

泛函分析概要

【大学版】

$$(z, e_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n, e_i) = \zeta_i$$



耿如明 编著

吉林人民出版社

泛函分析概要

【大学版】

耿如明 编著

吉林人民出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

泛函分析概要 / 耿如明编著 . — 长春 : 吉林人民出版社 , 2017.8

ISBN 978-7-206-14343-4

I . ①泛… II . ①耿… III . ①泛函分析 IV .

① 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 218118 号

泛函分析概要

编 著 : 耿如明

责任编辑 : 陆 雨

封面设计 : 伊韵雪

吉林人民出版社 发行 长春市人民大街 7548 号 邮政编码 : 130022

咨询电话 : 0431-85378033

印刷 : 虎彩印艺股份有限公司

开本 : 890 × 1240 毫米

1/16

印张 : 7.5

字数 : 182 千字

标准书号 : ISBN 978-7-206-14343-4

版次 : 2017 年 9 月第 1 版

印次 : 2017 年 9 月第 1 次印刷

定价 : 28.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与印刷厂联系调换。

前 言

本书是按照原先讲授《泛函分析》这门课时自编的讲义付印的。

在编写中力求做到下面两点：第一，内容精简，力求简明扼要，但仍保持本门课程的核心部分，不影响对本门课程全面的了解，不影响本门课程的逻辑体系。第二，在选材中力求能反映出本门课程产生的历史背景和特点。

泛函分析是在近代随着微（积）分方程、变分法和线性代数等古典数学分支的发展、相互渗透、交融而产生了一些新的数学概念和方法而形成的一门新的、重要的数学分支。它的特点是综合运用分析的代数的和几何的观点和方法来研究、解决有关数学的一些问题。为了实现第二条，在选材中做了下面三点：1. 在举例中尽可能地多举一些用分析方法解决代数问题的例子。2. 在第一章中选取“压缩映象原理”，着重介绍了用它统一解决微分方程等各类方程解的存在和唯一性问题以及函数的逐次逼近法。3. 在第三章中选取了“射影算子”，显示泛函分析与几何的关联性。

本书可作为对本门课程要求不特别高的专业课本或参考书，也可供有实变函数基础的爱好者自学用书。

由于水平有限，书中难免有不当之处请指正。

在教学过程中得到邹毅平同志不少协助，谨此致谢！本书的电子稿由孙女耿杪冉制作。

耿如明

2017 年暮春

泛函分析概要

目 录

前言

第一章 距离空间	1
1. 算子和泛函数	1
2. 距离空间	2
3. 距离空间的完备性	13
4. 距离空间的可分性	22
5. 距离空间集合的列紧性	26
6. 压缩映像原理及其应用	33
第二章 线性赋范空间与线性算子	39
1. 线性赋范空间（巴拿赫空间）	39
2. 线性流形和线性子空间	43
3. 线性算子	48
4. 线性算子空间	52
5. 希尔伯特空间	59
第三章 线性泛函	71
1. 线性赋范空间上的线性泛函	71

2. 一些具体空间内连续线性泛函的一般形式	78
3. 共轭空间	85
4. 弱收敛性	89
第四章 希尔伯特空间内自共轭算子的谱论初步	91
1. 自共轭算子	91
2. 自共轭算子的谱	94
3. 具纯点谱的算子——全连续自共轭算子	101
4. 射影算子	104
5. 正算子及其平方根	109
主要参考书目.....	112

第一章 距离空间

1. 算子和泛函数

算子和泛函数（简称泛函）的概念是数学分析中函数概念作更一般化的拓广，使它能应用到更复杂和更抽象的对象上去。

定义 设给定两个集合 X 和 Y 及某种法则。若对每一个 $x \in X$ ，按给定的法则都有一个确定的 $y \in Y$ 和它对应，我们就说在集合 X 上定义了一个算子（或抽象函数、映象），记作 $y = Ax$ ， $y = f(x)$ 。元素 y 叫作 x 的象， x 叫作 y 的原象。原象的集合叫作定义域。含于 X （或与 X 重合）；象的集合叫作值域，含于 Y （或与 Y 重合）。特别，若值域含于实数集或复数集，则称这种算子为泛函。

