2018年
全新
修订版

CHUZHONG SHUXUE BIANSHI JINGJIANG

初中数学
变式精讲

王伟◎著

举一反三，触类旁通，高效学习

在无穷的变化中领略数学的魅力

在曼妙的演变中体会数学的快乐

宁波出版社
NINGBO PUBLISHING HOUSE

初中数学变式精讲

王　伟　著

宁波出版社
NINGBO PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

初中数学变式精讲 / 王伟著. —宁波:宁波出版社,2018.5

ISBN 978-7-5526-3233-0

Ⅰ. ①初… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 105304 号

初中数学变式精讲

王　伟　著

责任编辑　方　妍　陈　静
责任校对　徐巧静　杨青青
出版发行　宁波出版社(宁波市甬江大道 1 号宁波书城 8 号楼 6 楼 315040)
印　　刷　宁波白云印刷有限公司
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张　22
字　　数　500 千
版　　次　2018 年 5 月第 1 版
印　　次　2018 年 5 月第 1 次印刷
标准书号　ISBN 978-7-5526-3233-0
定　　价　49.00 元

序　言

“减负提质”的一条可行正道

“减负提质”是培养新一代德智体美全面发展学生的必然要求，也是广大学生、家长的强烈愿望.为此，不少有事业心、责任感的教师付出了许多努力，本书作者王伟同志就是比较突出的一位.他自1990年从教以来，以初中数学“变式教学”为切入口，坚持不懈地进行“减负提质”的实践和研究，取得了明显的教学成效，受到各方面的关注和称赞.他的论文和有关成果屡屡在省级、国家级杂志上发表，他曾多次参与宁波市中考命题和各地重点中学提前招生命题工作，还多次被浙江省教研室和知名大学邀请就相关学术专题进行讲学.

王伟教学劲头十足、蓬勃向上，工作不久就崭露头角，被推荐参加我和上海名师陈振宣先生主编的一套在全国发行的读物——《新课标初中数学解题方法全书》(以下简称《全书》)的编写工作.其中第二编“数学的思想、美妙、应用和学法”是该书最大的亮点，含14组共56篇精练的数学小品文，如《无处不用数学》《数学使人聪明》《欣赏数学的智巧》等等.书一上市，就被学生、教师、教研人员抢购一空，短短几年内该书就改版3次，累计印刷20余次.有抱负、肯吃苦的王伟，备尝编著的艰辛和畅销的欣慰.经过10余年的辛勤钻研，王伟终于于2006年出版个人专著——《数学变式百例精讲》(以下简称《百例》)，该书内含10章共126套题组(共计几千题)，囊括了初中数学的所有重点、难点.他广泛搜集积累、精心创著和理论概括的功力和勇气着实令人佩服.书中章节的前言和解题后的小结，告诉读者抓住重点、化解难点的诀窍；书中的问题、题组有的是反复锤炼的成果，有的是妙手偶得的奇葩.这些无疑是学生“减负提质”的良师益友，能给学生和教师带来极大的帮助.《百例》与《全书》一样一印再印，体现了读者的认可.

《百例》问世至今已10余年，以王伟为首的教改团队又积累了不少新素材、新知识.为此，宁波出版社计划推出新版，并改书名为《初中数学变式精讲》，商定请我写篇序言，60余年的职业感情促使我当即接受这一邀请，并向他讲述了我亲身经历的两则故事.

故事一：浙江省第二届中学数学教研会上，浙江省第一位特级教师程宝佩老师以循序“变题”的思路向初一学生讲“行程应用题”.老先生从生活实际出发，由简至难，循序渐

进，从单人直线运动讲到双人同(异)向运动(追及或相遇、直线或环形、上坡或下坡、顺流或逆流)，学生们踊跃发言，尽得表扬，各地听课老师不时报以掌声，这既是优秀教师课堂教学的魅力，也是变式教学的成功！

故事二：1990 年，我应邀参加全国高考数学卷的命题. 这是一次中学教师、大学教授和教材编辑三结合的高标准、高要求的变题研究活动. 我们命题组日思夜想，反复推敲，花了 10 余天时间才确定最关键的 3 道拉分题. 第 26 题只是把“原型”中的常数变为实参数；第 27 题是按“广义逆命题”的思想，把“原型”中的部分条件与结论进行适当调换和变动；第 28 题把“原型”中的三项式推广至任意项，以作为压轴难题. 临近命题结束的某一天，我向分别来自北大、清华、北师大的三位教授坦言：“我算了解高考命题的核心内幕了，我回去以后会让中学师生多进行变式训练，学会提出问题，多多探讨解法，使你们白费心机. ”他们听后大笑说：“你真是‘身在曹营心在汉’，我们巴不得广大中学师生能这样做呢！”

