解析几何的系统性突破

JIEXI JIHE DE XITONGXING TUPO

主　编／吕荣春
副主编／张栩瑞　郭爱平　刘成龙　张世冬

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解析几何的系统性突破/吕荣春主编. —成都:
电子科技大学出版社,2017.8

ISBN 978－7－5647－4781－7

Ⅰ.①解… Ⅱ.①吕… Ⅲ.①中学数学课－高中－升
学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 172425 号

解析几何的系统性突破

吕荣春　主编

策划编辑　杨仪玮
责任编辑　兰　凯

出版发行　电子科技大学出版社
　　　　　成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼　邮编　610051
主　　页　www.uestcp.com.cn
服务电话　028－83203399
邮购电话　028－83201495

印　　刷　四川煤田地质制图印刷厂
成品尺寸　185 mm×260 mm
印　　张　22.75
字　　数　580 千字
版　　次　2017 年 8 月第一版
印　　次　2017 年 8 月第一次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5647－4781－7
定　　价　39.80 元

编者的话

解析几何的一些思考

一、解析几何产生的背景(引自人教A版教材主编章建跃的"解析几何的内容、方法和意义")

(一)科学发展的需要

十六世纪以后,由于生产和科学技术的发展,天文、力学、航海等方面都对几何学提出了新的需要. 比如,德国天文学家开普勒发现行星是沿着椭圆轨道绕太阳运行的,太阳处在这个椭圆的一个焦点上;意大利科学家伽利略发现投掷物体是沿着抛物线运动的. 这些发现都涉及圆锥曲线,要研究这些比较复杂的曲线,原先的一套方法显然已经不适应了,这就导致了解析几何的出现.

(二)数学方法论的需要

从数学内部来看,解析几何的产生也是出于对数学方法的追求. 认识清楚这一点,对于我们理解解析几何的基本思想特别重要. 这可以从追溯 Descartes 和 Fermat 在创立解析几何时的心路历程看出这种追求.

1. Descartes 的坐标法思想

Descartes 1596 年 3 月 31 日出生于法国拉埃耶一个古老的贵族家庭. 他从小体弱多病,但非常好学,勤于思考,他不仅在数学上做出了重要的开创性贡献,而且在哲学、生物学和物理学等众多领域都做出了杰出贡献. 他是机械自然观的第一个系统表述者,被誉为近代哲学的开创者. 正如克莱因指出的,"Descartes 是第一个杰出的近代哲学家,是近代生物学的奠基人,是第一流的物理学家,但只偶然地是个数学家. "他以大哲学家的眼光审视数学,认为数学立足于公理上的证明是无懈可击的,而且是任何权威所不能左右的. 数学提供了获得必然结果以及有效地证明其结果的方法. 数学方法"是一个知识工具,比任何其他由于人的作用而得来的知识工具更为有力,所以它是所有其他知识工具的源泉……所有那些目的在于

研究顺序和度量的科学，都和数学有关.”他研究数学，目的是想寻找一种能在一切领域里建立真理的方法. 他认为，逻辑本身对任何创造性的人类目标都贫乏而毫无用处；哲学、伦理学和道德学中的证明，与数学相比，花哨而虚假. 那么应当如何发现呢？这就是：通过“控制下的实验”并对实验结果应用严格的数学推理.

Descartes 认为，以往的几何和代数研究都存在很大缺陷：欧氏几何中没有那种普遍适用的证明方法，几乎每一个证明都需要某种新的、技巧性很强的想法；代数的方法具有一般性，其推理程序也是机械化的，但它完全受法则和公式的控制，以至于“成为一种充满混杂与晦暗、故意用来阻碍思想的艺术，而不像用来改进思想的科学”. 所以代数与几何必须互相取长补短. 不过，他推崇代数的力量，认为代数方法在提供广泛的方法论方面要高出几何方法，所以代数具有作为一门普遍的科学方法的潜力. 于是，他提出了一个计划，即“任何问题→数学问题→代数问题→方程求解”.

他把精力集中在研究怎样把代数方法用于解决几何问题，其结果是创立了解析几何.

1637 年，Descartes 在朋友的劝说下出版了《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》（简称《方法论》），这是一本“文学和哲学的经典著作”，包括三个著名的附录——《几何学》《屈光学》和《气象学》，解析几何的发明就包含在《几何学》中. 他用于说明坐标法思想的问题是著名的 Pappus 问题，这是一个求与若干条给定直线具有确定关系的点的轨迹问题. 他用坐标法证明了给定的直线是四条时的 Pappus 结论，实际上就是通过建立平面上的坐标系，使点与坐标（有序实数对(x, y)）一一对应，求出 x、y 满足的方程 $y^2=Ay+Bxy+Cx+Dx^2$，其中 A、B、C、D 是由已知量组成的代数式，并把这个方程看成是点的轨迹（曲线）. 这样，一个几何问题就归结为代数问题. 所以，Descartes 的理论建立在两个观念的基础上：坐标观念；利用坐标方法把带有两个未知数的任意代数方程看成是平面上的一条曲线的观念.

基于坐标法思想，Descartes 给出了一系列新颖的结论，例如：曲线的次与坐标轴的选择无关，因此选择的坐标轴要使得方程越简单越好；在同一坐标系内写出两条不同曲线的方程，解它们的联立方程组就求出两条曲线的交点；用方程的“次”给几何曲线分类，圆锥曲线的方程是二次的（没有证明）等.

