考研数学

24 堂课

主　编　杨　超　方　浩　姜晓千

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

前　　言

本书是长期在一线从事考研数学辅导的教师为广大备战考研学生量身定做的基础复习用书。

每一届学生备战考研的时间一般分为两种：一种是启动时间比较早，在大三上学期就确定考研目标，并着手准备；一种是大三下学期才开始准备。每年的十一月份左右我们都会开设数学导学班（部分城市会开基础班），发现有一些问题学生很困惑，比如：

（1）基础阶段是夯实数学基础的关键时期，可以借助本科课本来复习，但考研大纲的要求是什么？

（2）考生独立看书过程中，会遇到很多不易理解的概念、性质、定理，该怎么解决？

（3）数学离不开做题，但除了完成课本后的相关习题，还需要做哪些相应的习题？

……

在平时的教学过程中，我们一直在思考和探索：面对浩如烟海的习题、各种抽象的概念和定理，怎样在有限的时间里，让学生摆脱数学给人留下的枯燥和无聊的印象，给学生一种新的理念和思想？并让他们在这种理念下学会主动学习，感受高等数学的乐趣？如何能够掌握考试内容的精髓，做到由此及彼，举一反三？如能解决这些问题，学生不仅能学好数学，还可以提升自己的学习能力，这正是一个准研究生的基本素质。

为了实现这个目标，在多年的教学和总结的基础上，我们编写了这本《考研数学24堂课》。本书共24课，包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三个版块。每课分为五部分：

第一部分为知识结构网络图，清晰呈现知识脉络。

第二部分为基本内容讲解，即对考纲要求的考点进行梳理。

第三部分为重点、难点、易错点讲解，考生在学习过程中，容易由于对基本概念、定理理解得不深，逻辑推理不严密，没有理解公式的本质等原因，而出现

一些典型错误，我们将其归纳和整理，以帮助学生澄清模糊概念，排除思维障碍。本部分的写作语言活泼生动，娓娓道来，例如，求极限的三种常见的方法——等价无穷小替换、洛必达法则和泰勒公式，我们分别用三种交通工具——大巴车、普通火车和高铁来形容，让学生很容易理解它们的优势与劣势。

第四部分为典型例题，详细讲解了每章内容中的典型例题的解题方法与技巧，并且我们的例题还分基础阶段和强化阶段，学生可以根据自己的学习情况选择在不同的阶段使用。

第五部分是真题赏析，我们选择了 1987 年以来的部分真题，之所以选择这么多年的真题，一是可以通过做题检查自己的学习效果，二是在做真题的过程中可以了解命题的规律。

由于编者自身水平和编写时间有限，书中不妥和疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正，同时欢迎广大考研学子和作者交流：

新浪微博：http：//weibo. com/chaoyu666（杨超 Math）

http：//weibo. com/u/1848595875（晓千老师）

http：//weibo. com/u/2262109970（方浩 Fellow）

作　者

2017 年春于北京

目　　录

第一部分
高等数学

第1课　函数、极限与连续

知识网络结构图

- 函数、极限与连续
  - 形式
    - 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$
    - $\Downarrow$ 归结原则
    - 函数极限 $\lim\limits_{x\to\square} f(x) = A$
  - （$x\to\square$ 有 6 种形式，$x\to\infty,+\infty,-\infty,x\to x_0,x_0^+,x_0^-$）
  - 概念（$\varepsilon-N,\varepsilon-\delta$ 语言）
  - 性质
    - 唯一性
    - 局部有界性
    - 局部保号性
    - 四则运算
  - 存在准则
    - 单调有界数列有极限
    - 夹逼准则
  - 运用 $\downarrow$
  - 两个重要极限
    - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
    - $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$
  - 关系定理
    - 单侧极限与双侧极限
    - 函数极限与数列极限
    - 函数极限与无穷小
    - 无穷大与无穷小
  - 无穷小
    - 概念
    - 性质
    - 阶的比较
  - 连续
    - 定义
    - 间断点分类
      - 第Ⅰ类间断点
        - 可去
        - 跳跃
      - 第Ⅱ类间断点
        - 振荡
        - 无穷
    - 闭区间上连续函数的性质

基本内容讲解

1. 极限概念

不少考生觉得极限概念很抽象，难以理解，这是因为极限的概念本身描述的是一个动态过程，而人的认识能力倾向于静态；其次，极限是一个无穷运算，而人的习惯倾向于具体、有穷的计算.

每个极限都由四句话组成，见表 1－1－1.

