И·В·普罗斯库烈柯夫
线性代数习题集解答

第一册

戈衍三　编演

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

И·В·普罗斯库烈柯夫
线性代数习题集解答

第一册

戈衍三　编演

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书编选了行列式、线性方程组、矩阵和二次型、向量空间及其线性变换、群、环、域、模、仿射空间等方面的习题共1938道,并附有解答. 不少题目是名家提供的,有些题目比较新颖,证明题较多. 可供高等院校设置线性代数课程的专业的师生教学时参改.

图书在版编目(CIP)数据

И·В·普罗斯库烈柯夫线性代数习题集解答. 第一册/戈衍三编演. —北京:北京理工大学出版社,2018.8

ISBN 978-7-5682-6039-8

Ⅰ.①И…　Ⅱ.①戈…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-习题集　Ⅳ.①O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第173922号

出版发行/北京理工大学出版社有限责任公司

社　　址/北京市海淀区中关村南大街5号

邮　　编/100081

电　　话/(010)68914775(总编室)

(010)82562903(教材售后服务热线)

(010)68948351(其他图书服务热线)

网　　址/http://www.bitpress.com.cn

经　　销/全国各地新华书店

印　　刷/保定市中画美凯印刷有限公司

开　　本/787毫米×1092毫米　1/16

印　　张/23.75　　责任编辑/李炳泉

字　　数/550千字　　文案编辑/孟祥雪

版　　次/2018年8月第1版　2018年8月第1次印刷　　责任校对/周瑞红

定　　价/40.00元　　责任印制/王美丽

出 版 说 明

［苏］И · В · 普罗斯库烈柯夫著《线性代数习题集》一书的中译本，自 1981 年 12 月在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响. 凡从事线性代数教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握线性代数基本知识和基本技能的一项重要手段. 三十多年来，此书对我国线性代数的教学工作是甚为有益的.

该书习题数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大，涉及的内容有行列式、线性方程组等方面. 不少题目是名家提供的，有些题目比较新颖，证明题较多，且难度大. 当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答. 有鉴于此，我们特约作者，将全书习题的解答尽可能详尽地给出，以供参考. 书中难免存在疏漏之处，希望得到广大读者批评指正，以提高我们的认识能力和学习数学的兴趣.

《线性代数习题集》序言摘要

作者在编写这本习题集时，力图：

第一，提供足够数量的练习题，以培养学生解典型习题的技能(例如，计算数值元素的行列式，解数值系数的线性方程组，等等)；

第二，提供有助于阐明基本概念及其相互联系的习题(例如，矩阵性质和二次型性质之间的联系，以及矩阵性质和线性变换性质之间的联系)；

第三，提供一组能够补充课堂教学并有助于扩大学生的数学眼界的习题(例如，斜对称行列式的 Pfaffian 的性质，相伴矩阵的性质等等).

本书也提供了一些涉及定理证明的习题，这些定理可见诸教科书，之所以收编这些习题是因为教师常常(由于时间不够)在教科书的基础上将一部分材料作为学生的家庭作业，而这恰恰可根据本习题集来作，因为它提供了完成证明的提示. 作者认为这将有助于学生养成科学研究的习惯.

同其他习题集比较起来，本书有一些新的基本的特点，即：包含了涉及多项式矩阵的习题(§13)仿射空间和度量空间的线性变换的习题，§18 和 §19，以及关于群、环和域的补充. 这一补充中的习题涉及该理论的最基本部分. 因而，我认为，这一部分的习题可用于第一、第二学年学习中的课堂讨论.

讲授的内容和顺序主要取决于讲授者. 作者曾考虑到讲授方法的这种不同，结果书中出现了一定数量的重复. 例如，同样的事实，先是在二次型一节中给出，然后又在线性变换一章中给出；有一些习题是这样叙述的：既可以在实欧几里得空间中解这些习题，也可以在复酉空间中解这些习题. 我相信，这将很有助于灵活地使用本习题集.

由于现有教科书中使用的某些定义、术语和符号不完全统一，因此有些章节包含了引言，这些引言包括某些定义和关于术语和符号的简短讨论，但第五节的引言例外. 在这一节的引言里介绍了计算任何阶行列式的基本方法，并对每种方法作了举例说明. 这样做是因为普通教科书通常对此不予介绍，而学生在这方面又常常感到很困难.