2. Fermat 的坐标几何

我们知道，Fermat 是数学史上最著名的数学家之一，在数论、代数的研究中成就卓著. 进一步地，他考虑用代数来研究曲线. 在一本《轨迹引论》的小册子中，他提出要发起一个关于轨迹的一般研究，这种研究是希腊人没有做到的. 他提出的一般原理是：只要在最后的方程里出现了两个未知量，我们就得到一个轨迹，这两个量之一，其末端就描绘出一条直线或曲线. 直线只有一种，曲线的种类则是无限的，圆、抛物线和椭圆等都是. 他明确地使用了坐标的概念，而上述“未知量”实际上就是“一类数的代表”，即变量，也就是横坐标、纵坐标.

综上所述，Descartes 和 Fermat 创立解析几何的原动力是他们对普适性方法的追求，因而解析几何具有浓厚的“方法论”色彩. 事实上，在 17 世纪的前半叶，一系列最优秀的数学家已经接近了解析几何的观念，但只有 Descartes 和 Fermat 特别清楚地意识到了创立新的数学分支的可能性. 唯有作为哲学家的 Descartes，才提出了“创造一种方法，以便用来解决所

有的几何问题，给出这些问题的所谓一般的解法”的思想；同样的，唯有作为精通数论并对字母代表数的思想能应用自如的大数学家 Fermat，才能洞察数量方法的深远意义，而且注意到代数具有提供这种方法的力量，并用代数方法来研究几何. 总之，几何、代数和一般变量概念的结合是坐标法的起源；只有像 Descartes 和 Fermat 这样具有综合性知识结构的大家，才能顺应时代的要求而发明这一对数学发展具有决定性影响的方法. 了解这一点很重要，因为这能使我们理解为什么在中学数学中要学解析几何，以及为什么解析几何课应当把重点放在对坐标法的理解和应用上，而不是把精力浪费在一些复杂的求曲线方程的代数变换上.

二、方法本质和问题本身在高考层面的思考

解析几何是用代数方法研究几何问题，那么遇到几何图形，我们把它代数化，所得坐标关系式的简洁程度和处理的简便性，就是解析几何的精妙所在，所以有观点认为：对于大众数学来说，更应该让学生接触到解析几何方法的本质，不要认为解析几何题目需要几何分析就是好题. 但解析几何问题首先是个几何问题，不能丢掉最基本的几何分析，这是从问题本身来考虑.

既然是几何问题，就从几何要研究的基本问题，比如“位置关系、长度、角度、面积”等来对高考题进行系统性的整理.

为了更加精确地刻画运动，必须精确地刻画点的位置，引入了直角坐标系，可以精确地刻画运动. 我们总期望最小的投入，最大的产出，运动中的不变性就是运动所具有的性质，所以定点定值问题和最值问题就是解析几何永恒的热点.

解析几何可以归结为“代数化”（方法本质）、“适度几何分析”（问题本身）、“结论”（作为几何图形的性质），强化学生对这一章以及整个数学的理解，学生按什么方式去理解，就决定了学生的思维方式，再通过具体的题目反复去强化这些本质的理解.

站在高考层面，几何法常常简洁，但对思维要求较高，解析几何的解题步骤常常可以归结为程序化的步骤：第一步：联立方程，韦达定理；第二步：条件坐标化（这一步对思维要求相对较高）；第三步：利用点在曲线上消元；第四步：计算验证翻译. 完全一个机械化的步骤. 正如笛卡尔所说“欧氏几何中没有那种普遍适用的证明方法，几乎每一个证明都需要某种新的、技巧性很强的想法”；代数的方法具有一般性，其推理程序也是机械化的，但它完全受法则和公式的控制，以至于“成为一种充满混杂与晦暗、故意用来阻碍思想的艺术，而不像用来改进思想的科学”.

站在高考层面，基于全国卷的研究，二者相辅相成. 新的考试说明删除了平面几何选讲，是基于这部分知识是初中就应该掌握的，这些几何中基本的分析在圆锥曲线或者立体几何中得到体现. 其实全国新课标卷一直注重几何分析，注重适度几何分析.

三、适度几何分析的理解

就是注重几何分析，但几何分析都是最基本的，比如看到直径，想到所对的圆周角为 90°，在抛物线中，借助准线构造直角梯形或直角三角形，三角形是基本的几何图形，平行常

常会有相似等等,其实全国新课标卷一直都是如此.下面以具体的高考题来展示一下.

(一)兼顾的几何分析

【例1】 (2016·全国Ⅲ,文,15)已知直线 $l:x-\sqrt{3}y+6=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A、B 两点,过点 A、B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C、D 两点,则 $|CD|=$________.

【例2】 (2016·全国Ⅲ,文,20)已知抛物线 $C:y^2=2x$ 的焦点为 F,平行于 x 轴的两条直线 l_1,l_2 分别交 C 于 A、B 两点,交 C 的准线于 P、Q 两点.

若 F 在线段 AB 上,R 是 PQ 的中点,证明 $AR\parallel FQ$.

解读:2016 文科高考题呈现的特点,既可以用几何分析,也可以通过解析法,对几何的思维要求也比较低.

【例3】 (2016·全国Ⅰ,理科,20)设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A,直线 l 过点 $B(1,0)$ 且与 x 轴不重合,l 交圆 A 于 C、D 两点,过 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E.

证明:$|EA|+|EB|$ 为定值,并写出点 E 的轨迹方程.