表 1－1－1

记号	∀	∃	当自变量满足	恒成立	则称
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\xi>0$	$\delta>0$	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$以 A 为极限
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$	$\xi>0$	$\delta>0$	$0<x_0-x<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	$f(x)$在 x_0 的左极限为 A
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$	$\xi>0$	$\delta>0$	$0<x-x_0<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	$f(x)$在 x_0 的右极限为 A
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	$\xi>0$	$X>0$	$\lvert x\rvert>X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	当 $x\to\infty$时，$f(x)$以 A 为极限
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	$\xi>0$	$X>0$	$x>X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	当 $x\to+\infty$时，$f(x)$以 A 为极限
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$	$\xi>0$	$X>0$	$x<-X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	当 $x\to-\infty$时，$f(x)$以 A 为极限
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$	$\xi>0$	自然数 N	$n>N$	$\lvert x_n-A\rvert<\xi$	当 $n\to\infty$时，x_n 以 A 为极限

2. 基本性质

(1)唯一性

若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)$存在，则极限唯一.

(2)局部有界性

若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$，则存在 $\mathring{U}$，在 $\mathring{U}$ 内有界.

(3)不等式性质

若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=B$.

①如果 $A>B$，则 $\exists\mathring{U}$，当 $x\in\mathring{U}$ 时，$f(x)>g(x)$；

②如果在 $\mathring{U}$ 中$f(x)\geqslant g(x)$，则 $A\geqslant B$.

(4)保号性

若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A>0$，则 $\exists\mathring{U}$，当 $x\in\mathring{U}$ 时，$f(x)>0$($A<0$ 有类似结论)；或当 $x\in\mathring{U}$ 时，$f(x)>0$，则 $A\geqslant 0$.

3. 存在准则

(1)单调有界准则

①若数列 x_n 单增且有上界(即 $x_{n+1}\geqslant x_n$，并对 $\forall n$，都有 $x_n\leqslant M$)，则$\{x_n\}$收敛.

②若数列 x_n 单减且有下界(即 $x_{n+1}\leqslant x_n$,并对 $\forall n$,都有 $x_n\geqslant M$),则 $\{x_n\}$ 收敛.

【注】以递推形式出现的数列极限问题经常用此定理证明.

(2)夹逼准则

$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=\lim\limits_{x\to\square} h(x)=A$,又 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,则 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$.

(3)极限与单侧极限关系

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

(4)数列与子数列极限的关系

数列$\{x_n\}$收敛$\Leftrightarrow\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$收敛.

经常这样使用:$\lim\limits_{x\to\infty} x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1}=a$.

(5)海涅定理(归结原则)

设$f(x)$在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有定义,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在$\Leftrightarrow$对任何以 x_0 为极限的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$,$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ 存在.

【注】该定理常用来否定函数极限存在,若能找出 $x_n\to x_0$,$y_n\to x_0$,$f(x_n)=A$,$f(y_n)=B$,但 $A\neq B$,可以说函数极限不存在.

例如,证明$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

【证明】取 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\pi^2\sin n\pi=0$,

取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\pi^2\to\infty$,故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

4. 两个重要极限及推广

①$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,推广为:$\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$.

②$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,

推广为:$\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$.

5. 极限的运算

(1)极限的四则运算

设$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=B$,则

$\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to\square} f(x)\pm\lim\limits_{x\to\square} g(x)=A\pm B$,

$$\lim_{x\to\square}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to\square}f(x)\cdot\lim_{x\to\square}g(x)=A\cdot B,$$

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\square}f(x)}{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

(2)复合运算(连续函数)

$\lim\limits_{x\to\square}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to\square}g(x))$,其中$f(x)$为连续函数.

(3)幂指函数的极限

如果$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A(A>0)$,$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=B$,且$A$,$B$均为有限常数,则

$$\lim_{x\to\square}f(x)^{g(x)}=\left[\lim_{x\to\square}f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}=A^B.$$

【证明】 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to\square}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}[g(x)\ln f(x)]}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to\square}\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\ln\left[\lim\limits_{x\to\square}f(x)\right]}=e^{B\ln A}=A^B.$

> **【注】** 当A,B不是有限常数,或A不大于0时,上述命题不成立.

切记,幂指函数求极限时,$x\to\square$是**同一变化过程**,不能分开来求极限.例如,求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$.

很多同学容易犯这样的错误:因为$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=e^2$,所以原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^2-e^2}{x^2}=0$.正确做法见后面例题.

6. 函数、极限、无穷小关系定理

$$\lim_{x\to\square}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$$

$\alpha(x)$为$x\to\square$时的无穷小.