通过这两则故事，我想表露的心声是：

“创造性是数学的心脏和灵魂，它发生在优秀教师的课堂上. ”(R. C. Buck)

“特别好的问题是能为人类生出金蛋的母鸡. ”(希尔伯特)

本书为“减负提质”提供了一条正道，其他改革的途径还有很多，任诸君自由选择. 我仅凭 60 余年之教学经验，真诚进言两条：

一、爱生如子是前提. 我牢记上海南洋模范中学赵宪初老校长的话——“天生我材必有用，他人爱子亦如余”.

二、毕生进修是保证. 教师昏昏，怎使学生昭昭？不深入怎能浅出，不攀高怎能望远？当代国际数学大师陈省身强调“离开数学谈数学教育没有多大意思”“数学搞清楚了，才能讲清楚”；徐光启亲自参与翻译《几何原本》后评述：“易生于简，简生于明，综其妙，在明而已. ”我们应永远记住并努力践行明末清初梅文鼎的名言：“以平易之语解极难之法，以浅近之言达至深之理. ”

杨象富

2018 年 3 月 28 日

(作者系浙江省著名特级教师，参加过全国高考和数学联赛命题工作，曾到复旦大学、浙江大学等百所名校讲学，曾出版著作三十余本，代表作为《杨象富数学教学经验》，苏步青教授为该书题词：“春华秋实，杨象富数学经验”.)

前　言

《义务教育数学课程标准(2011 年版)》强调培养学生的创新意识和实践能力,同时也注重培养学生的逻辑思维能力、空间想象能力、分析和解决问题的能力.让学生体验在已有经验的基础之上,从实际背景中抽象出数学问题、构建数学模型、寻求结果、解决问题的过程,从而激发学生积极向上的兴趣和勇于探究的精神,最终的核心目标是培养自主发展这一核心素养.但不少学生甚至教师却步入了“找题—解题—做题”这一误区,忽略了有目的地总结、归纳、提炼、深化的过程,抓不住基本解题规律,拓不宽解题思路,进而导致学生学习兴趣的缺失,最终师生均苦不堪言,却收效甚微.

诺贝尔奖获得者李政道说过:“学问,就是学习问问题.”长期的教学实践与思考使我体会到:要充分利用课本例题、中考题、竞赛题,领悟其奥妙,并对其进行适当剖析、深入研究、充分演变,以旧问题的解决来激发新问题的诞生,以新问题的演变来激发新思维的闪现,使教师和学生通过相似问题的表象看到问题的本质,并进行进一步的思考,以达到举一反三、触类旁通的效果.这样不仅可减轻铺天盖地作业带来的负担,达到“以少胜多”的教学目的,更重要的是可以激发学生强烈的求知欲和学习积极性,进一步培养学生思维的灵活性、深刻性和创造性,让学生能够真正地学会学习、自主学习.

会解题的不一定会编题,会编题的一定会解题.因为编题的过程不仅是解题的过程,更是一个把问题从简单引向深入进而逐步演绎的探究创新的过程.一般来说,数学问题的演变需要深厚的数学功底、良好的思维素质和熟练的编题技巧.本书介绍的就是数学问题如何演变和深入的基本途径和技术手段,希望在夯实基础、开阔视野、启迪思维、掌握数学问题演变的基本思路和方法等方面能对学生有所帮助.

本书的编写过程中,尽管我投入了 20 余年的精力和心血,尽了最大的努力,但因水平有限,其中定存种种不尽如人意之处,热忱欢迎广大读者提出批评和建议.

本书可供广大初中数学教师和教研员参考使用,也可供处于中考冲刺阶段的学生练习使用.