解读:由平行得角相等,得到等腰三角形,这是最基本的几何分析.

【例4】 (2014·新课标Ⅱ,20)设 F_1,F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点,M 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直,直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N.

(1)若直线 MN 的斜率为 $\dfrac{3}{4}$,求 C 的离心率;

(2)若直线 MN 在 y 轴上的截距为 2,且 $|MN|=5|F_1N|$,求 a,b.

解:(1)略.

(2)(几何法)根据相似及 $|MN|=5|F_1N|$,得 N 的坐标,根据点在曲线上,构建方程.

解析法:$\because$ 共线及 $|MN|=5|F_1N|$,$\therefore \overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{F_1N}$,从而转化为坐标之间的关系.

(二)注重几何分析,几何分析和解析法相辅相成

【例5】 (2016·全国Ⅰ,理科,10)以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A、B 两点,交 C 的标准线于 D、E 两点. 已知 $|AB|=4\sqrt{2}$,$|DE|=2\sqrt{5}$,则 C 的焦点到准线的距离为 ( )

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

解读:直线和圆相交,垂径定理构造直角三角形(几何),这是解决问题的关键,也是最基本的几何分析,由抛物线对称性,可以得到 A 的坐标(代数),把半径表示出来.

【例6】 (2017·全国Ⅰ,15)已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点为 A,以 A 为圆心,b 为半径做圆 A,圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M、N 两点. 若 $\angle MAN=60°$,则 C 的离心率为________.

解读:看到直线和圆相交,垂径定理是条件反射,在构造的直角三角形中(几何),注意到

渐近线的斜率为 $\tan\alpha$(代数),可以表示出来,从而根据离心率和渐近线的关系可以求得离心率.

【例 7】 (2017・全国Ⅱ,16)已知是抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点,M 是 C 上一点,FM 的延长线交 y 轴于点 N. 若 M 为 FN 的中点,则 $|FN|=$________.

解读:由 M 为 FN 的中点,联想到中位线(几何),求出 M 的横坐标,通过焦半径公式(代数),可求得 $|FN|$ 的一半.

(三)几何法优化解题策略,平面几何选讲中圆的知识融入其中

【例 8】 (2017・全国卷Ⅲ,文,20)在直角坐标系 xOy 中,曲线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于 A、B 两点,点 C 的坐标为(0,1). 当 m 变化时,解答下列问题:

(1)能否出现 $AC\perp BC$ 的情况? 说明理由;

(2)证明过 A、B、C 三点的圆在 y 轴上截得的弦长为定值.

解:(1)略.

(2)(解析法)设而不求,这里面含有 m,对运算依然提出较高要求;(几何法)注意到相交弦定理可得 $|OD||OC|=|OA||OB|=|x_1||x_2|=2$,迅速得到答案,平面几何选讲中圆的知识融入其中.

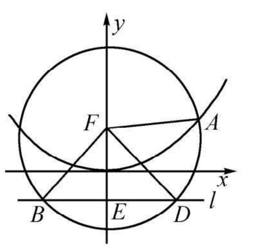
【例 9】 (2016・全国Ⅲ,理科,16)已知直线 $l:mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A、B 两点,过 A、B 分别做 l 的垂线与 x 轴交于 C、D 两点. 若 $|AB|=2\sqrt{3}$,则 $|CD|=$________.

解读:由弦长可以求出直线方程,注意到直线恒过定点$(-3,\sqrt{3})$,且定点位于圆上,是典型的舍而敢求的结构,很容易求出 A、B 两点,C、D 两点易求. 当然注意到直线的倾斜角为 30°,在图中的等腰梯形 $ABCD$ 中构造直角三角形,容易求出 CD,这几何分析是几何中常常用到,且是最基本的,借助它优化了解题策略.

【例 10】 (2012・全国新课标,20)设抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F,准线为 l,$A\in C$,已知以 F 为圆心,FA 为半径的圆 F 交 l 于 B、D 两点.

(1)若 $\angle BFD=90°$,$\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$,求 p 的值及圆 F 的方程;

(2)若 A、B、F 三点在同一直线 m 上,直线 n 与 m 平行,且 n 与 C 只有一个公共点,求坐标原点到 m,n 距离的比值.



解:(1)注意到抛物线的对称性得 $\triangle BFD$ 为等腰直角三角形,容易求出 BD 和圆的半径,而高是 A 到准线的距离,即焦半径,也是圆的半径.

(2)求直线的基本思路，确定两点或一点及斜率(倾斜角).

(解析法)把几何的位置关系代数化，考虑到 AF、BF 长度相等且三点共线，则点 A、B 关于 F 对称，根据 B、F 的信息，以及点 A 在抛物线上，所以求出 A 点坐标，从而确定直线 AB.

(几何法)在圆看到直角，迅速反应所对的圆周角为 $90°$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，再次注意到抛物线的定义，有 $AD=AF=\frac{1}{2}AB$，从而得到直线 AB 的斜率为 $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，从而确定直线 AB 方程.

解读：由上分析，几何分析都是抛物线和圆最基本最重要的几何分析，甚至应该形成条件反射，而几何分析的应用极大地简化了解答过程.

(四)引入运动变化的观点，展示整个变化过程，直观明了，以形辅数

【例 11】 (2013·新课标Ⅰ,20)已知圆 $M:(x+1)^2+y^2=1$，圆 $N:(x-1)^2+y^2=9$，动圆 P 与 M 外切并且与圆 N 内切，圆心 P 的轨迹为曲线 C.

