高等数学

GAODENG SHUXUE

主编 徐霖 常波 陈红

时代出版传媒股份有限公司
安徽教育出版社

高 等 数 学

主　审　刘　健
主　编　徐　霖　常　波　陈　红
副主编　汪银苗　颜玉柱　尹　斌

时代出版传媒股份有限公司
安 徽 教 育 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 常波，陈红，徐霖主编. —合肥：安徽教育出版社，2012.7

ISBN 978-7-5336-6831-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①常…②陈…③徐… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 158716 号

书名：**高等数学** 作者：徐 霖 常 波 陈 红

出 版 人：朱智润

责任编辑：杜伟伟 责任印制：陈善军 装帧设计：阮 娟

出版发行：时代出版传媒股份有限公司 http://www.press-mart.com
安徽教育出版社 http://www.ahep.com.cn
（合肥市繁华大道西路 398 号，邮编：230601）
营销部电话：(0551)3683010，3683011，3683015

排 版：安徽创艺彩色制版有限责任公司

印 刷：合肥芳翔印刷有限责任公司 电话：(0551)2156990

（如发现印装质量问题，影响阅读，请与印刷厂商联系调换）

开本：787×1092 1/16 印张：19 字数：420 千字

版次：2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5336-6831-0 定价：39.80 元

前　言

《高等数学》是高职高专理工类和经济类各专业必修的一门重要的基础理论课程，它已作为应用的工具渗透到各个领域.学习任何工程技术或管理科学都要用到许多数学知识，而其中最基本的就是高等数学中的微积分学、线性代数和概率统计.学习本课程，不仅能为各专业课程提供必备的数学基础，同时也能够极大地提高学生的逻辑思维能力和创新思维能力，是提高学生自身数学素养的重要途径.

本书以教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》为指导，以“应用为目的，以必须够用为度”为原则，吸取了国内同类教材的精华，结合编者多年的教学实践编写而成的.本教材具有以下特色：

(1)系统性强，内容连贯.编写本教材的主要原则是在讲清楚必要的基本概念和基本理论的基础上，加强基本方法和技能的训练，对难度较大的部分基础理论，不追求严格的论证和推导，只作简单的说明，尽量利用有限的学时，为学生学习后续课程打下良好的基础，使他们掌握今后实际工作中常用的数学方法.

(2)语言简练，通俗易懂，深入浅出，适用面宽，易教易学易懂，可作为高职高专院校理工科、经管类的教材，也可作为各成人类院校，自考类学生的参考书.

(3)随着近年来高等职业教育的大力发展，高职院校的招生规模迅速扩大，招收学生也呈现出多元化(自主招生、对口招生、普通高招等)，学生数学水平有所降低.为了适应这一新的需求，我们编写时采取了教材内容模块化(分为微积分、微分方程、线性代数、概率统计四大模块)，课程模式多样化(增加了例题量，每节后有练习题，每章后有复习题，且全部附有提示或答案)，内容讲授应用化(尽量由实际引例导出数学概念，让学生容易掌握比较抽象的数学概念，然后返回实际应用中，为学生后续学习各专业课程作必要准备)的方法.

本书由徐霖、常波、陈红主编，汪银苗、颜玉柱、尹斌担任副主编.徐霖编写了第一章，陈红编写了第二、三章，颜玉柱编写了第四、五章，尹斌编写了第六、八章，常波编写了第九章，汪银苗编写了第七、十章.

本书由刘健副教授主审，他对全部书稿进行了认真、细致地审阅，并提出了许多宝贵的意见和建议.在此向刘健副教授表示诚挚的谢意.在教材的编写过程中，还得到了安徽职业技术学院领导、教务处、公共教学部的大力支持，在此也表示衷心的感谢！

由于本教材遵循的是易教、易学、易懂的完全崭新的编写思路，实际编写中会有不当和疏漏之处，望广大使用者批评指正，以期本教材能为高职高专教育作出新的贡献.

编　者

2012 年 5 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门科学. 极限理论是高等数学的基础；连续是极限方法的直接应用；连续函数也是高等数学研究的主要对象. 本章将在复习函数知识及其基本性质的基础上，介绍极限和函数的连续性概念，为学习微积分做必要的准备.