如何使用本书

为何编写本书？

大多数人的学生时代都“遨游”在“题海”之中，但“遨游”了整个学生时代也未能成为一名“游泳健将”，究其原因还是在于方法选择上的错误．有的学生只想着如何解题，只想着依靠练习数量上的优势来达到提高数学成绩的目的，却不会寻找题与题之间的联系，这样的学习方式非但不奏效，而且往往适得其反．数学学习应该是轻松愉快的思维活动，而不是反复机械的操作劳动，所以我们要找到能达到高效学习目的的轻松学习的方式，变式训练就是帮助我们通向这个目标的捷径．我们可以通过解一道题找到解一类题的方法，用思维活动的提升来代替简单机械的练习，做到举一反三、触类旁通，真正感受到成功解题的喜悦，最终成为“游泳高手”．

本书如何编排？

本书的第一、二章主要是利用数学实例来阐释变式训练的意义和价值，第三章开始通过典型例题的变式来为数学学习提供平台——先是以几何图形的变式来让学习者初步感受数学变式的魅力，让学习者可以轻松入门，而后以原题条件（或结论）的变式来加深学习者对数学变式的认识，学习者继而可以利用层次性不同的变式提升学习能力，最后的“极端化思想”则是在实际运用中的价值体现，以帮助学习者达到学以致用的目的．本书的内容足以保证学习者的需求，学习者无须外加练习．学习者既能仰望星空，又能脚踏实地；既注重结果，又关注过程；既了解本质，又积累素养；既探究知识，又强化能力，最终达到利用变式的数学思想解决问题的目的．

本书如何使用？

学生可以将本书作为复习的资料或者再提升的素材. 通过学习变式的数学思想，学生不仅思维能够得到发散，而且学习数学的效率也能得到极大的提升. 例如学生在学习了第十二章《“极端化思想”在数学解题中的变式探究》后，能直接利用变式的数学思想，通过极端化的方式得到很多难题的答案，本来十几分钟时间可能还无法解决的问题现在只需要一分钟便能解决，更加高效、准确，直接完成了对中考题的“秒杀”. 相信学生在利用了本书之后必定会将本书奉为自己的数学宝典.

数学教师可以将本书作为自我提升的阶梯，特别是年轻教师. 本书不仅能开阔教师的视野，而且能提高教师解题、编题的能力. 本书中每一个例题以及之后产生的变式都是一个完整的教学设计，而且本书内容涵盖了初中所有的数学知识，完全可以直接转化成课堂的教学内容，教师可以选择本书作为初三学生的中考复习资料，也可作为自己的教学宝典.

家长可以选择本书作为孩子的辅导资料，孩子在家里的学习完全可以借助本书来完成. 家长可以将书中例题(变式)的解答遮住，只留出题目供孩子练习，由此家长也不需要再去购买其他资料或者寻找其他的培训机构，用一本《初中数学变式精讲》就能解决这一系列问题，相对而言性价比更高. 相信本书也必定能成为家长的最佳选择.

目 录

第一章 数学问题变式与解题

一、研究数学问题变式的意义

随着新一轮深化义务教育阶段课程改革的进展，教育要不忘初心，回归到原有的本质，要为学生的终身发展奠基，尽快完成从知识本位的传统教育向能力本位的现代化教育的转型，这已成为当前教育发展的新常态，也是当前教育重视学生核心素养发展的直接体现.新常态下的数学教育应改变传统的强迫、灌输、高压的育人模式，转而注重学生的自主发展、实践创新等思维能力的培养.在如今的数学课堂中，数学探究活动已成为贯穿整个初中数学课程的重要内容，是促进学生将原有知识和新知识有效地组合和沟通的重要途径，可让学生获得深切的感受与体验.对数学问题变式的研究能帮助学生养成良好的质疑、多思的学习习惯，提高其类比推理的能力，以培养其批判性思维，点燃创新思维的火花.而利用“变式教学”和“变式训练”，通过对数学问题多角度、多方位、多层次的讨论和思考，能帮助学生打通关节，构建有价值的变式探索研究，展示数学知识生成、发生、发展和应用的过程，有意识、有目的地引导学生从“变”的表象中发现“不变”的本质，从“不变”的本质中探究“变”的规律，把所有知识点融会贯通，使思维在所学知识中游刃有余、顺畅飞翔.