(1)求 C 的方程；

(2)l 是与圆 P，圆 M 都相切的一条直线，l 与曲线 C 交于 A、B 两点，当圆 P 的半径最长时，求 $|AB|$.

解读：圆 P 的半径最长，首先是通过运动变化，对特殊位置的考查，得到答案，再从几何角度加以证明，在求公切线的时候，解析法是通过切线建立两个方程，也可以从几何角度，构造直角梯形及相应的直角三角形.

【例 12】 (2015·天津)已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-c,0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，点 M 在椭圆上且位于第一象限，直线 FM 被圆 $x^2+y^2=\frac{b^2}{4}$ 截得的线段的长为 c，$|FM|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1)求直线 FM 的斜率；

(2)求椭圆的方程；

(3)设动点 P 在椭圆上，若直线 FP 的斜率大于 $\sqrt{2}$，求直线 OP(O 为原点)的斜率的取值范围.

解：(1)略.

(2)$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

(3)由 $k_{FP}=\sqrt{2}$ 及 P 点在椭圆上，可以求出 P 点坐标 $-\frac{3}{2}$ 或 0，结合图象分析出 $x_P\in\left(-\frac{3}{2},-1\right)$，$y_P<0$ 或 $x_P\in(-1,0)$，$y_P>0$，从而可以先确定答案，再构造函数来证明.

四、把解析几何视为一个系统，注重各部分内在的共通性

我们可以把解析几何分为“直线和圆”“圆锥曲线”“极坐标和参数方程”这三大块，从形式上看，各种曲线有各自的特点，处理方式各有不同，但仔细地往深处想，其实很多特点和处理的方式又是相通的，比如：除了圆锥曲线第二定义之外，也可以根据与两定点斜率之积为常数得到，还可以由到两定点距离的和、差、商为常数得到. 直线是由两点，或一点、斜率来确定的；圆是由圆心和半径确定的；圆锥曲线的定义就是椭圆产生的方式. 由此可以看到求直线、圆和圆锥曲线的基本方法：求解曲线方程，引入未知数，并且解出，这就是我们常用的待定系数法，根据不同的需要，选择不同的表达式. 虽然几种曲线各不一样，但我们却看到，从根本上来说，所用的方法是完全一样的.

本书打破各个章节的限制，根据其共同的问题及处理的方式把各种曲线统一为一个系统来解读.

五、运算的突破

为了突破解析几何中运算这个难点，本文从“设”“设而不求”“设而敢求”“设置合理的运算途径”四个大的方面，十三个小的技巧来系统性地处理运算.

学习的境界

金庸大师是创作武侠小说的集大成者，他对“武学之道”理解得非常透彻，我们借用其笔下的人物来谈学习的境界.

一、勤奋为本，大智若愚

射雕英雄传中的郭靖：七个师傅教得气急败坏，实在太笨了，一代宗师洪七公教了一上午，一招都学不会，最后说了一句，以后出去，千万别说是他教的，怕坏了他的名声. 以智商而论，郭靖肯定比我们低很多，但他却能成为一代大侠，即使一上午一招都没有学会，他仍然坚持练，连黄蓉叫他吃饭，他都要学了这一招才吃饭. 首先让我们看到的是勤奋，他身上还有很多优秀的品质，比如对国家的忠、对父母的孝、对老婆的爱、对朋友的义.

钱钟书说：绝顶的天才很多时候就是用常人看起来最笨的方法来做很多事情. 曾国藩在家里读书，小偷想等他睡着了，再去偷，结果他反复背一篇文章，都没有背住，小偷气死了，直接把那篇文章背了一遍就直接走了. 学习不是去比谁更聪明，而是比谁更踏实、谁更认真.

二、活

下面是笑傲江湖中的令狐冲在思过崖和风清扬的对话：

第一个场景:令狐冲把“有凤来仪”和“白虹贯日”这截然不同的两招,怎么也连不到一起.风清扬说:“把剑朝下,顺势一推不就出来了吗?”

第二个场景:令狐冲的剑被田伯光打掉了,风清扬说:“这一招难道一定要用剑吗? 手指头也是剑.”

第三个场景:令狐冲惊讶地发现刻在石壁上的精妙的华山剑法被魔教长老一下子就破解了,风清扬说:“就武学而论,这些魔教长老理解还不是最深刻的,只要是有招,就一定有破解之法,可他们不知道,‘招式’是死的,而人是活的,即使你破解得再精妙,遇见了‘剑’法活的人,就肯定束手无策.”

第四个场景:风清扬叫令狐冲把招式全部背下来,反复练习,融会贯通,然后全部忘掉,武学之道讲究行云流水,和敌人对打的时候,想到哪招就出哪招……

华山派有剑宗与气宗之争,剑宗是以练剑为主、气为辅;气宗则是以练气为主,剑为辅.两者相比,剑宗成长快,但后继无力;气宗成长慢,但后劲十足,这是表面现象.实际上两宗都是剑气兼修,剑气相辅相成,到后来都是以气御剑,否则难成大器.

变通,活学活用是学习的第二个境界.

三、通

倚天屠龙记中的张无忌在学乾坤大挪移的时候,只花了几个时辰,就超过了别人很多年都不到的境界,因为他之前学的九阳神功帮他打通了“任督二脉”,从而学什么都很快.其实学习也是如此,如果我们能够通过学习和思考,抓住本质,想清楚很多道理,打通思维上的“任督二脉”,那学什么都会很快.