例 1 由下式表示的微分

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

就是一个算子，叫微分算子 $y = Ax$ 。

例 2 设 n 维欧氏空间中元素 $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ 由矩体 (a_{ij}) $\begin{matrix} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n \end{matrix}$ 通过关系式

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \quad i=1,2,\dots,m$$

定义了一个算子 $y = Ax$ ，这里 $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m\}$ 为 m 维欧氏空间的元素。这个算子在线性代数中叫线性变换。

例 3 在 $\{a, b\}$ 上可积函数的定积分

$$y(x) = \int_a^b x(t) dt$$

定义了一个泛函。

2. 距离空间

一般概念 在数学分析中，我们要研究函数的性质，首先要研究函数的定义域——实数集的性质。同样，要研究算子的性质，首先也要研究它的定义域的性质。但算子的定义域是任何集合，而集合仅是具有某种共同属性的对象的全体，不具备任何“数学性质”。因此我们要赋予集合以各种性质，形成“空间”，然后来研究这些“空间”的性质。并进而研究定义在这些“空间”上（内）的算子的性质。这些就是泛函分析的基本内容。

首先，一个基本的性质是“距离”。因为在分析数学中我们知道，研究各种收敛问题都基于距离这一概念。本章主要讨论规定了距离的集合——“距离空间”的一些重要性质。

定义 1 设有集合 X ，对其中每对元素 x, y 令其对应一个非负实数 $\rho(x, y)$ ，若满足下列条件（距离公理），

- 1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 恒等公理；
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ 对称公理；
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ 三角形公理，其中 $z \in X$ 。

则把 $\rho(x, y)$ 叫做 x 与 y 的距离， X 叫做距离（度量）空间。

由定义直接可知，距离空间的任一集合 Y ，若以它的元素在 X 内定义的距离作为在 Y 内的距离，则 Y 也是一个距离空间，叫做 X 的子空间。

开集和闭集 在距离空间内，可以类同于分析学中的方法引进开集、闭集等概念。

定义 2 在距离空间 X 中满足不等式 $\rho(x, a) < r$ （或 $\leq r$ ）的点的全体叫做以 a 为中心，以 r 为半径的球（或闭球）。用 $S(a, r)$ （或 $\bar{S}(a, r)$ ）表示。球也叫做邻域。

完全含于某个球内的集合叫做有界集。

定义 3 设 M 为距离空间 X 的子集， $a \in X$ ，若对 a 点的任意邻域至少含有 M 的一个点，即对于任意的 r 都有 $S(a, r) \cap (M - a) \neq \emptyset$ ，则把 a 叫做 M 的聚点。集合 M 和它的所有聚点的集合叫做 M 的闭包。用记号 $\overline{M}$ 表示。再设 $b \in M$ ，

若存在邻域 $S(b, r)$, 使得 $b \in S(b, r) \subset M$, 则说 b 为 M 的内点。

闭包具有下列基本性质:

- 1) $\overline{M + N} = \overline{M} + \overline{N}$;
- 2) $M \subset \overline{M}$;
- 3) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$;
- 4) $\overline{\phi} = \phi$ 。

定义 4 若 $M = \overline{M}$ (或 M 中的点都是 M 的聚点), 则把 M 叫做闭集; 若 M 中的点都是 M 的内点, 则把 M 叫做开集。

定义 5 若 $\overline{M} = X$, 则说 M 在 X 内到处稠密。若 X 内每个球都含有某个球, 使后一球不含有 M 的点, 则说 M 在 X 内稀疏。