第一节　函　　数

一、区间与邻域

1. 区间

设 a 与 b 是两个实数，且 $a<b$，那么满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体称作闭区间，记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

类似地，$(a,b)=\{x|a<x<b\}$ 称作开区间，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$、$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 称作半开半闭区间.

上述区间称作有限区间，另外还有几类无限区间. 例如，$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\}$ 等.

此处 $+\infty$ 读“正无穷大”，$-\infty$ 读“负无穷大”，它们只是引用符号，不是数.

2. 邻域

点 x_0 的 δ 邻域是以 x_0 为中心，$2\delta(\delta>0)$ 为长度的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，如图 1－1，记作 $U(x_0,\delta)$，其中 x_0 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径. 即 $U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}$.

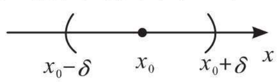


图 1－1

在 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$ 中去掉 x_0，所得集合记作 $U(\hat{x}_0,\delta)$，叫做点 x_0 的去心邻域，如图 1－2：

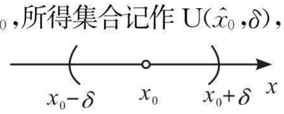


图 1－2

即 $U(\hat{x}_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 或 $U(\hat{x}_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$.

例如，$U(3,0.5)=\{x||x-3|<0.5\}=(2.5,3.5)$，

$U(\hat{1},0.25)=\{x|0<|x-1|<0.25\}=(0.75,1)\cup(1,1.25)$.

二、函数

1. 函数的定义

设 D 是一非空数集，如果对于 D 中的每一个 x，按照某一对应法则 f，总有确定的实数 y 与之对应，则称 y 是定义在数集 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$. D 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

如果自变量取某一数值 x_0 时，函数具有确定的对应值，那么称函数在 x_0 处有定义. 函数在 x_0 点的对应值称为函数在该点的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当自变量取遍定义域中每一数值时，对应的函数值的全体称为函数的值域，记作 M.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可以改用其他字母，例如，$y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$等.

函数的定义域与对应关系被称作函数的两要素，两要素完全相同的函数才是相同的函数，否则就是不同的函数.

通常函数的表示法有三种：列表法、图象法和解析法.

数学上最常用的是解析法，即用数学表达式表示函数. 一个函数若没有指明定义域，则它的定义域是指使函数有意义的实数所组成的集合.

例 1 求函数 $y=\lg\dfrac{x}{x-1}$的定义域.

解 要使函数有意义，必须满足$\dfrac{x}{x-1}>0$. 解得 $x>1$ 或 $x<0$. 所以函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

2. 分段函数

在高等数学中，常常会遇到在不同的定义范围内用不同的数学表达式来表示的函数，称之为分段函数. 如：

$$y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$是一个定义在$[0,+\infty)$上的分段函数.

图象如图 1－3 所示：

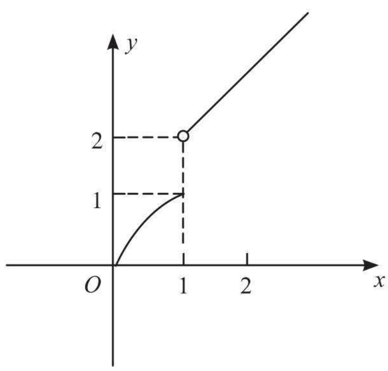


图 1－3

它的定义域是$[0,+\infty)$.

再举几个常见的分段函数：

例 2　绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$，图象如图 1 - 4：

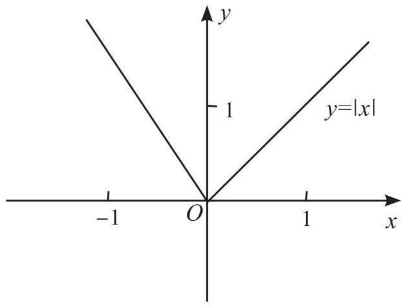


图 1 - 4

例 3　符号函数 $y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$，图象如图 1 - 5：

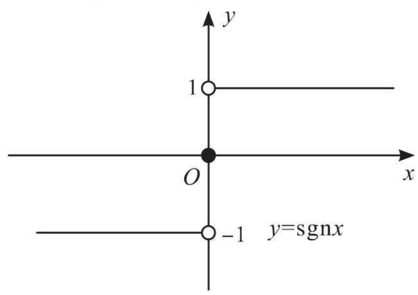


图 1 - 5

对于任何 $x\in\mathbf{R}$，有 $x=\mathrm{sgn}x\cdot|x|$ 或 $|x|=\mathrm{sgn}x\cdot x$.