> **【注】** 该定理在计算有关极限题时作用很大,尤其是遇到有关抽象函数时,使用该定理,可以把抽象函数具体化.
>
> 例如,$\lim\limits_{x\to\infty}x_ny_n=0$,则下列说法正确的是( ).
>
> A. 若x_n发散,则y_n必发散　　B. 若x_n无界,则y_n必有界
>
> C. 若x_n有界,则y_n必为无穷小　　D. 若$\frac{1}{x_n}$为无穷小,则y_n必为无穷小
>
> **【解】** 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,由上述定理可得$x_ny_n=0+\alpha(n)$,其中$\alpha(n)$为当$n\to\infty$时的无穷小量.故$y_n=\frac{1}{x_n}\alpha(n)$,即$y_n$为无穷小量,故选D.

7. 无穷小量、无穷大量及其阶(见表 1—1—2 和表 1—1—3)

表 1—1—2

无穷小量	$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=0$	关系	$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$
无穷大量	$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=\infty$		$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{1}{g(x)}=0$

表 1—1—3

比值		定义	记号
$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$=0$	$f(x)$是比 $g(x)$高阶无穷小	$f(x)=o[g(x)]$
	$=A\neq 0$	$f(x)$是 $g(x)$的同阶无穷小	
	$=1$	$f(x)$与 $g(x)$是等价无穷小	$f(x)\sim g(x)$
$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=A\neq 0$		$f(x)$是 $g(x)$的 k 阶无穷小	$f(x)=o[g^k(x)]$

(1)无穷小量的性质

①有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

②有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

③无穷小量与有界量的乘积仍是无穷小量.

(2)等价无穷小量的替换定理

设 $x\to x_0$ 时,$\alpha(x)$,$\beta(x)$,$\tilde{\alpha}(x)$,$\tilde{\beta}(x)$都是无穷小量,且 $\alpha(x)\sim\tilde{\alpha}(x)$,$\beta(x)\sim\tilde{\beta}(x)$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tilde{\alpha}(x)}{\beta(x)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\tilde{\beta}(x)}f(x)$.

【注】等价无穷小量代换用在乘、除法(整个式子,而不是部分式子)中,而加、减法中不能用等价无穷小去替换.

(3)熟记几个常见的等价无穷小公式

当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$\arcsin x\sim x$,$\arctan x\sim x$,$e^x-1\sim x$,$\ln(1+x)\sim x$,$a^x-1\sim x\ln a$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

【注】一定要把公式广义化,而且常见的变形要学会,例如,当 $x\to 0$ 时,$f(x)\to 0$,那么$\ln(1+f(x))\sim f(x)$;当 $x\to 0$ 时,$f(x)\to 1$,$\ln f(x)=\ln(1+\boxed{f(x)-1})\sim\boxed{f(x)-1}$.一般来说,考题不会直接考.当 $x\to 0$ 时,$e^x-1\sim x$,经常以"$e^{f(x)}-e^{g(x)}$"形式出现,具体见后面例题讲解.

(4)无穷小阶的运算规律

设 m,n 为正整数，则

①$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l)$，$l=\min\{m,n\}$，在极限的加减运算中，高阶无穷小被低阶无穷小所吸收，戏称"吸星大法".

②$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$，$x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$.

③$m\geqslant n$，$o(x^m)/x^n=o(x^{m-n})$(注：两个 $o()$ 不可以相除).

④$k\cdot o(x^m)=o(kx^m)=o(x^m)$，$k\neq 0$，为常数.

重点、难点、易错点讲解

1. 几个判别函数有界和无界的结论

①连续函数在闭区间上一定有界.

②函数在开区间 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则函数在区间 (a,b) 内有界.

③有界变量与无穷大量之和为无穷大量.

④两个正无穷大量之和与积均是无穷大量.

⑤函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界的充要条件是存在一个数列 $\{x_n\}$，$x_n\in I$，使 $\{f(x_n)\}$ 为无穷大数列.

考生自练：①$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在区间(　　)内有界.

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

②当 $x\to 0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是(　　).

A. 无穷小　　B. 无穷大

C. 有界的，但不是无穷小　　D. 无界的，但不是无穷大

2. 求极限的常见错误

①求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right]$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+n)^2}=0+0+\cdots+0=0$.

②求极限 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

③设 $x_n\geqslant 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

【证明】 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}\cdot\sqrt{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=a=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$,

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

①,②,③的解法为经典的错误,错误的原因在于没有正确理解极限的四则运算法则.极限四则运算法则是针对有限项求和的,而题①是无穷多项求和.②和③的错误在于使用法则的前提是$f(x)$,$g(x)$的极限存在.