我们看到很多企业家挣钱的效率非常高,而对于他们很多人来说,在社会上挣到的第一桶金是非常重要的,而这第一桶金往往包含着企业家的勤奋和智慧,也包含着企业家的曲折和辛酸.我们在学习上讲效率的时候,我们是否也经历了在学习上的第一桶金积累的过程,是否也经历了勤奋、曲折、辛酸和智慧的过程呢?

艺术天马行空和科学格格不入,但爱因斯坦小提琴拉得非常好,说:“音乐和物理是相通的”,很多世界一流大学,比如剑桥大学非常注重音乐、绘画等艺术这些通识教育,学习到一定境界之后,很多东西都是相通的.

四、教为不教,学为创造

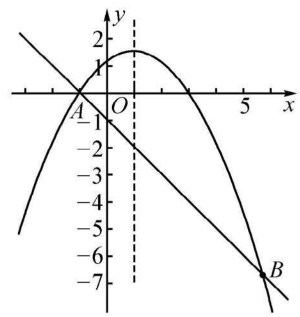
杨过根据自己的人生经历和对武学的理解,自创了“黯然销魂掌”.老师教的目的是为了不教,即学生自己会思考、学习和探索.学生学的目的,不仅是掌握知识,更重要的利用所学的知识和思想去创造出更多价值.

“取势、明道、优术”在解题教学中的应用

“正心、取势、明道、优术”最早出自于道德经，孙子兵法也有记载，道家、兵家、企业家和教育家等都把这句话用于各个领域.对于这么深刻的一句话，我们也可以尝试运用于教学，笔者发现，对这句话的良好运用，能让解题教学发生质的飞跃.

一、“取势、明道”才能把题讲透，优化解题策略

【例1】 若直线 $y=ax+a$ 与抛物线 $y=ax^2-2ax-3a(a<0)$ 交于 A,B 两点，$A(-1,0)$，$B(4,5a)$，抛物线上有一动点 C，问在对称轴上是否存在点 D，使得以 A,B,C,D 四点构成一个矩形?



这是某市最好的一个学校的高一学生入学考试的最后一题的最后一问，我们惊讶地发现，在整套试卷容量小、难度小的情况下竟然无一人做对.

中考有很多类似这样的题目，学生做了无数回，但到最后即使一个市最优秀的学生也无法突破，我们教学的问题在什么地方?

对于解题，我们绝大多数人停留在“术”的层面，只是在方法中打转，思维水平没有质的提升.

其实我们可以这样思考：有了坐标系之后，我们就把抛物线和直线这些几何图形用代数的方程或函数表示出来，然后从代数的角度去解决，这就是解析法.由此看到解析法的本质在于用代数方法研究几何问题(势：本质)，基本思路就是尽可能地把几何中的关系代数化(道：想清楚方法的原因)，并且希望得到的代数关系式更加简洁和更容易处理(优术).

对于数学来说，我们追求通性通法，但对于特殊问题，往往也有特殊的处理技巧.我们不应该完全排斥技巧，更不应该纯粹地追求技巧，而是应该站在势和道的高度来思考，如何让技巧在我们思维的世界里显得朴素且自然.

解：整体思维，以确定 A,B 点进行分类：(1)A,B 相对；(2)A,B 相邻.

以任意一种情况为例，设 $C(x_0,ax_0^2-2ax_0-3a)$，$E(1,m)$，如果求出 m，我们的问题就解决.

$$\text{矩形的性质}\begin{cases}\text{四个角是直角}\Rightarrow\begin{cases}\text{斜率乘积为 }-1\\ \text{或勾股定理}\end{cases}\Rightarrow\text{得到 }a\text{ 和 }m\text{ 的方程(1)}\\ \text{对角线相等(对称性)：把 }m\text{ 和 }x_0\text{ 求出来或用 }a\text{ 来表示(2)}\end{cases}$$

联立(1)、(2)即可得到，用这种方式去思考解析几何中的问题，很多都很容易突破.利用斜率比用勾股定理运算量更小，用对称性，两对角线的中点一样来构建方程显然比用距离相等更优化.

【例2】 在直线上求一点，使其到 A,B 距离之和最小.

变式 1 已知 $A(2,1)$，在直线 x 轴及 $l_2:y=x$ 上分别找两点 B,C，使得△ABC 周长的最小值，求出周长的最小值.

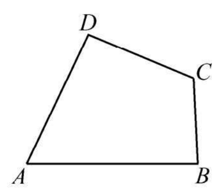
变式 2 已知点 P 在抛物线 $y^2=4x$ 上，那么点 P 到点 $Q(2,-1)$ 的距离与点 P 到抛物线焦点距离之和取得最小值时，点 P 的坐标为________.

变式 3 已知 F 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左焦点，$a(1,4)$，P 是双曲线右支上的动点，则 $|PF|+|PA|$ 的最小值为________.

拓展 (2013·天津竞赛)设 M 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上的动点，又设 $F(1,0)$，$P(3,1)$，则 $2|MF|-|MP|$ 的最大值为________.