用继承和发展的观点反思，我们传统的教学确实在培养创新精神和探究能力方面有所欠缺.现在，我国在校学生中不乏解题高手，我国选手参加历年国际奥林匹克数学竞赛都取得了优异成绩，但在创造性地提出新问题、建立新理论方面，我们却落后于国际平均水平.美籍华裔学者蔡金法先生曾对中美学生的数学能力做过一次调研.他介绍了自己的调研结果：中国学生在计算能力和解决简单问题的能力方面，比美国学生好；在解决比较复杂、过程或结论具有开放性的数学问题和创造性地提出问题方面，美国学生的平均水平比中国学生好.在实际课堂教学中也是如此，在课上、课下敢于提出和能够提出较新的、有一定深度和广度的数学问题的中国学生寥寥无几.由此可见，我国传统的教学方式较难培养学生潜在的创新意识与创新能力.学生大多只停留在理解前人留下的东西，解决前人留下的疑问，即解题层面，而从未想过“越雷池一步”，缺乏因旧问题的解决而激发

新问题的能力,即问题的演变能力.其实,一种新的教学理论,只靠严谨的逻辑演绎是无法推导出来的,必须加上生动的思维进行再创造.数学理论发展的历史证明,人们的直觉和“灵光一闪”的顿悟,往往已经得出了整个新理论的百分之七十,剩下的百分之三十才是逻辑与验证.数学史上冠以某数学家名字的猜想、定理、法则,往往并无逻辑证明,逻辑推演与论证是今人补做的,但人们仍把功劳归于提出新问题的首创者,英国富豪出百万美元悬赏“哥德巴赫猜想”的验证,仅仅是在已构造的理论大厦上添砖加瓦.

随着新一轮课程改革的实施,创造性思维与探究能力的培养以及自主发展的教育理念也必将在教学评价中表现出来.一直以来,全国数学竞赛题和各地的中考题都在不断地变化和发展,但无论怎样改革,都离不开历史的继承,数学基础知识、基本技能、思想方法总是不变的,“万变不离其宗”,只是在题目的立意、情景的创设、设问的角度中力求新颖和鲜活的变化.

二、数学问题演变的价值认识

1.优化思维素质

变式训练是指变换问题的条件或结论,从而更深刻地揭示问题本质的训练.这样的训练使学生不只看到事物的表象,还能自觉地探索事物的本质,学会比较全面地看待问题,学会从事物之间的联系上来理解事物的本质,能在一定程度上克服或减少由于绝对化思维而出现的思维僵化、思维惰性,使思维向多方面发展,培养思维的发散性.

思维的广阔性是发散性思维的又一特征.思维的狭窄性表现在只知其一,不知其二.反复进行问题演变的训练,是帮助学生克服思维狭窄的有效办法.教师在教学过程中,不能只重视计算结果,要针对教学的重点和难点,精心设计有层次、有梯度、要求明确、题型多变的练习题;学生通过训练不断探索解题的捷径,使思维的广阔性得到发展;通过多次渐进式的拓展训练,学生就能进入思维广阔的佳境.现行新课标指导下的各地新教材都设有“想一想”的栏目,就是把教材中的例题进行演变,目的是培养学生思维的广阔性.

数学中有许多概念、法则、公式、定理和方法等,因内容相近致使学生在学习中发生混淆.让学生经历演变、辨析、对比的过程,对某一问题有准确的判断,并说出根据,这样的变式能促使学生把握问题的实质,使学生客观地评价事物,提高辨别是非的能力,培养思维的批判性.

衡量学生思维水平高低的重要标准是看其是否具有创造性的思维,即是否善于探索、突破、创新,能够发现和解决自己或别人未曾发现或未解决的问题.要使学生养成这种可贵的品质,必须提供给他们有价值的材料,但教材在这方面往往或多或少地存在着欠缺,因为在阐述数学原理和规律时,一般都把数学家们当初的真实发现过程给抽掉了,这就需要教师来弥补.为此,我们可以改变研究对象的一些条件,对其进行变式,设计出隐藏着规律的材料,引导学生去探索、发现,让学生在已有的知识经验的基础上去大胆地探索、猜想、验证,进而培养学生思维的创造性.

2.掌握、融会贯通数学知识

对数学问题进行演变训练不是天马行空、突发奇想的，它需要以丰富的基础知识和基本技能为支撑，以扎实的数学功底和灵活的数学思想为支架.在对数学问题的适当剖析、深入研究、充分演变中，学生势必要复习和运用更多的基础知识，从而加深对数学概念、定理、公式等的理解；还经常要用到代数法、三角法与解析法，这样就贯通了中学数学的各个知识点，学生能掌握各种基本思想方法，把所学的数学知识融会贯通.另外，在变式训练中，还会用到特殊与一般、局部与整体、顺推与逆推、正面与反面、熟悉化、简单化与具体化等数学思想.所以，随着变式训练的不断深入，学生对数学思想的认识也更为深刻，运用起来也更加得心应手.