极限 分析学中极限概念和有关于极限的一些基本性质都可以拓广到距离空间中来。

定义 6 设 $\{x_n\}$ 是距离空间 X 的序列, 若有 $x \in X$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$\rho(x_n, x) \rightarrow 0$, 则把 x 叫做 $\{x_n\}$ 的极限。记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ 或 $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$ 。

距离空间 X 中的收敛点列有下列基本性质。

定理 1 (极限的唯一性) 距离空间 X 中的点列 $\{x_n\}$ 不能收敛于一个以上的极限。

定理 2 若距离空间 X 的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x , 则它的任一收敛子列也收敛于 x 。

以上的两定理证明与分析学中的证法完全类似, 略去不证。

定理 3 若 X 的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in X$, 则点列在下述意义下有界: 对任一确定的 $y \in X$, 数列 $\rho(x_n, y)$ 有界。

证 $\rho(x_n, y) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, y)$, 因为 $x_n \rightarrow x$, 故 $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$, 从而有界, 设为 a 。又 $\rho(x, y)$ 为常数设为 b , 故对任意 n 都有

$$\rho(x_n, y) \leq a + b = M$$

故数列 $\rho(x_n, y)$ 有界。

有了极限的概念，就可以定义算子（或泛函）连续的概念。

定义 7 设 A 是定义在距离空间 E 上（内）的算子（或泛函），其值域含于距离空间 E_1 内，对于任意的 $x \in E$ ，若对于任意一个收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ ，当 $x_n \rightarrow x$ 时，都有 $Ax_n \rightarrow Ax$ ，则说算子（或泛函） A 是连续的。

距离空间的例子

例 1 n 维欧几里德空间 设 X 是 n 个实数的有序组的集合，对其中任意二元素 $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ 和 $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ ，令

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2} \dots\dots\dots (1)$$

这样的 $\rho(x, y)$ 满足距离公理（1），（2）是显然的。要验证公理（3），先证明著名的哥西——布涅柯夫斯基不等式

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2$$

设 $X = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ， $Y = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 为 n 维向量，则有

$$(X \cdot Y)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \quad |X|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad |Y|^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$$

引进向量 $Y + tX$ （ t 为任意实数），有 $|Y + tX|^2 = |Y|^2 + 2t(XY) + t^2|X|^2 \geq 0$ 。把此式看作关于 t 的二次三项式要使其为非负，必须且只须判别式

$$4(X \cdot Y)^2 - 4|X|^2|Y|^2 \leq 0$$

于是得

$$(X \cdot Y)^2 \leq |X|^2|Y|^2$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2} \\ &+ \sum_{i=1}^n b_i^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2 \end{aligned}$$

再令 $z = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\} \in X$, $a_i = \xi_i - \zeta_i$, $b_i = \zeta_i - \eta_i$

则 $\xi_i - \eta_i = a_i + b_i$, 于是

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \zeta_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (\zeta_i - \eta_i)^2} = \rho(x, z) + \rho(y, z) \end{aligned}$$

这样, 我们证明了由 (1) 式规定的 $\rho(x, y)$ 满足距离公理, 因而 $\rho(x, y)$ 是距离, X 是距离空间, 叫做 n 维欧几里德空间, 记为 E_n , 相应的距离叫做欧几里德距离。在上述集合 X 中, 我们也可规定 $\rho_1(x, y) = \max_i |\xi_i - \eta_i|$, $i = 1, 2, \dots, n$ 它满足距离公理 (1), (2) 是显然的。下面验证公理 (3)

$$|\xi_i - \eta_i| \leq |\xi_i - \zeta_i| + |\zeta_i - \eta_i| \leq \max_i |\xi_i - \zeta_i| + \max_i |\zeta_i - \eta_i|$$

对一切 i 成立, 所以有

$$\rho(x, y) = \max_i |\xi_i - \eta_i| \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