在编写本书过程中，作者采用了国立莫斯科大学高等代数教研室成员提出的有益意见，谨向他们表示深切的谢意.

И·В·普罗斯库烈柯夫

1978.5.20　莫斯科

序

线性代数是代数学的重要分支之一. 线性函数是线性代数的研究对象. 历史上线性代数的第一个问题是求解线性方程组. 从线性代数的研究对象必然会导致对矩阵的研究. 矩阵论是线性代数中重要而且不可缺少的部分,它在提出与解决线性代数的问题中起着工具性的作用. 几何学,特别是解析几何学的研究需要发展线性代数. 采用向量的概念,将通常的几何空间推广到 n 维向量空间,使解析几何和线性方程组的理论显得特别简单和清楚. 为进一步地推广 n 维向量空间而引进一般的线性空间的概念是自然的和有益的. 这种广义空间的元素可以是任意的数学对象或物理对象. 高等代数中线性代数部分介绍的内容及其进一步的理论,就其应用的重要性和广泛性来说,是第一位的,很难指出在数学、理论力学或理论物理等学科以及科学技术中,有不用到线性代数的结果和方法的. 例如,线性代数对于泛函分析的发展就起着决定性的影响.

高等代数就其内容来说不同于几何和数学分析. 几何和数学分析是在实数范围内讨论问题的,而高等代数基本上是在任意数域上讨论其各种问题的. 高等代数不同于几何和数学分析的另一个特点是方法的不同. 代数方法,即对不同对象的代数运算及其性质的讨论和研究的方法,是高等代数最重要的主题. 例如,多项式、矩阵、线性变换等的加法与乘法及其性质的研究和讨论几乎贯穿高等代数的始末,是高等代数研究的中心问题. 高等代数还有一个重要的思想方法,即利用等价分类并从每个等价类中寻求适当的代表元的方法. 例如,矩阵的秩、矩阵按相似或合同分类、解线性方程组、求二次型的各种标准形、线性空间的同构以及矩阵和 λ 矩阵在各种不同分类中求标准形的问题等,都属于这种情况. 当然,从根本上说,这种思想方法不仅在代数而且在其他的数学学科,甚至在任何科学领域中都要频频涉及,然而在高等代数中,这种思想方法的特点尤为明显和突出,并几乎贯穿于高等代数的所有内容之中.

戈衍三老师运用他的数学基础功底,认真作了著名教材[苏]И・В・普罗斯库烈柯夫著《线性代数习题集》的习题,将此习题集题解出版以助大学生学习线性代数是很有意义的事.

我因年老多病,此序言请戈先生代笔,内容可能较多是读者已熟悉的,希望大家在看此书的同时,也学习戈先生刻苦钻研的精神!

王世强

2013 年 2 月 2 日于北京师范大学

“序”的补言

王世强老先生请戈衍三先生代笔写的序言真实、明瞭、易懂,外加王世强言真意切的重要结尾语构成了一个好序言,但戈先生依自己体会告我言,王老有意在“序”中再深入补言几句为好！体现王老意图很难！因我是一名科技工作者,不懂深入的数学内容和前沿,为了贯彻王老意图,只能勉为其难简单表达如下：

1. 数学是研究形和数的科学,虽不属于自然科学领域,但数学的发展永远代表人类概括、抽象严格思维能力和解决复杂问题的进步进化,是人类智慧进步的重要组成,值得重视和珍惜!

2. 无论多么抽象、概括,超出现象的数学,在人类的发展进程中总会发挥重要作用的！试粗举三例：

(a)四十年前被认为很难实用被称为数学家的橡皮几何的拓扑几何,现在广泛应用,如移动网络的架构就是拓扑结构.

(b)量子力学中量子态用“波矢”表达(它是一种特殊的具概率特征的矢量),薛定谔方程是计算量子态波动特性的基本方程,它是线性方程组,可不要轻线性方程组!

(c)代数中群结构及李群李代数等在量子力学及量子信息发展中起重要作用,一些新发展的新代数结构起重要作用,如钟万勰院士将“辛”变换及辛代数用于航天及力学中展现重要前景!

3. 如“序”中已举出高等代数中划分等价类,从其中寻求代表元的方法具有普遍方法论的意义,用下例佐证：

在研究复杂系统时重点是掌握其自组织机能,进一步可集中在表征自组织机能的“序”关系,再进一步浓缩为争取掌握序参数作为代表,就是逐次浓缩寻找重要“代表”的通用方法!