3.培养学习兴趣，提高教学效果

目前，我们的数学课堂仍然存在这样一些问题：老师讲解多，学生思考少；一问一答多，研讨交流少；操练记忆多，鼓励创新少；强求一致多，发展个性少；照本宣科多，智力活动少；显性内容多，隐性内容少；应付任务多，精神乐趣少；等等.其实，课堂教学效果好坏很大程度上取决于学生参与度的高低，这就要求学生首先要有参与意识.为此，要加强学生在课堂教学中的参与性，使学生真正成为课堂教学的主体，这是现代数学教学的基本要求.变式教学是通过对教学中的定理和命题等进行不同角度、不同层次、不同情形、不同背景的变式，暴露问题的本质，揭示不同知识点的内在联系的一种教学设计方法.通过变式教学，一题多用、多题重组，提高学生的新奇感和参与感，教学、学习中的兴奋点不断闪现，从而激发学生的好奇心、求知欲和创造力，提高学生参与教学活动的兴趣和热情，从而取得较好的教学效果.

第二章　培养数学变式能力的方法

著名数学教育家波利亚曾形象地指出:“好问题同种蘑菇类似,它们都成堆地生长,找到一个以后,你应当在周围找一找,很可能附近就有好几个.”教师教育学生的目的是培养学生解决问题的能力、学习新事物的能力,培养学生提出更一般、更广阔、更深刻的新问题和建立新理论的能力.那么,如何培养学生针对旧问题提出新问题(问题演变)的能力呢?

一、重视基础,沟通联系

数学基础知识、基本概念(定义、定理、性质、公式、法则)是解决已有数学问题、产生新问题的起点.一般情况下,要从知识发生的过程设计问题,突出概念的形成过程;从学生认知的最近发展区来设计问题,而不是将公式简单地告诉学生;通过设计开放性的问题,让学生通过类比、归纳、猜想得出结论,再对所得结论进行论证.

例 1　求证:顺次连结平行四边形各边中点所得的四边形是平行四边形.

变式探究

变式 1　求证:顺次连结矩形各边中点所得的四边形是菱形.

变式 2　求证:顺次连结菱形各边中点所得的四边形是矩形.

变式 3　求证:顺次连结正方形各边中点所得的四边形是正方形.

变式 4　顺次连结什么四边形各边中点可以得到平行四边形?

变式 5　顺次连结什么四边形各边中点可以得到矩形?

小　结

通过这样一系列变式训练,学生可充分掌握四边形这一章节所有基础知识和基本概

念，强化了对常见特殊四边形的性质定理、判定定理、三角形中位线定理等的认知，极大地拓展了学生的解题思路，活跃了学生的解题思维，激发了学生的学习兴趣.

例 2　圆台侧面积公式为 $S=\pi(R+r)l$. 当 $r=0$ 时，圆台体变形为圆锥体，侧面积公式为 $S=\pi Rl$；当 $R=r$ 时，圆台体变形为圆柱体，侧面积公式为 $S=2\pi Rl$.

小　结

这样，我们用整体的观点，站在更高的层次上，分析与研究知识点之间的纵横关系、因果关系、演变关系，沟通不同知识间的内在联系，以知识为经，以方法为纬，编织出了一个"知识网"，为进行数学问题演变奠定了坚实的知识基础.

二、创新思维，发展能力

丰富而扎实的基础知识是形成创新思维的前提，有"知"未必有"能"，无"知"必定无"能"，要想知识和能力同步协调发展，就要在教学中既使学生掌握知识，又使学生把握知识产生的过程，从中吸取丰富的智力营养，尽量让学生体会到蕴藏在数学问题中的生命价值. 具体地说，要培养学生养成一种不依常规，寻求变异，多角度、多层次、全方位地去思考问题、寻求答案的优良思维品质，其基本特征是：流畅性（能在短时间内表达较多的概念，反应迅速）、变通性（思维方向灵活多变，举一反三，触类旁通，能提出超常的构想或新观点）、独创性（对事物的处理或判断表现出独特的见解，推陈出新）.

例 3　如图 2-1，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，当 $\angle C=90°$ 时，求证：$c^2=a^2+b^2$.