由此, 我们证明了 X 在 $\rho(x, y)$ 的意义下也是距离空间, 但不叫欧几里德空间。

下面讨论 E_n 中的收敛。设 $x_k = \{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)}\}$, $k = 1, 2, \dots$, 若 $x_k \rightarrow x$,

即 $\rho(x_k, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i^{(k)} - \xi_i)^2} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$ 。则必须且只须 $\xi_i^{(k)} \rightarrow \xi_i (k \rightarrow \infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。

因此欧几里德空间的收敛是依坐标收敛。

例 2 连续函数空间 X 为定义在 $[0,1]$ 上的所有连续函数的集合, 对其中任意二元素 $x(t), y(t)$, 令

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)|$$

容易验证它满足距离公理。因此 X 是一距离空间, 叫做连续函数空间, 记作 $C(0,1)$ 。

(注: 若变数 $t \in [a, b]$, 则可作变换 $S = \frac{t-a}{b-a}$ 引入新变量 $S \in [0,1]$, 因此对于定义在任何闭区间上的函数, 都可变换为定义在 $[0,1]$ 上。)

下面讨论 $C(0,1)$ 中的收敛。设 $C(0,1)$ 中一序列 $\{x_n(t)\}$ 收敛于 $x(t) \in C(0,1)$, 即 $\rho(x_n(t) - x(t)) = \max_{t \in [0,1]} |x_n(t) - x(t)| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 这表明 $x_n(t)$ 一致收敛于 $x(t)$; 反之, 若 $x_n(t)$ 一致收敛于 $x(t)$, 则也必有 $\rho(x_n(t) - x(t)) \rightarrow 0$ 。所以在空间 $C(0,1)$ 中依上述规定的距离的意义下的收敛是在 $[0,1]$ 上的一致收敛。

例 3 有界数列空间 设 X 为所有有界数列 $\{x_n\}$ 所组成的集合。对任意二元素 $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$ 和 $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots\}$, 令 $\rho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|$

对于距离公理 (1), (2) 显然是满足的, 下面验证 (3)。设 $z = \{\zeta_i\} \in X$, 则有 $|\xi_i - \zeta_i| \leq |\xi_i - \eta_i| + |\eta_i - \zeta_i| \leq \sup_i |\xi_i - \eta_i| + \sup_i |\eta_i - \zeta_i|$

对一切 i 成立, 因此有 $\rho(x, z) = \sup_i |\xi_i - \zeta_i| \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

因此, X 是一距空间, 叫有界数列空间, 或 m 空间。

设 $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$ 收敛于 $x = \{\xi_i\}$ 即 $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$, 也即 $\sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \rightarrow 0$ 对一切 i 一致成立。反之, 若对一切 i 都有 $|\xi_i^{(n)} - \xi_i| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。则 $\sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \rightarrow 0$, 即 $\rho(x_n, x) \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$ 。因此 m 空间内的收敛是依坐标的一致收敛。

对于所有收敛数列的集合 X , 显然 $X \subset m$, 因此若利用 m 空间的距离, 则也是一距离空间, 叫做 c 空间。其中的收敛也是依坐标的一致收敛。

例 4 p 幂可积函数空间 设 X 是所有满足 $(L) \int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty$

的函数的集合。规定 $p \geq 1$, 当 $p=1$ 时, 即为可积函数集合。两个仅在零测度上互异的函数看作恒等。对于 X 中任意两个函数 $x(t)$, $y(t)$, 令

$$\rho(x, y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

为了说明这种规定的合理性, 要先证明 $x \pm y \in X$, 即

$$\int_0^1 |x(t) + y(t)|^p dt < \infty$$

这只要应用不等式

$$|a + b|^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p)$$

即可。事实上, 令 $a = x(t)$, $b = y(t)$, 则有

$$|x(t) + y(t)|^p \leq 2^p (|x(t)|^p + |y(t)|^p)$$

所以 $\int_0^1 |x(t) + y(t)|^p dt \leq 2^p \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt + \int_0^1 |y(t)|^p dt \right) < \infty$