不少学生很难实现从例 2 到变式 1 的跨越，关键是没有想清楚这样做的理由，只是停留在对方法模仿的地步，所以达不到质的提高. 求线段值最小的基本原理就是：两点之间线段最短. 例 2 利用对称性把同侧线段之和转化为异侧线段之和，就能很好地利用这个公理. 而高中只是把直线变成了曲线. 初中利用对称性，高中利用曲线的定义，其本质没有变. 所以在教学中，我们要不断地去追问，为什么要选择这个方法，选择这个方法的好处在什么地方？只要把初中最基本题目的方法想清楚了，很多高考题，乃至竞赛题诸如变式 2、变式 3、拓展就只是初中题的一个变式而已，换言之，知识是不一样的，但所蕴含的思想和方法是相通的.

【例 3】 (2015·四川)如图，A,B,C,D 为平面四边形 $ABCD$ 的四个内角.



(1)证明：$\tan\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{\sin A}$；

(2)若 $A+C=180°$，$AB=6$，$BC=3$，$CD=4$，$AD=5$，求 $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}$ 的值.

这道题第(2)问，只要学生写了余弦定理，老师就给分，在这么宽松的情况下，这道题全省平均得分仅 3.8 分. 该四边形的两对角互补，再结合(1)的结果，有 $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}=\frac{2}{\sin A}+\frac{2}{\sin B}$，在四边形中由边长关系求解角，连接 BD，即就变成解三角形的问题. 学生的问题在于只会用正余弦定理，而不知道利用方程的思想求解. 所谓解三角形就是由已知三个独立要素求未知要素或相关要素的过程. 由已知到未知，方程是基本工具，由此看到方程的思想应该是这一章的基本思想，这和小学列方程解应用题是一样的，只是小学要去找等量关系，而解三角形是有等量关系(正余弦定理)，却要分析在哪个三角形中用；当然我们不能够脱离图象纯粹地考虑正余弦定理，那么考查的是代数变形，必须经常回到图形中去思考. 其实 2013 和 2014 年很多省份出现越来越多的用回归图形去解三角形，2013 年全国卷的解三角形中利用方程的思想，如果我们把握住了解三角形的本质和考查的趋势，一定

会有不一样的结果.

二、如何取势

取势为根本,那什么是势,可以理解为三层含义:其一为本质;其二为事物发展的趋势;其三构建良好的知识、思想方法体系.

(一)如何抓住问题的本质

1. 透过本质看现象——不断回到定义中去思考

万变不离其宗,"宗"即"本质";以不变应万变,"不变"为"本质",举一反三,"一"是"根本特征". 那如何抓住本质,哲学书上说要透过现象看本质,对数学纯属瞎说,比如数学是什么?学生透过了十年的现象来看本质,完全没有抓住本质. 反过来,如果我们让学生去阅读一些对数学本质的描述,比如"数学是研究数量关系和空间形式的科学……"让他们在学习的过程中不断地去体会,老师不断地去强调,这时候他的理解又是完全不一样的.

我们看到很多专家很轻易地透过现象看到了本质,其实在那之前,他已经有了系统的研究方法和抓住了问题的本质,当他再看到现象的时候,与其说是透过现象看本质,还不如说他是透过本质看现象. 我们有太多的实例可以佐证,所以我们不仅要透过现象看本质,更要透过本质看现象,在现象和本质之间来回走几次之后,我们才能更好地透过现象看本质.

在数学中,定义就是一类事物共同的本质特征的概括,所以我们要不断地回到定义中去思考,这就是透过本质看现象.

2. 思考事物的视角——一般性和特殊性

我们要把一个人研究清楚,需要"洞悉人性,洞察人心",是人都有人性,于是从人性的角度为我们指明了基本方向,而每个人又各具特色,所以洞察人心,又要考虑其特殊性. 思考问题的一般性和特殊性是我们思考问题的两个视角:一般性为我们指明了研究的方向;紧扣事物的特殊性,我们能更好地研究和把握问题的本质.

比如在我们遭遇了数列的教学困惑时,我们从一般性的观点来看,即从函数的观点来看,我们知道要研究函数的对应关系——数列的通项公式,考虑到数列的特殊性,递推关系也是数列的一种极其重要的表达形式;从函数的观点看,数列的单调性、最值、对称性、周期性都是需要研究的,考虑到数列的特殊性,其单调性的研究方法又有所变化.

3. 训练的方法

抓住本质的方法并不是天生的,而是可以训练的. 当你在和别人讨论的时候,如果你要用十句话讲清楚的东西,你只用五句,你的水平就有明显质的提高;当你能用三句话就把它讲清楚的时候,你的感受又是不一样的;如果你能够用一两句把它说清楚的时候,往往这一两句话就是问题的关键和本质所在.

专家的话,一些优秀老师的话,他们对事物深刻地认识有着丰富的背景,而学生理解的深度是不一样的,甚至同一个班的学生理解起来,差异都很大,因为我们大部分都是接受式学习,所以这更为明显. 这时候,就需要学生在实际的学习和解题过程中,反复去体会和应用

老师所说的话.

(二)如何把握事物的趋势

对课改思想的渗透和反复体会.

(三)构建学生良好的认知结构

1. 拉出主线,把握联系

大部分学生的知识都是以零散的点状分布,甚至有些点都是不清楚的. 在教学过程中,我们首先要搞清楚每一个点,对每一个知识点,我们能够迅速回忆出两三个经典的题目,这才叫掌握. 还要启发学生去思考,去感知整章、整块,乃至整个高中数学知识的发生、发展过程,即教材的编写思路,这是学习知识的线索,同时去挖掘知识的内在联系,形成一个良好的知识体系.