例如，$-5=\mathrm{sgn}(-5)\cdot|-5|=-1\times5=-5$.

例 4　取整函数 $y=[x]$.

设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作$[x]$.

例如，$\left[\dfrac{3}{4}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.01]=-4$.

把 x 看成变量，则函数 $y=[x]$ 称作取整函数. 它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为 $\mathbf{Z}$，图象如图 1 - 6：

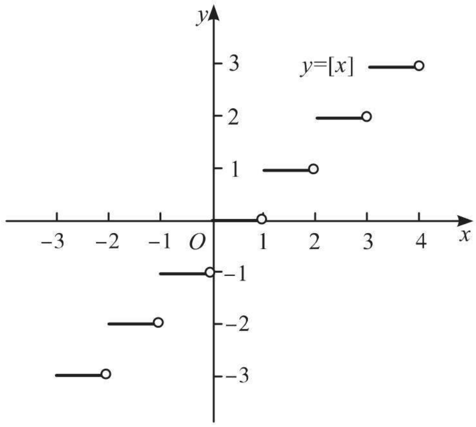


图 1－6

例 5 狄利克雷函数 $y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{0,1\}$，图象无法作出.

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$在区间 I(区间 I 可以是函数的整个定义域，也可以是其定义域的一部分)内有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in I$，对应的函数值 $f(x)$都满足不等式$|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 I 内有界. 如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$在 I 内无界.

例如，$f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界，因为$|\sin x|\leqslant 1$. 而 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,1)$内是无界的.

2. 函数的单调性

如果函数 $f(x)$在区间(a,b)内随 x 增大而增大，即对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内单调增加(图 1－7(a)).

如果函数 $f(x)$在区间(a,b)内随 x 增大而减小，即对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内单调减少(图 1－7(b)).

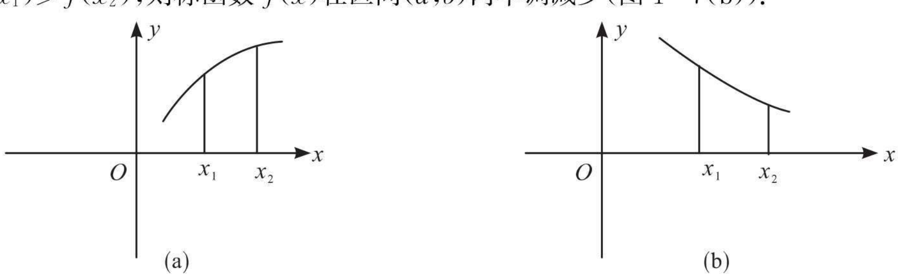


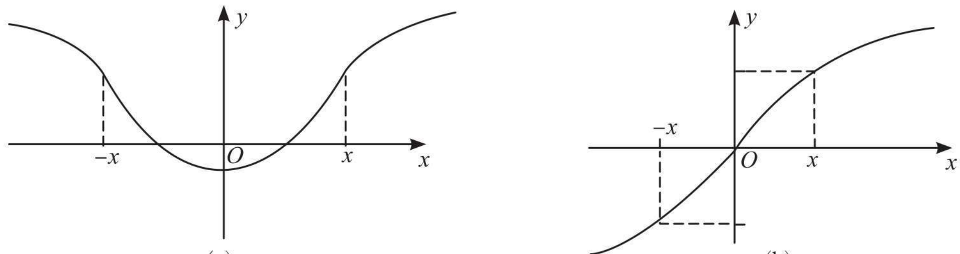
图 1－7

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在 $(-\infty,0)$ 上是递调减少的. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的. 又如，$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数. 若对任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图象关于 y 轴对称（图 1-8(a)）；奇函数的图形关于原点对称（图 1-8(b)）.



(a)　　(b)

图 1-8

例如，$y=x^2$ 为偶函数，$y=x^3$ 为奇函数.

