=\angle BDK=45^\circ$,四边形 $FBKH$ 是矩形,

所以 $DK=BK=FH$,所以 $\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{m}{n}$.

学习心得

【经验分享】 (1)如图 11,若动点 D 偏向于点 B,则辅助线还可以如图 12 那样添加.

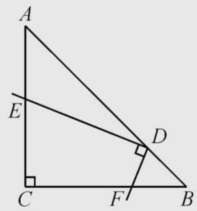

图 11

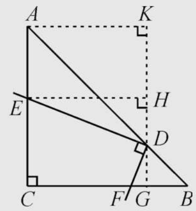

图 12

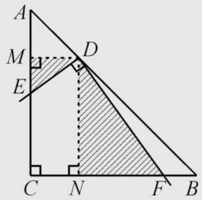

图 13

(2)当然,整个例题的解决也可以不用到"一线三等角"模型,而是像图 13 那样,过点 D 作 $DM\perp AC$ 于点 M,作 $DN\perp BC$ 于点 N,则 $\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{DM}{DN}$,而 $DM=\dfrac{AD}{\sqrt{2}}$,$DN=\dfrac{DB}{\sqrt{2}}$,所以 $\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{m}{n}$. 只是这样一来,问题的解决就属于我们后面将要学习的另一个破解综合题的工具——构造旋转型全等(相似).

(3)为了更好地理解模型在几何综合题中的应用,我们以附录的形式再提供几道压轴题,都属于例 3 的变式考查,所以不提供分析,只给出详尽的解答.

例 3 变式 1　在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,D 为 BC 中点,以 D 为顶点作 $\angle MDN=\angle B$.

(1)如图 14,当射线 DN 经过点 A 时,DM 交 AC 边于点 E,不添加辅助线,写出图中所有与 $\triangle ADE$ 相似的三角形;

(2)如图 15,将 $\angle MDN$ 绕点 D 沿逆时针方向旋转,DM,DN 分别交线段 AC,AB 于 E,F 点(点 E 与点 A 不重合),不添加辅助线,写出图中所有的相似三角形,并证明你的结论;

(3)在图 15 中,若 $AB=AC=10$,$BC=12$,当 $\triangle DEF$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积的 $\dfrac{1}{4}$ 时,求线段 EF 的长.

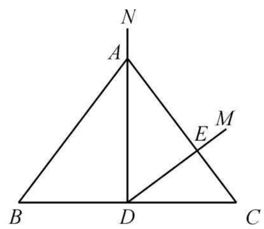

图 14

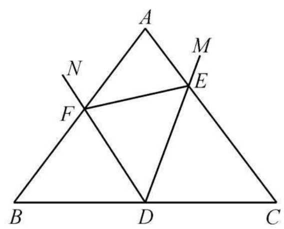

图 15

【解答】 (1)图 14 中与 $\triangle ADE$ 相似的三角形有 $\triangle ABD$,$\triangle ACD$,$\triangle DCE$.

(2)$\triangle BDF\backsim\triangle CED\backsim\triangle DEF$,证明如下:

因为 $\angle FDC=\angle EDF+\angle EDC=\angle B+\angle BFD$,$\angle EDF=\angle B$,

所以 $\angle BFD=\angle EDC$,

由 $AB=AC$ 得 $\angle B=\angle C$,

所以 $\triangle BDF\backsim\triangle CED$,

所以 $\dfrac{BD}{CE}=\dfrac{DF}{ED}$,即 $\dfrac{BD}{DF}=\dfrac{CE}{ED}$,

因为 $BD=CD$,

学习心得

所以$\frac{CD}{DF}=\frac{CE}{ED}$,

又因为$\angle C=\angle EDF$,

所以$\triangle CED\backsim\triangle DEF$,

所以$\triangle CED\backsim\triangle DEF\backsim\triangle BDF$.

(3)如图 16,连接 AD,作 $DG\perp EF$ 于点 G,$DH\perp AB$ 于点 H.

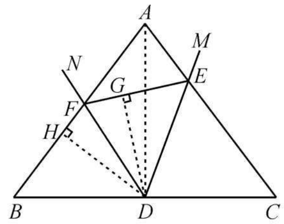

图 16

因为 $AB=AC$,D 为 BC 中点,

所以 $AD\perp BC$,$BD=\frac{1}{2}BC=6$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中,$AB=10$,$BD=6$,由勾股定理,得 $AD=8$.