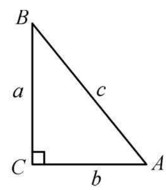


图 2-1

变式探究

变式 1　当 $\angle C$ 不是 $90°$ 时，$c^2=a^2+b^2$ 仍成立吗？如不成立，a,b,c 三边又成何关系呢？

解： 如图 2-2，在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB=c$，$BC=a$，$AC=b$. 过点 B 作 AC 的垂线 BD，垂足为 D，则 $BD=a\sin C$，$DC=a\cos C$，$AD=b-a\cos C$. 根据勾股定理可得

$$\begin{aligned}c^2&=(a\sin C)^2+(b-a\cos C)^2\\&=a^2\sin^2C+b^2-2ab\cos C+a^2\cos^2C\\&=a^2(\sin^2C+\cos^2C)+b^2-2ab\cos C\\&=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{aligned}$$

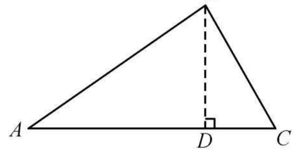


图 2-2

即解斜三角形时用的余弦定理. 我们可以发现，勾股定理亦可视为余弦定理的特殊情况，即 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos 90°=a^2+b^2$.

变式 2 已知所有符合 $a^2+b^2=c^2$ 的正整数的解为一组勾股数，如：3，4，5；5，12，13；9，40，41；…那么是否存在正整数 a,b,c，使 $a^3+b^3=c^3$ 呢？

小 结

由上几例可知，教材中一些常见定理反映了相关数学理论的本质属性，蕴含着丰富多彩的数学思维方式和思想精髓，这是创新思维的生长点，也是核心素养养成的着重点.

例 4 求一元二次方程 $x^2-5x+6=0$ 的根.

变式探究

变式 1 求一元二次不等式 $x^2-5x+6>0$ 的解集.

解：画出二次函数 $y=x^2-5x+6$ 的图象，交 x 轴于 A，B 两点，如图 2-3.

解得点 A 的坐标为 $(2,0)$，点 B 的坐标为 $(3,0)$.

由图象可知一元二次不等式 $x^2-5x+6>0$ 的解集为 $x<2$ 或 $x>3$.

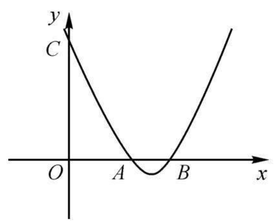


图 2-3

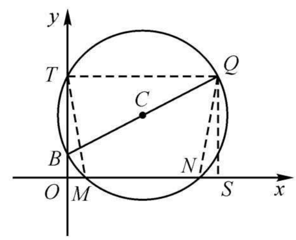


图 2-4

变式 2 在直角坐标系中作点 $B(0,1)$ 和 $Q(p,q)$. 以 BQ 为直径作⊙C，交 x 轴于 M，N 两点，交 y 轴于点 T. 求证：点 M，N 的横坐标即为二次方程 $x^2-px+q=0$ 的实根.

证明：如图 2-4，连结 QT，TM，QN，过点 Q 作 $QS\perp x$ 轴，垂足为 S.

$\because BQ$ 为直径，

$\therefore \angle BTQ=90^\circ$，$\therefore OT=QS=q$.

由割线定理可知 $OM\cdot ON=OB\cdot OT$，即 $OM\cdot ON=q$，

又易证 $\triangle OTM\cong\triangle SQN$，$\therefore OM=SN$，

$\therefore OM+ON=SN+ON=OS=p$.

由韦达定理可知点 M，N 的横坐标即为一元二次方程 $x^2-px+q=0$ 的根. 这即为 19 世纪苏格兰哲学家卡莱尔给出的有名的任意一元二次方程实根的一个新颖、简洁的几何求法.

小 结

学生通过对数学问题的思考，学习分析问题、把握规律的能力. 在解题后及时总结规律

和方法,从而把获得的知识、方法迁移和应用到其他问题中,有效锻炼了思维的深刻性.

例 5　如图 2-5,O 为$\triangle ABC$ 内任意一点,连结 OA,OB,OC,在 OC 上任取一点 E,作 $EF /\!/ AC$,交 OA 于点 F,作 $DE /\!/ BC$ 交 OB 于点 D,连结 DF. 求证:$\triangle DEF \backsim \triangle BCA$.