这样规定的 $\rho(x, y)$ 显然满足距离公理 (1), (2)。为了验证三角形公理, 首先要证明两个著名的不等式霍勒德尔不等式和闵可夫斯基不等式。

霍勒德尔不等式 设 $x(t), y(t) \in X$ 则有

$$\int_0^1 |x(t)y(t)| dt \leq \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |y(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

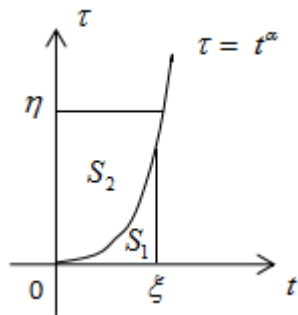
其中 $p, q > 1$, 且满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 称为相互共轭数。当 $p=q=2$ 时, 称为哥西——布涅柯夫斯基不等式。

证 考虑函数 $\tau = t^\alpha (\alpha > 0)$ 当 $t > 0$ 时, 两边求导, 有 $\tau' = \alpha t^{\alpha-1} > 0$, 即 $t > 0$ 时,

函数 $\tau = t^\alpha$ 是增函数, 于是存在反函数 $t = \tau^{\frac{1}{\alpha}}$ 。

(如右图)。任取两个正数 ζ 和 η 。在 t 轴上取它们的对应点, 并分别过这两点作坐标轴的平行线, 得到两个曲边三角形, 设其面积分别为 S_1, S_2 , 则有

$$S_1 = \frac{\zeta^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad S_2 = \frac{\eta^\alpha}{\frac{1}{\alpha} + 1}$$



从图中可以看出 $S_1 + S_2 > \xi_\eta$

等号 $\eta = \xi^\alpha$ 仅限于时成立, 由此有 $\xi_\eta \leq \frac{\xi^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{\eta^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\frac{1}{\alpha}+1}$

令 $\alpha+1 = p$, $\frac{1}{\alpha}+1 = q$, 仍满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

于是有 $\xi_\eta \leq \frac{\xi^p}{p} + \frac{\eta^q}{q} \dots \dots \dots (1)$

令

$$\xi = \frac{|x(t)|}{\left(\int_0^1 (|x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}\right)}, \quad \eta = \frac{|y(t)|}{\left(\int_0^1 (|y(t)|^q dt)^{\frac{1}{q}}\right)}$$

代入 (1) 式, 得

$$\frac{|x(t)||y(t)|}{\left(\int_0^1 (|x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_0^1 (|y(t)|^q dt)^{\frac{1}{q}}\right)} \leq \frac{|x(t)|^p}{p\left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)} + \frac{|y(t)|^q}{q\left(\int_0^1 |y(t)|^q dt\right)}$$

不等号右边时可积函数, 因而左端也是可积函数。两边取积分

$$\frac{\int_0^1 |x(t)||y(t)| dt}{\left(\int_0^1 (|x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_0^1 (|y(t)|^q dt)^{\frac{1}{q}}\right)} \leq \frac{\int_0^1 |x(t)|^p dt}{p\int_0^1 |x(t)|^p dt} + \frac{\int_0^1 |y(t)|^q dt}{q\int_0^1 |y(t)|^q dt} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

由此有

$$\int_0^1 |x(t)y(t)| dt \leq \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^1 |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

闵柯夫斯基不等式 对 p 幂可积函数 $x(t)$, $y(t)$ 有

$$\left(\int_0^1 |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

证 先证命题：若 $z(t)$ 为 p 幂可积函数，则 $|z(t)|^{p-1}$ 是 q 幂可积。事实上

$$\int_0^1 \left(|z(t)|^{p-1} \right)^q dt = \int_0^1 \left(|z(t)|^{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} dt = \int_0^1 |z(t)|^p dt < \infty$$