2. 融能力、思想、重难点和易错点于一体,立体式打造认知结构

数学知识是载体,思想和方法是灵魂,每讲完一章,我们都应该给学生梳理一下这一章的核心思想,以及学生需要构建的核心能力.

比如我们讲完了集合,集合分为三块:集合的含义及表示、集合间的基本关系和集合的运算. 往下细数每一个知识点就是在构建学生的知识体系. 在集合的关系和运算中,我们需要考虑空集的情况,这是分类讨论的思想;结合 Venn 图、数轴帮助分析,这是数形结合的思想;补集的应用体现了“正难则反”的思想. 集合从根本上来说是一种语言,那对集合最基本且最重要的是:你要知道这个集合说的是什么. 当然对于语言的学习,需要我们实现“自然语言”“符号语言”“图形语言”之间的转化.

3. 形成解决问题的基本观点,是认知结构质的飞跃

哲学说运动是绝对的,那我们就可以用运动变化的观点来看待一切事物,迅速让这种观点变得深刻.

比如:从函数的观点看方程其实就是给“静止的方程”一个“运动变化的过程”. 在过程中判断,在过程中逼近. 在某点的导数就是在这一点的瞬时变化率,在一个点上研究是困难的,因此我们建立导数这个概念,关键就是把一个点的变化拓展到了一个范围的变化,然后再逐步逼近,导数的几何意义就向我们非常直观地展示了整个变化逼近的过程. 立体几何中的锥体、球体等旋转体都可以看着平面图形绕着某条对称轴旋转而成. 要建立学生的空间想象能力,关键是要让学生在运动变化中感受和想象. 我们把角的范围推广到任意角是基于角运动变化的概念,圆、椭圆、双曲线的引入中,学生感受到了运动的奇妙,而解析几何通过直角坐标系的引入可以更好地用数量关系去精确地刻画运动.

我们应该把更多的哲学观点引入高中,来看待高中数学的教学,并且结合数学实例,以生活化的方式解读,这样既有趣有深刻. 同时也注重一些思想方法的结合,形成解决问题的良好模式,其模式就是基本观点.

解题教学的“艺术性”

一、上通哲学，下联生活

数学讲到最后一定是在讲一些处理问题的思想和观点，而这些都在哲学里，所以教学的艺术在于把深刻的哲学观点，通过具体的教学实例，结合生活，生动形象的讲出. 那我们在教学中要不断去挖掘数学内部深刻的思想，上升到哲学层面，形成一些观点，再结合生活，显得亲切自然，从题目到哲学，再到生活，最后到题目的循环，能让人想透很多东西.

【例 1】 求下列函数的最值.

(1) $f(x)=x^2-2x, x\in[2,3]$； (2) $f(x)=x^4+2x^2-1$；

(3) $f(x)=-x^2+2|x|+3$； (4) $f(x)=x+\sqrt{2x-1}$.

上述四个问题都可以通过“换元法”转化为二次函数来处理，做完之后，我们就要进一步分析这些题型的共同特征是什么——都是最高次项是另外一项次数的两倍，进一步去挖掘“换元法”背后更为深刻的思想——整体的思想.“换元法”应用的广泛性凸显了“整体思想”的重要性，为什么整体的思想这么重要呢？

上升到哲学的高度，因为整体的思想凸显了事物的结构，从宏观去把握事物的结构，这是高水平的体现，与只在局部小打小闹有着质的区别. 这里面有心理学关于国际象棋的著名实验作为证明，给象棋大师和新手看实际比赛的棋局各 5 秒钟，然后打乱棋子的位置，让他们重新恢复棋局，结果发现大师恢复棋子的数量是 20～25 个，而新手平均只有 6 个，那么大师是怎么思考的呢？于是又让大师和新手看随机排列的棋局，此时恢复的棋子的数量没有差别，都是平均 6 个。我们可以得出这样的结论：当棋局随机排列时，大师和新手都把每个棋子当作一个组块，因此恢复出来的数量没有差别，当使用实际比赛棋局时，大师的组块包含了更多的棋子，或者我们可以这样理解，大师从宏观去把握结构，一块一块地看，而新手是一颗一颗地看，从整体去把握事物的结构，这是高水平的体现.

下联生活，比如迎面走来一个美女，我们不经意会说：身材真好，眼睛真大，这里面其实就蕴含着看问题的基本观点——宏观看结构，微观抓关键，让学生在笑声中感受到“这么深刻的道理，它原来朴素、自然，这么贴近生活，我们一不小心，就已经用了，那么我们更应该在数学中反复去体会这些思想.”

二、用最朴素的思想一以贯之

新知探究的思路和解题的思路都是在解决问题，它们之间的不一致导致了很多时间的浪费；很多章节，处理的核心思想不一致，也导致了很多时间的浪费. 于是我们畅想另一种境界：知识只是一种载体，呈现的方式多种多样，我们回到最朴素的、自然的思想，在不同的章

节，不断地重复这些最基本的思想.

三、特别突出观察能力

不经意的一瞥就把我们引入了深层次地思考，开启了整个研究，观察是科学发现的起点. 观察力是各种能力的基础和起点，观察力和其他能力相互促进. 苏霍姆林斯基说："思维培养训练的本质在于，让学生一边观察一边思考，一边思考一边观察，在观察中思考，在思考中观察."思维的活跃首先是视野的开阔和观察力的敏锐. "举一反三"的迁移能力首先是基于学生抓住了"一"与"三"的某种相似性.