3.在等价无穷小替换求极限时,要注意并不是任何两个无穷小量都可进行比较

例如,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}$时,常见错误为:

当$x\to 0$时,$\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)\sim x^2\sin\dfrac{1}{x}$这个结论是不成立的,因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\sin\dfrac{1}{x}}$没有意义.

在$x=0$点的任意小的去心邻域,当$x_n=\dfrac{1}{n\pi}$时,分母$x^2\sin\dfrac{1}{x}$能取到零值.正确解法应使用夹逼准则.因为$\left|\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)\right|\leqslant\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant x^2$,

故$0<\left|\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}\right|\leqslant\left|\dfrac{x^2}{x}\right|=|x|\to 0$,从而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}=0$.

4.求极限$\lim\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}$时,要注意在自变量$x$的变化过程中$f(x)$是否趋于零.若是,才有$\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$

求极限:①$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$; ②$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan x}$.

错误解法:①$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$; ②$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan x}=3$.

①中的自变量x趋向于无穷,这时,$\dfrac{\sin x}{x}$中的x趋向于无穷而不是零,故不能使用公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

②中的自变量x趋向于π,这时,$\sin 3x$不等价于$3x$,$\tan x$也不等价于x,故不能使用

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3x}{\tan x}=1\times 3=3.$$

正确解法:

①根据无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小，知$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$.

②$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\tan x}\xlongequal{令t=x-\pi}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 3(t+\pi)}{\tan(t+\pi)}=-\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{\tan t}=-3$.

5. 利用等价无穷小代换需要注意的问题

利用等价无穷小的性质，求下列极限：

①$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$；　②$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

常见错误：

①当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，故$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$.

②原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$.

错误分析：

①先证明一个命题：

若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$，

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=k\neq 1，则\ \alpha-\beta\sim\alpha'-\beta'；$$

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=k\neq -1，则\ \alpha+\beta\sim\alpha'+\beta'.$$

即等价无穷小代换用在加减法时需满足的条件.

因为$\lim\frac{\alpha'-\beta'}{\alpha-\beta}=\lim\frac{\frac{\alpha'}{\beta}-\frac{\beta'}{\beta}}{\frac{\alpha}{\beta}-1}=\lim\frac{\frac{\alpha'}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta'}{\beta}}{\frac{\alpha}{\beta}-1}=\frac{1\cdot k-1}{k-1}=1$，

所以 $\alpha-\beta\sim\alpha'-\beta'$.

此题，记 $\alpha=\tan x$，$\beta=\sin x$，$\alpha'=\beta'=x$，

因为$\frac{\tan x}{\sin x}=1$，所以得不到 $\tan x-\sin x$ 与 $x-x$ 等价的结论.

②当 $x\to 0$ 时，尽管无穷小 $\sqrt{1+x\sin x}-1$ 与无穷小 $\sqrt{1+x^2}-1$ 等价，但将式子 $\sqrt{1+x\sin x}-1$ 中的 $x\sin x$ 代换成与之等价的无穷小 x^2 却是没有定理保证的.

必须先证明结论：$\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\sqrt{1+x^2}-1$.

正确解法：

①$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$；

②$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

6. 在同一极限下应避免分次求极限

例：求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

错误解法：因为$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，所以，原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e}{x}=0$.

错误分析：此题中分子、分母中的 x 是同一个自变量，取极限时应属于同一极限过程，也就是说，二者是同步进行的，上述错误解法中是先求分子中的极限，然后再求分母的极限，这样就成为两个独立的过程，不是同步的.

正确解法：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1\right]}{x}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}{x}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{e}{2}.$$

7. 洛必达法则

设①$\lim\limits_{x\to \square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}\left(或\dfrac{\infty}{\infty}\right)$；

② $\exists \mathring{U}$，当 $x\in\mathring{U}$ 时，$f'(x)$，$g'(x)$都存在，且 $g'(x)\neq 0$；

③$\lim\limits_{x\to \square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或$\infty$)；

则$\lim\limits_{x\to \square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或$\infty$).

考生在使用洛必达法则计算过程中，应论证是否满足洛必达法则的条件，尤其是③，在已知极限反求待定参数的题中，应该对洛必达法则 慎用 . 仔细阅读下面两道题.

【例 1】已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{c\cdot x^k}=1$，则 $c=$________，$k=$________.