4. 函数的周期性

若函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的常数 T，使得等式 $f(x+T)=f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都成立，则 $f(x)$ 称作周期函数，T 是 $f(x)$ 的周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

如：$y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；

$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

例 6　讨论函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解　$f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 关于原点对称，因为

$$f(-x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)=\log_a\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),$$

所以函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

四、反函数

定义　设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于 M 中的每一 $y(y\in M)$ 值，都可以由关系式 $y=f(x)$ 来确定唯一的 $x(x\in D)$ 值与之对应，那么所确定的以 y 为自变量的 x 的函数 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 称作函数 $y=f(x)$ 的反函数. 它的定义域为 M，值域为 D. 习惯上，函数的自变量都是用 x 表示的，所以反函数也可表示为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称. 如图 1-9 所示，点 $P(a,b)$ 在直接函数 $y=f(x)$ 上，则点 $P'(b,a)$ 在其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 上.

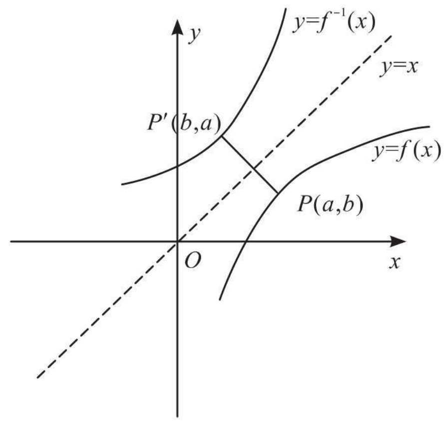


图 1-9

例 7 求直接函数 $y=e^x+1$ 的反函数.

解 由直接函数 $y=e^x+1$，解得 $x=\ln(y-1)$ 是其反函数，将 x,y 互换，得以 x 为自变量的反函数为 $y=\ln(x-1)$，其定义域为 $\{x|x>1\}$.

习题 1-1

1. 用区间表示变量的变化范围：

(1) $2<x\leqslant 6$；　(2) $|x|\geqslant 5$；　(3) $x\geqslant 0$；

(4) $x^2<9$；　(5) $|x-3|\geqslant 4$；　(6) $|x-5|\leqslant 4$.

2. 下列各题中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是否为相同函数？为什么？

(1) $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(2) $f(x)=x+1, g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=1, g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(2) $y=\sqrt{x^2-4}+\lg(x-2)$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1, \\ x^2-1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

4. 设 $f(x)=\sqrt{9+x^2}$，求下列函数的值：

$f(0), f(1), f\left(\dfrac{1}{a}\right), f(x_0+\Delta x)$.

5. 作分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ x-1, & x<0\end{cases}$$

的图象.

6. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^4-2x^2+3$；　　(2) $f(x)=x(x-1)(x+1)$；

(3) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(4) $f(x)=\sqrt{x+3}$.

7. 证明：函数 $y=\lg x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

8. 下列函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$；　　(2) $y=x\sin x$；　　(3) $y=\tan 2x$.

9. 求下列函数的反函数，并写出反函数的定义域：

(1) $y=x^2-2x(x>1)$；　　(2) $y=1+\lg(x+2)$.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 1-x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -1, & 1<x\leqslant 4.\end{cases}$

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域；

(2) 求 $f(-1), f\left(\dfrac{1}{2}\right), f(1), f[f(2)]$；

(3) 画出函数 $y=f(x)$ 的图象.

第二节　初等函数

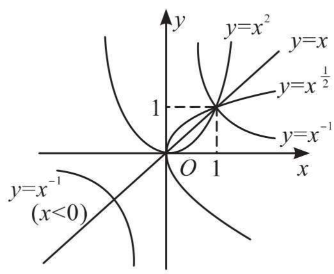
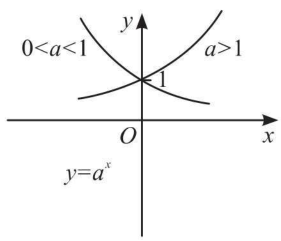
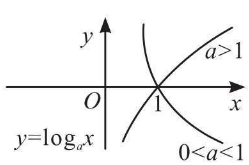
在科学技术中,常见的函数大都是初等函数,初等函数是本课程研究的主要对象,构成初等函数的元素是常数和基本初等函数.因此,学习高等数学一定要熟练地掌握五种基本初等函数的表达式、定义域、主要性质及其图象.