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=2\times\frac{1}{2}AB\cdot DH=48$,

所以 $DH=\frac{24}{5}$.

由(2)知$\triangle BDF\backsim\triangle DEF$,

所以$\angle BFD=\angle DFE$,

即 FD 是$\angle BFE$ 的平分线,

所以 $DG=DH=\frac{24}{5}$.

又因为 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=12=\frac{1}{2}\times EF\times DG$,

所以 $EF=5$.

例 3 变式 2 已知矩形 $ABCD$ 的一条边 $AD=8$,将矩形 $ABCD$ 折叠,使得顶点 B 落在 CD 边上的 P 点处.

(1)如图 17,已知折痕过点 A、与边 BC 交于点 O,连接 AP,OP,OA.

①求证:$\triangle OCP\backsim\triangle PDA$;

②若$\triangle OCP$ 与$\triangle PDA$ 的面积比为 $1:4$,求边 AB 的长;

(2)若图 17 中的点 P 恰巧是 CD 边的中点,求$\angle OAB$ 的度数;

(3)如图 18,在(1)条件下,擦去折痕 AO、线段 OP,连接 BP.动点 M 在线段 AP 上(点 M 与点 P,A 不重合),动点 N 在线段 AB 的延长线上,且 $BN=PM$,连接 MN 交 PB 于点 F,作 $ME\perp BP$ 于点 E.试问:点 M,N 在移动过程中,线段 EF 的长度是否发生变化?若变化,说明理由;若不变,求线段 EF 的长度.

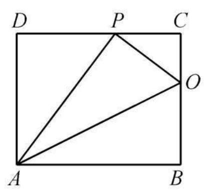

图 17

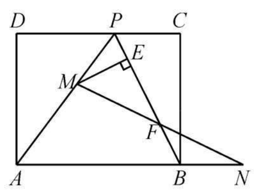

图 18

【解答】 (1)①因为四边形 $ABCD$ 是矩形,

所以$\angle C=\angle D=90^\circ$,

因为$\triangle AOP$ 是由$\triangle AOB$ 沿 AO 折叠得到,

所以$\angle APO=\angle B=90^\circ$,

所以$\angle APO+\angle CPO=\angle ADP+\angle DAP$,

学习心得

所以$\angle CPO=\angle DAP$，
所以$\triangle OCP\backsim\triangle PDA$.
②因为$\triangle OCP\backsim\triangle PDA$，
所以$\frac{S_{\triangle OCP}}{S_{\triangle PDA}}=\left(\frac{CP}{AD}\right)^2=\frac{1}{4}$，
所以$\frac{CP}{AD}=\frac{1}{2}$，
因为$AD=8$，
所以$CP=4$，
设$AB=x$，则$AP=CD=x$，$DP=x-4$，
在$\mathrm{Rt}\triangle PDA$中，根据勾股定理，由$(x-4)^2+8^2=x^2$
解得$x=10$，即$AB=10$.
(2)因为$\triangle AOP$是由$\triangle AOB$沿AO折叠得到，
所以$AP=AB=CD$，$\angle OAP=\angle OAB$，
因为点P是CD边的中点，
所以$DP=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AP$，
所以在$\mathrm{Rt}\triangle PDA$中，$\sin\angle DAP=\frac{DP}{AP}=\frac{1}{2}$，
所以$\angle DAP=30°$，
所以$\angle OAB=\angle OAP=\angle DAP=30°$.
(3)线段EF的长度不变.理由如下：
如图19，作$MG/\!/AB$交PB于点G，则$\angle MGP=\angle ABP$，$\angle MGF=\angle NBF$.
因为$AB=AP$，
所以$\angle ABP=\angle APB$，
所以$\angle MGP=\angle APB$，
所以$MG=MP$.
因为$MP=BN$，
所以$MG=BN$，
又因为$\angle MFG=\angle NFB$，
所以$\triangle MGF\cong\triangle NBF$，
所以$FG=FB$.
因为$ME\perp PB$，
所以$EP=EG$，
所以$EF=EG+FG=\frac{1}{2}PB$.

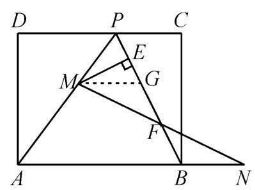

图 19

在(1)的条件下，$CP=4$，$PB=\sqrt{CP^2+BC^2}=4\sqrt{5}$，
所以$EF=2\sqrt{5}$为定值.