4. 希望广大科技工作者、研究生、大学生等重视数学,应用发展数学,共同携手在中华复兴的征程中不断作出新贡献,以此共勉!

王越
北京理工大学
2014. 5

目　　录

第一章　行列式

第一章　行　列　式

§1　二阶和三阶行列式

计算下列行列式：

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=1$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}=-1$

4. $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}=0$

5. $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}=0$

6. $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}=-1$

7. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}=4ab$

8. $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}=a^3-b^3-(a^3+b^3)=-2b^3$

9. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}=1$

10. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta)$

11. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$

12. $\begin{vmatrix} \sin\alpha + \sin\beta & \cos\beta + \cos\alpha \\ \cos\beta - \cos\alpha & \sin\alpha - \sin\beta \end{vmatrix} = \sin^2\alpha - \sin^2\beta - (\cos^2\beta - \cos^2\alpha) = 1 - 1 = 0$

13. $\begin{vmatrix} 2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin^2\varphi - 1 \\ 2\cos^2\varphi - 1 & 2\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi - [4\sin^2\varphi\cos^2\varphi - 2\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi + 1] = 1$

14. $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} = \dfrac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} + \dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{1+t^4-2t^2+4t^2}{(1+t^2)^2} = 1$

15. $\begin{vmatrix} \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & -\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix} = -\dfrac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} - \dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{-1+2t^2-t^4-4t^2}{(1+t^2)^2} = -1$

16. $\begin{vmatrix} \dfrac{1+t^2}{1-t^2} & \dfrac{2t}{1-t^2} \\ \dfrac{2t}{1-t^2} & \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix} = \dfrac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2} - \dfrac{4t^2}{(1-t^2)^2} = 1$

17. $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\ln a}{\ln b} \\ \dfrac{\ln b}{\ln a} & 1 \end{vmatrix} = 0$

计算下列行列式($i = \sqrt{-1}$):

18. $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix} = ab - (c^2+d^2) = ab - c^2 - d^2$

19. $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix} = a^2 + b^2 - 2ab$

20. $\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix} = 0$

21. $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2$

利用行列式解下列方程组：

22. $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x+7y=2 \end{cases}$

解

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-1} = -1$$

检验：把$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$　代入原方程组得

$$\begin{cases} 左=2\times3+5\times(-1)=1=右 \\ 左=3\times3+7\times(-1)=2=右 \end{cases}$$

23. $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 4x-5y=10 \end{cases}$

解

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{10}{2} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{4}{2} = 2$$

检验：把$\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$　代入原方程组得

$$\begin{cases} 左=2\times5-3\times2=4=右 \\ 左=4\times5-5\times2=10=右 \end{cases}$$

24. $\begin{cases} 5x-7y=1 \\ x-2y=0 \end{cases}$

解

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -7\\ 0 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -7\\ 1 & -2\end{vmatrix}}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -7\\ 1 & -2\end{vmatrix}}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

检验:把$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 代入原方程组得

$$\begin{cases}左=\dfrac{10}{3}-\dfrac{7}{3}=1=右\\ 左=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}=0=右\end{cases}$$

25. $\begin{cases}4x+7y+13=0\\ 5x+8y+14=0\end{cases}$

解

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-13 & 7\\ -14 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 7\\ 5 & 8\end{vmatrix}}=\frac{-104+98}{-3}=2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}4 & -13\\ 5 & -14\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 7\\ 5 & 8\end{vmatrix}}=\frac{-56+65}{-3}=-3$$

检验:把$\begin{cases}x=2\\ y=-3\end{cases}$ 代入原方程组得

$$\begin{cases}左=8-21+13=0=右\\ 左=10-24+14=0=右\end{cases}$$

26. $\begin{cases}x\cos\alpha-y\sin\alpha=\cos\beta\\ x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin\beta\end{cases}$

解

$$x=\frac{\begin{vmatrix}\cos\beta & -\sin\alpha\\ \sin\beta & \cos\alpha\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\beta+\alpha)$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ \sin\alpha & \sin\beta\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}}=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha=\sin(\beta-\alpha)$$