一、基本初等函数

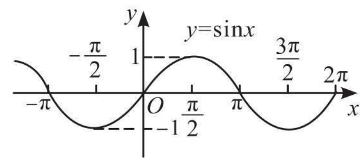
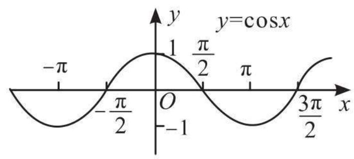
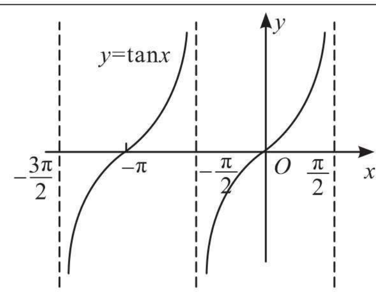
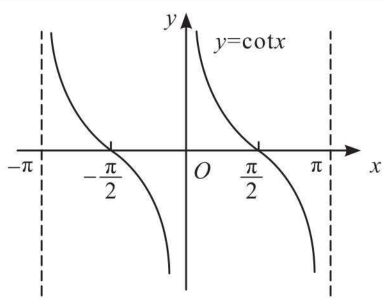
所谓基本初等函数,是指以下五种函数:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

这些函数的定义域、主要性质和图象读者在中学已学过,现列于表 1－1 中.

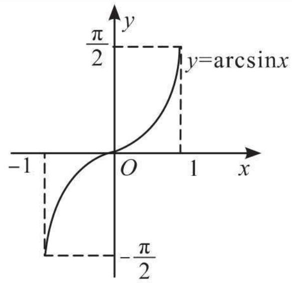
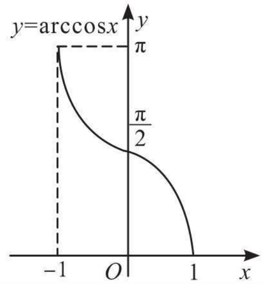
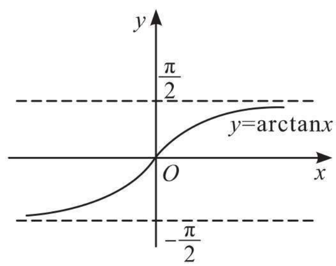
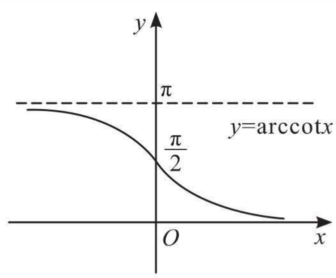
表 1－1

名称	表达式	定义域	图象	主要性质
幂函数	$y=x^{\alpha}$	随 α 的不同而不同,但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		1)经过点 $(1,1)$ 2)在第一象限内,当 $\alpha>0$ 时,$y=x^{\alpha}$ 单调增加;当 $\alpha<0$ 时,$y=x^{\alpha}$ 单调减少
指数函数	$y=a^{x}(a>0,a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$		1)图象在 x 轴上方 2)经过点 $(0,1)$ 3)当 $a>1$ 时,$y=a^{x}$ 单调增加,当 $0<a<1$ 时,$y=a^{x}$ 单调减少
对数函数	$y=\log_{a}x\ (a>0,a\neq1)$	$(0,+\infty)$		1)图象在 x 轴右侧 2)经过点 $(1,0)$ 3)当 $a>1$ 时,$y=\log_{a}x$ 单调增加,当 $0<a<1$ 时,$y=\log_{a}x$ 单调减少

续表

名称		表达式	定义域	图象	主要性质
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		1)以 2π 为周期 2)奇函数,图象关于原点对称 3)有界,$\|\sin x\|\leqslant 1$
	余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		1)偶函数,图象关于 y 轴对称 2)以 2π 为周期 3)有界,$\|\cos x\|\leqslant 1$
	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$		1)奇函数,图象关于原点对称 2)以 π 为周期 3)无界 4)在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$		1)奇函数,图象关于原点对称 2)以 π 为周期 3)无界 4)在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少
	正割函数	$y=\sec x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$		
	余割函数	$y=\csc x$	$x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$		