【解】 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{c\cdot x^k}\xlongequal{洛必达}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{c\cdot k\cdot x^{k-1}}$$

$$\xlongequal{洛必达}\lim_{x\to 0}\frac{-3\sin x+9\sin 3x}{c\cdot k\cdot (k-1)x^{k-2}}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{-3\cos x+27\cos 3x}{c\cdot k(k-1)(k-2)x^{k-3}}=1,$$

又$\lim\limits_{x\to 0}(-3\cos x+27\cos 3x)=24$，

故$\lim\limits_{x\to 0}c\cdot k\cdot(k-1)\cdot(k-2)x^{k-3}=24$.

所以 $k-3=0$，$c\cdot k\cdot(k-1)\cdot(k-2)=24\Rightarrow k=3$，$c=4$.

【例 2】已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则 $a=$________，$b=$________.

【解】 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-a-2bx}{2x}=2, \qquad ①$$

从①式推出 $a=1$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1-2bx}{2x}=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2(1+x)}-b\right]=-\frac{1}{2}-b, \qquad ②$$

因$-\dfrac{1}{2}-b=2\Rightarrow b=-\dfrac{5}{2}$.

【注】例 1 使用洛必达法则是不对的. 因为法则的条件是 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在，才有$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$，而由题中$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，推不出$\lim\dfrac{f'''(x)}{g'''(x)}=1$. 而例 2 使用洛必达法则是正确的. 与例 1 的最大区别为例 2 中的①式的极限为$-\dfrac{1}{2}-b$，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在，于是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$，请读者好好体会.

典型例题

1. 函数极限

在讲解求函数极限的方法之前，在这提出一组概念：假未定型与真未定型.

设$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=B$，则：

$$①\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{A}{B}, & A\text{ 为常数}, B\text{ 为常数且 }B\neq 0,\\ 0, & A\text{ 为常数}, B=\infty,\\ \infty, & A=\infty, B=0,\\ \dfrac{0}{0}, & A=0, B=0,\\ \dfrac{\infty}{\infty}, & A=\infty, B=\infty.\end{cases}$$

②$\lim\limits_{x\to\square} f(x)g(x)=\begin{cases}AB, & A\text{ 为常数},B\text{ 为常数},\\ \infty, & A\text{ 为常数},\text{且 }A\neq 0,B=\infty,\\ 0\cdot\infty, & A=0,B=\infty.\end{cases}$

③$\lim\limits_{x\to\square}(f(x)-g(x))=\begin{cases}A-B, & A\text{ 为常数},B\text{ 为常数},\\ \infty, & A,B\text{ 中有一个是常数,另一个是无穷大},\\ \infty, & A,B\text{ 为异号无穷大},\\ \infty-\infty, & A,B\text{ 为同号无穷大}.\end{cases}$

④$\lim\limits_{x\to\square} f(x)^{g(x)}=\begin{cases}A^B, & A\text{ 为常数},\text{且 }A>0,B\text{ 为常数},\\ 1^\infty, & A=1,B=\infty,\\ 0^0, & A=0,B=0,\\ \infty^0, & A=\infty,B=0,\\ 0, & A=0,B=+\infty,\\ +\infty, & A=0,B=-\infty.\end{cases}$

未定型是不符合极限运算(四则运算、复合函数、幂指函数等)的条件的,故不能直接代入公式计算,但却是学习的重点,而从上述中可以看出,真未定型指的就是"$\frac{0}{0}$","$\frac{\infty}{\infty}$","$0\cdot\infty$","$\infty-\infty$","∞","∞^0","0^0"这 7 种,假未定型虽然不满足极限运算的条件,但它们的结论是确定的.

例如,$\lim\limits_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x^2}}$不是未定型,因为 $x\to\infty$时,$e^{\frac{1}{x^2}}\to 1$,因此$\lim\limits_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x^2}}=\infty$,千万不要画蛇添足写为$\lim\limits_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{\frac{1}{x^2}}}{x}=0$.

2. 极限计算的基础题——7 种未定型

方法 1:等价无穷小代换

方法 2:洛必达法则

使用洛必达法则的注意事项:

①"$\frac{0}{0}$","$\frac{\infty}{\infty}$"型的极限可以直接使用法则,但并非所有的"$\frac{0}{0}$","$\frac{\infty}{\infty}$"型的极限都可以用法则,如$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}$等,其余 5 种要转变为"$\frac{0}{0}$","$\frac{\infty}{\infty}$"型才可使用.

②法则使用前后要使用"等价无穷小"和"去非零因子"去化简和整理.

③条件是结论成立的充分条件,而非必要条件,即$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在,不能判定$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}$不存在,要改用其他方法去计算.