观察能力的觉醒会激活学生在模式化训练之下半睡半醒的思维能力，从而能针对问题本身进行发散性的思考，于是才会有我们中学苦苦追求的创造力.

那现在学生的是个什么状态呢？我们以一个高考题为例来说明一下.

【例 2】 (2014·四川)设 $m\in\mathbf{R}$，过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 $P(x,y)$，则 $|PA|\cdot|PB|$ 的最大值是________.

这个题的得分率全卷最低，理科仅 0.094%，也就是说一千人不足一个人能够算正确，这太让人震撼了，这个问题出在什么地方呢？因为学生拿着就开始求交点，求距离和转化为函数，几乎不会想过去观察，观察这两条动直线之间的关系，而这正是突破这个题的关键所在. 题型教学法、题海战术等等已经让观察能力的缺失在中学已经达到了一种不可思议的地步，当务之急就在于激发学生的观察欲望和激活学生的观察能力.

【例 3】 (2015·全国)设函数 $f(x)=e^{x}(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$. 若存在唯一的整数 x_0，使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是 ( )

A. $\left[-\frac{3}{2e},1\right)$　　B. $\left[-\frac{3}{2e},\frac{3}{4}\right)$　　C. $\left[\frac{3}{2e},\frac{3}{4}\right)$　　D. $\left[\frac{3}{2e},1\right)$

这个题目，如果学生能够从一个特殊的角度切入，发现 $f(0)<0$，从而可以简化问题的求解过程，而不是直接通法求解，这既避免了特殊化的滥用，也激发了学生观察的兴趣.

培养浓厚的兴趣和对本质的思考有利于培养敏锐的观察力. 当我们刚刚觉得已经把事物认识清楚了，迅速换一个角度，甚至站在相反的立场来看问题，这应该是我们看问题的基本方法.

四、注重合情推理的应用

只有"逻辑"的数学就像是"X 光下美丽的女王"，一副骨架，毫无美感可言，数学不仅仅是逻辑推理，更需要感悟思想，弄清楚为什么会这样想，怎么来的. 我们对一个问题，连续追问几个为什么，往往就能发现问题的根本.

但面对很多新的问题，我们不是一来就有清晰的思路，更多的是借助自己的经验、直觉和观察、猜想、尝试、检验、再观察、再思考、再尝试、再检验……

有人会说：数学是严谨的学科，数学是培养逻辑思维的学科，数学是理性的代表，与感性是相互排斥的，怎么能够靠经验呢？

请记住下面的话:理性不是排斥感性,相反,它应该是使我们的感觉更加敏锐和准确.没有感性的理性,不是真正的理性.当你把一项工作做得非常超前,或者你在做一些开创性的工作时,周围能够给你提供的证据是非常有局限的,这时候你敏锐的观察力、经验和直觉就太重要了.

"成功=99%的汗水+1%的灵感",我们都非常渴望灵感,灵感来自于我们深入的思考.很多思考痕迹进入了潜意识,在潜意识中整合,形成一个模型之后,再从潜意识上升到意识的层面,突然就蹦到我们的脑海.这个整合的关键过程,我们自己都感觉不到,你说它靠不靠严谨的逻辑推理,那灵感靠什么呢?靠的是你对事物关系本质的理解,靠的就是你的经验以及你前一阶段深入的思考.

培养直觉,注重对问题经常从不同的角度观察事物,借助普遍性的真理来观察和思考,在做题的过程中不断尝试和总结.

五、从简单题看到难题的本质,真正突破难题

波利亚说:如果我们在解题的时候,能够想到一个类似的题目,我们是非常幸运的,因为往往此题的思路可以为我们所用.此书呈现的思路是:"例题……变式……拓展",从教材题目,高考基础题目逐渐深入到高考压轴题,乃至一些和高考紧密相关的竞赛试题,当学生思考压轴题遇到困难的时候,可以退回来,看看例题及变式,它们的思路和压轴题是一样的,这样就把波利亚所谓的幸运变成了必然.也只有学生发现压轴题和简单题目是一个思路的时候,其解法才会变得朴素与自然,也只有这样才可以把压轴题当常规题做,才会真正地突破压轴题.

基础一般的学生可以先不看拓展题,而基础好的、热爱数学的学生应该反复思考,这样的呈现能更好地适应不同学生的需要.当学生基础一般的学生,通过强化得到提高的时候,可以再逐渐深入到压轴题中去.

把高考压轴题和竞赛试题集中起来是非常有必要的,现在各地再次启用全国卷,而其压轴题比较规范,很容易突破,有时候会产生很多高分,比如 2016 年四川省理科 689 分是全省第 83 名,而这刚好是清华大学的最低录取分数线,理科 695 分是全省第 38 名,这是北大最低录取分数线,这一年清华大学在川的实录人数为 160 人,北大 150 人.这就意味着要在自主招生考试和竞赛有所突破.本书基于学生发展的需要,兼顾学习循序渐进的原则,同时考虑到高考压轴题和竞赛试题和自主招生考试相互改编,在拓展题方面的思路是:定位于高考压轴题,把自主招生和竞赛相关的题目融入其中.

学科素养的培养和如何举一反三

一、学科素养的培养

当学生学完函数,掌握系统性的研究方法,能够从函数的观点来看待问题,这是学科素