续表

名称		表达式	定义域	图象	主要性质
三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		1)奇函数,图象关于原点对称 2)单调增加 3)值域$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		1)非奇非偶函数 2)单调减少 3)值域$[0,\pi]$
	反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		1)奇函数,图象关于原点对称 2)单调增加 3)值域$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
	反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$		1)非奇非偶函数 2)单调减少 3)值域$(0,\pi)$

二、复合函数

在实际问题中,我们常常会遇到由几个简单函数复合而成的较为复杂的函数. 例如,$y=u^2$,$u\in(-\infty,+\infty)$,而 $u=\sin x$,$x\in(-\infty,+\infty)$,$u=\sin x$ 的全部函数值$[-1,1]$都能使得 $y=u^2$ 有意义. 当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,通过 u,函数 y 都能有确定的值与之对应,所以 y 是 x 的函数,即$y=\sin^2 x$,其定义域仍为$(-\infty,+\infty)$.

定义 1 设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f,函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D_φ. 如果 $u=\varphi(x)$的值域 $M_\varphi\subseteq D_f$,那么 y 通过 u 的联系构成 x 的函数,称为由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,

记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 x 为自变量，$u=\varphi(x)$ 为中间变量.

例如，$y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成的复合函数，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，中间变量 $u=\sin x$.

注意：1. 不是任意两个函数都可以合成一个复合函数的，必须中间变量 $u=\varphi(x)$ 的值域是 $y=f(u)$ 的定义域的一部分或全部.

例如，$y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 不能复合成一个函数，这是因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$u\geqslant 2$，全部落在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 之外，故 $y=\arcsin(x^2+2)$ 无意义.

2. 复合函数也可以由两个以上的函数复合而成.

例如，$y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x^2$，则 y 通过 u，v 得到 x 的复合函数 $y=\sin\sqrt{1-x^2}$，其中 u，v 均为中间变量.

一般地，设 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$，则复合函数为 $y=f[\varphi(\psi(x))]$，其中 $u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$ 均为中间变量.

另外，"复合函数"只是表达函数的一种形式，不是一类新型的函数；如果要把一个复合函数分解（即将一个复合函数分成若干个简单函数），必须按照基本初等函数分解，否则会给今后的微积分计算带来许多麻烦，这一点以后读者会逐步理解.

本课程将会遇到大量复合函数的运算，因此，必须熟练掌握函数的复合及复合函数的分解.

例 1　在下列各题中，求由所给函数复合而成的函数，并求出函数分别对应于给定自变量 x_1 和 x_2 的函数值：

(1) $y=u^2$，$u=\cos x$；$x=\dfrac{\pi}{6}$，$x=\dfrac{\pi}{3}$.

(2) $y=\sqrt{u}$，$u=\lg v$，$v=x^2-3$；$x=2$，$x=-3$.

解　(1) 由 $y=u^2$，$u=\cos x$ 复合而成的函数是 $y=\cos^2 x$.

$$y\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4},$$

$$y\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

(2) 由 $y=\sqrt{u}$，$u=\lg v$，$v=x^2-3$ 复合而成的函数是 $y=\sqrt{\lg(x^2-3)}$.

$$y\big|_{x=2}=\sqrt{\lg(4-3)}=\sqrt{\lg 1}=0,\quad y\big|_{x=-3}=\sqrt{\lg(9-3)}=\sqrt{\lg 6}.$$

例 2　指出下列函数的复合过程：

(1) $y=(1-3x)^5$；　(2) $y=\cos^2 3x$；　(3) $y=\mathrm{e}^{\arcsin\frac{1}{x}}$；

(4) $y=\tan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$；　(5) $y=\sin[\cos^2(\tan 3x)]$；　(6) $y=\sqrt{\dfrac{1-(1+x)^2}{1+(1+x)^2}}$.

注意：分解复合函数就是将复合函数分解成基本初等函数的复合，一般在最后一步出现四则运算.

解　(1) $y=(1-3x)^5$ 可视为由 $y=u^5$，$u=1-3x$ 复合而成的复合函数.

(2) $y=\cos^2 3x$ 可视为由 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=3x$ 复合而成的复合函数.

(3) $y=\mathrm{e}^{\arcsin\frac{1}{x}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\arcsin v$，$v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成的.

(4) $y=\tan\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 是由 $y=\tan u$，$u=\dfrac{1}{\sqrt{v}}$，$v=1+x^2$ 复合而成的.