检验:把$\begin{cases}x=\cos(\beta+\alpha)\\ y=\sin(\beta-\alpha)\end{cases}$代入原方程组得

$$\begin{cases}\text{左}=\cos(\beta+\alpha)\cos\alpha-\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha=\cos^2\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin^2\alpha-\\ \qquad\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta=\cos\beta=\text{右}\\ \text{左}=\cos(\beta+\alpha)\sin\alpha+\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha=\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha+\sin^2\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha+\\ \qquad\cos^2\alpha\sin\beta=\sin\beta=\text{右}\end{cases}$$

所以 $\begin{cases}x=\cos(\beta+\alpha)\\ y=\sin(\beta-\alpha)\end{cases}$ 是原方程组的解.

27. $\begin{cases}x\tan\alpha+y=\sin(\alpha+\beta)\\ x-y\tan\alpha=\cos(\alpha+\beta)\end{cases}$,其中 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$($k$ 是整数).

解

$$x=\frac{\begin{vmatrix}\sin(\alpha+\beta) & 1\\ \cos(\alpha+\beta) & -\tan\alpha\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\tan\alpha & 1\\ 1 & -\tan\alpha\end{vmatrix}}=\frac{-\tan\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{-\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$=\sin\alpha\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)+\cos^2\alpha\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\tan\alpha & \sin(\alpha+\beta)\\ 1 & \cos(\alpha+\beta)\end{vmatrix}}{-\frac{1}{\cos^2\alpha}}=-\cos^2\alpha\cdot\frac{\tan\alpha\cos(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta)}{1}$$

$$=-\sin\alpha\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)+\cos^2\alpha\sin(\alpha+\beta)$$

$$=\cos\alpha\sin\beta$$

检验:把$\begin{cases}x=\cos\alpha\cos\beta\\ y=\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$代入原方程组得

$$\begin{cases}\text{左}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)=\text{右}\\ \text{左}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)=\text{右}\end{cases}$$

所以 $\begin{cases}x=\cos\alpha\cos\beta\\ y=\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$,其中 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$($k$ 是整数),是原方程组的解.

研究下面所给定的方程组是否为有定的(有唯一解)、不定的(有无穷多解)或者矛盾的(无解).

28. $\begin{cases}4x+6y=2\\ 6x+9y=3\end{cases}$

解

此时用 Cramer 公式能否给出正确的回答?

$$D=\begin{vmatrix}4&6\\6&9\end{vmatrix}=0$$

此时不能用 Cramer 公式给出方程的解.原方程的增广矩阵施行行变换.

$$\begin{pmatrix}4&6&2\\6&9&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&3&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由于系数矩阵的秩、增广矩阵的秩均为 1,故方程组有解. 由

$$2x+3y=1$$

求得非齐次方程的特解

$$x=1,\quad y=-\frac{1}{3}$$

对应齐次方程的通解

$$2x=-3y$$

$$\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{2}\\1\end{pmatrix}$$

则非齐次方程的通解是

$$\begin{cases}x=1-\dfrac{3}{2}t\\y=-\dfrac{1}{3}+t\end{cases},\text{其中 } t \text{ 是任意数.}$$

29. $\begin{cases}3x-2y=2\\6x-4y=3\end{cases}$

解

因为　$r(A)=1$

　　　$r(\mathring{A})=2.$

所以方程是矛盾的,无解.

30. $(a-b)x=b-c$

解

当 $a\neq b$ 时,解有定;

当 $a=b,b\neq c$ 时,无解;

当 $a=b=c$ 时,解不定.

31. $x\sin\alpha=1+\sin\alpha$

解

当 $\alpha\neq k\pi$,k 为整数时,$x=1+\dfrac{1}{\sin\alpha}$　解有定;

当 $\alpha=k\pi$ 时,无解.

32. $x\sin\alpha=1+\cos\alpha$

解

当 $\alpha\neq k\pi$, k 为整数时，　$x=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

当 $\alpha=0$ 时,无解;

当 $\alpha=\pi$ 时,x 解不定;

当 $\alpha=(2k-1)\pi$, k 是整数时,x 解不定;

当 $\alpha=2k\pi$ 时,无解.

33. $x\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$

解

当 $\alpha+\beta\neq k\pi$ 时,解有定.

当 $\alpha+\beta=k\pi$ 时,如果 $\sin\alpha+\sin\beta=0$,则解不定;

如果 $\sin\alpha+\sin\beta\neq 0$,则无解.