证明: $\because EF /\!/ AC, DE /\!/ BC$,

$\therefore \angle 1=\angle 2, \angle 3=\angle 4, \angle 5=\angle 6$,

$\therefore \dfrac{OF}{OA}=\dfrac{OE}{OC}=\dfrac{OD}{OB}$,

$\therefore DF /\!/ AB$, $\therefore \angle 7=\angle 8$,

$\therefore \angle ACB=\angle FED, \angle DFE=\angle BAC$,

$\therefore \triangle DEF \backsim \triangle BCA$.

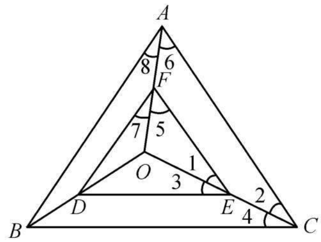


图 2-5

变式探究

变式 1　如图 2-6,上题中"O 为$\triangle ABC$ 内任意一点"改为"O 为$\triangle ABC$ 外任意一点",其他条件均不变,求证:$\triangle DEF \backsim \triangle BCA$.

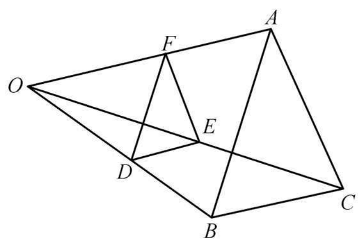


图 2-6

变式 2　如图 2-7,当"点 O 在 AB 边上",其他条件均不变,求证:$\triangle DEF \backsim \triangle BCA$.

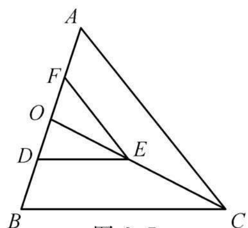


图 2-7

变式 3　如图 2-8,当"点 O 在 AB 边的特殊点 A 上",其他条件均不变,求证:$\triangle DEF \backsim \triangle BCA$.

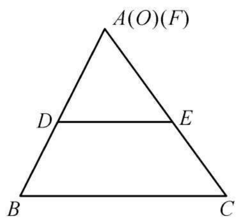


图 2-8

变式 4 以上几题在条件中都改变了点 O 的位置，如果将$\triangle ABC$改为多边形 $ABCDEF$，结果会怎样呢？

如图 2-9，这些多边形都相似吗？

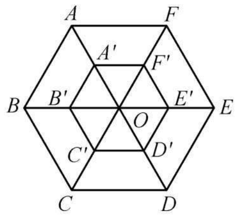


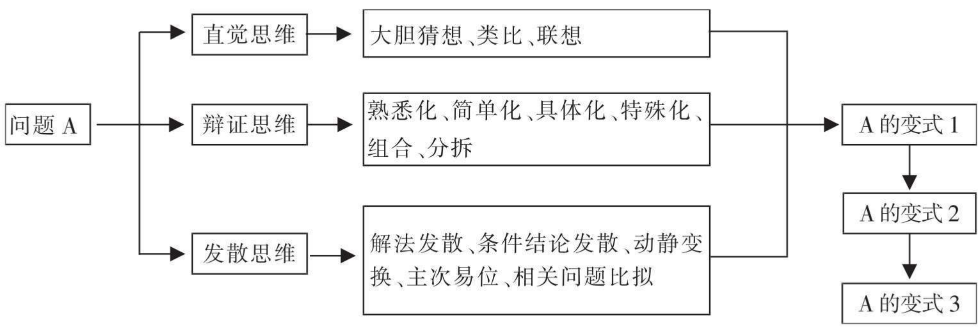
图 2-9

小 结

如此，对于教材中许多重要的例题、习题进行类比、引申、推广，提出新问题并加以解决，从而引发学生的绵绵遐思，不但发挥了教材的示范作用，更能培养学生数学思维的灵活性和思考问题的深刻性.

三、熟悉规律，掌握技能

数学问题的演变是指从基础问题出发进行变化，这对学生的思维能力有较高的要求，但仍有一定的方法、技巧可循. 如何引导学生根据现有的思维水平，运用已掌握的知识，通过正确的思维方式，把碰到的数学问题转化为熟悉的或容易解决的数学问题，变中求解、解中求变呢？请参见以下的流程图：



例 6 已知点 P 是抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 上的任意一点，设点 P 到 x 轴的距离为 d_1，点 P 与点 $F(0,2)$的距离为 d_2.

(1)猜想 d_1，d_2 的大小关系，并证明.

(2)若直线 PF 交此抛物线于另一点 Q(异于点 P)，

①试判断以 PQ 为直径的圆与 x 轴的位置关系，并说明理由.