下面证闵柯夫斯基不等式

$$\begin{aligned} \int_0^1 |x(t) + y(t)|^p dt &= \int_0^1 |x(t) + y(t)|^{p-1} |x(t) + y(t)| dt \\ &\leq \int_0^1 |x(t) + y(t)|^{p-1} |x(t)| dt + \int_0^1 |x(t) + y(t)|^{p-1} |y(t)| dt \\ &\leq \left(\int_0^1 \left(|x(t) + y(t)|^{p-1} \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 \left(|x(t) + y(t)|^{p-1} \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 |y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^1 |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right] \end{aligned}$$

两边除以 $\left(\int_0^1 |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{q}}$ 即可证得。

由闵柯夫斯基不等式可以证明三角形不等式，设 $x(t), y(t), z(t) \in X$ ，则有

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &= \left(\int_0^1 |x(t) - y(t) + y(t) - z(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |y(t) - z(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \rho(x, y) + \rho(y, z) \end{aligned}$$

由此我们证明了 p 幂可积函数的集合 X 是一个距离空间，叫做 $L_p(0, 1)$ 空间。特别当 $p=q=2$ 时即为 $L_2(0, 1)$ 空间，叫希尔伯特函数空间。

在 $L_p(0, 1)$ 中的收敛是函数以 p 幂的平均收敛。事实上，设 $\{x_n\}$ 为 $L_p(0, 1)$ 中一序列，收敛于 $x(t) \in L_p(0, 1)$ ，则当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\rho(x_n, x) = \left(\int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

当 $p=q=2$ 时，即在 $L_2(0, 1)$ 空间中就简单说为平均收敛。

例 5 数列空间（无限维） 设 X 是满足条件 $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$

的数列 $x = \{\xi_i\}$ 的集合。对其中任意二元素 $x = \{\xi_i\}$, $y = \{\eta_i\}$ 令

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

同样，利用不等式 $|a+b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$ 可以证明 $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p < \infty$ 。

这样定义的 $\rho(x, y)$ 显然满足公理 (1), (2)，至于三角形不等式，要用到关于和的闵可夫斯基不等式，这首先要用到关于和的霍勒德尔不等式：

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

为了证明这个不等式只要在不等式 $\xi_\eta \leq \frac{\xi^p}{p} + \frac{\eta^q}{q}$

$$\text{中令 } \xi = \frac{|\xi_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \quad \eta = \frac{|\eta_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\text{则得 } \frac{|\xi_i| |\eta_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|\xi_i|^p}{p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p} + \frac{|\eta_i|^q}{q \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q}$$

不等式两边关于 i 求和即得霍勒德尔关于和的不等式。当 $p=q=2$ 时就是哥西——布涅柯夫斯基关于和的不等式。

至于证明闵柯夫斯基关于和的不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

与积分不等式完全同样。首先也有, 若 $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\zeta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$

则有 $\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(|\zeta_i|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$

然后利用霍勤德尔关于和的不等式可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^{p-1} |\xi_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^{p-1} |\eta_i| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \end{aligned}$$

两端除以 $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$

再注意 $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, 即得。

由闵柯夫斯基关于和的不等式可以证明三角形不等式。设 $x = \{\xi_i\}$, $y = \{\eta_i\}$,

$$\begin{aligned} z = \{\zeta_i\} \text{ 都属于 } X, \text{ 则有} \\ \rho(x, z) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \zeta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i + \eta_i - \zeta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i - \zeta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \rho(x, y) + \rho(y, z) \end{aligned}$$

由此我们证明了数列空间 X 是距离空间叫做 L_p 空间。当 $p=2$ 时, 得 L_2 空间, 又叫希尔伯特坐标空间, 或无限维欧几里德空间。

空间 L_p 中元素序列 $\{x_n\}$, $x_n = \{\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_i^{(n)}, \dots\}$ 收敛于元素 $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$