34. $\begin{cases}a^2x=ab\\ abx=b^2\end{cases}$

解

当 $a\neq 0$, $b\neq 0$ 时,$x=\dfrac{b}{a}$;

当 $a=0$, $b\neq 0$ 时,x 无解;

当 $a\neq 0$, $b=0$ 时,$x=0$ 只有零解;

当 $a=b=0$ 时,解不定.

利用行列式解下列方程组:

35. $\begin{cases}ax+by=ad\\ bx+cy=bd\end{cases}$

解

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ b & c\end{vmatrix}=ac-b^2$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}ad & b\\ bd & c\end{vmatrix}}{ac-b^2}=\frac{acd-b^2d}{ac-b^2}=d$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a & ad\\ b & bd\end{vmatrix}}{ac-b^2}=\frac{abd-abd}{ac-b^2}=0$$

检验:把 $\begin{cases}x=d\\ y=0\end{cases}$ 代入原方程组得

$$\begin{cases}左 = a \cdot d + b \cdot 0 = ad = 右 \\ 左 = b \cdot d + c \cdot 0 = bd = 右\end{cases}$$

所以 $\begin{cases}x = d \\ y = 0\end{cases}$ 是原方程组的解.

36. $\begin{cases}ax + 4y = 2 \\ 9x + ay = 3\end{cases}$

解

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 4 \\ 9 & a \end{vmatrix} = a^2 - 36$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & a \end{vmatrix}}{a^2 - 36} = \frac{2a - 12}{a^2 - 36} = \frac{2}{a + 6}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}}{a^2 - 36} = \frac{3a - 18}{a^2 - 36} = \frac{3}{a + 6}$$

检验:把 $\begin{cases}x = \dfrac{2}{a + 6} \\ y = \dfrac{3}{a + 6}\end{cases}$ 代入原方程组得

$$\begin{cases}左 = \dfrac{2a}{a + 6} + \dfrac{12}{a + 6} = 2 = 右 \\ 左 = \dfrac{18}{a + 6} + \dfrac{3a}{a + 6} = 3 = 右\end{cases}$$

所以 $\begin{cases}x = \dfrac{2}{a + 6} \\ y = \dfrac{3}{a + 6}\end{cases}$ 是原方程组的解.

37. $\begin{cases}ax - 9y = 6 \\ 10x - by = 10\end{cases}$

解

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -9 \\ 10 & -b \end{vmatrix} = 90 - ab$$

$$x = \frac{1}{90 - ab}\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 10 & -b \end{vmatrix} = \frac{90 - 6b}{90 - ab}$$

$$y = \frac{1}{90 - ab}\begin{vmatrix} a & 6 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} = \frac{10a - 60}{90 - ab}$$

检验：把$\begin{cases} x=\dfrac{90-6b}{90-ab} \\ y=\dfrac{10a-60}{90-ab} \end{cases}$ 代入原方程组得

$$\begin{cases} 左=\dfrac{90a-6ab}{90-ab}-\dfrac{90a-540}{90-ab}=\dfrac{540-6ab}{90-ab}=6=右 \\ 左=\dfrac{900-60b}{90-ab}-\dfrac{10ab-60b}{90-ab}=\dfrac{900-10ab}{90-ab}=10=右 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x=\dfrac{90-6b}{90-ab} \\ y=\dfrac{10a-60}{90-ab} \end{cases}$ 是原方程组的解.

38. 证明：二阶行列式等于零的充分必要条件是它的行成比例. 对于列，上述断言也正确（如果行列式的某些元素等于零，则成比例一语理解成：一行的元素由另一行的对应元素乘上同一个可以等于零的数而得到）.

证明

必要性

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$$

$$a_{11}a_{22}=a_{12}a_{21}$$

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}$$

对于列

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

充分性. 如果

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=k,$$

则

$$\begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0$$

如果 $a_{11}=0 \longrightarrow a_{12}$ 或 a_{21} 中有一个数为 0，
如果 $a_{22}=0 \longrightarrow a_{12}$ 或 a_{21} 中有一个数为 0，
则这时可以广义地认为行成比例或列成比例.

39. 证明：对于实数 a、b、c，方程 $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix}=0$ 的根是实数.

证明

$$(a-x)(c-x)-b^2=0$$