高职考数学关键30分

主编 陈建忠

电子科技大学出版社

稳拿

高职考数学

关键30分

主编 陈建忠

关键分＝核心分＝必拿分

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高职考数学关键 30 分 / 陈建忠主编. -- 成都 : 电子科技大学出版社, 2015.2

ISBN 978-7-5647-2844-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①数学课－高等职业教育－入学考试－升学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 036097 号

高职考数学关键 30 分

主编　陈建忠

出　　版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑：吴艳玲
责任编辑：吴艳玲
主　　页：www.uestcp.com.cn
电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：杭州华艺印刷有限公司
成品尺寸：185mm×260mm　　印张：6.5　　字数：162 千字
版　　次：2015 年 2 月第一版
印　　次：2015 年 3 月第一次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-2844-1
定　　价：18.00 元

前 言

通过对近几年高职考数学试卷的分析，我们发现一些知识点每年都作为重要考点反复出现，且占据了较高的分值比例，但与此相对应的却是考生们常考常错的现象。为了帮助学生们更好地理清考试的关键点，拿到关键分，我们组织了一批经验丰富、长年奋斗在数学教育一线的骨干教师编写了这本《高职考数学关键 30 分》。

本书是在审度学生数学学习现状、反思数学教学的基础上编写而成的，目的在于为学生指明复习备考的方向，弥补学生数学关键知识的缺漏，增强数学应用能力，提升数学素养，使其在考试中能拿到关键分、核心分。本书根据历年数学高考试卷的命题规律，重点知识的分布状况，以及中职学生的学习特点，着眼于关键知识点的总结与归纳，从“基本知识”到“拓展延伸”，对各关键点进行梳理整合，力求博采众长，辨析难点。本书既有利于帮助学生理清常考必备的数学关键知识，又能举一反三，触类旁通，增强学生的数学应用能力及思维能力，使学生深刻领会数学作为工具学科的特点。

本书分为 18 个关键点，每个关键点包括“指点迷津”、“知识链接”、“能力提升”、“拓展延伸”和“自主模拟”五个板块。“指点迷津”板块汇集了编者对高职考命题研究的成果，对过去几年该关键点的考查规律进行了总结，并对未来的考查方向进行了预测，以期使学生在复习时有的放矢；“知识链接”板块对该关键点的知识进行了细致全面地归纳总结；“能力提升”和“拓展延伸”板块以例题的形式对各知识点进行了细化分析，使学生能更直观地理解各个知识点；“自主模拟”板块设置了针对性极强且具有一定难度的练习，方便学生学以致用，更好地掌握各关键点的知识，用最少的时间收到最好的效果。

由于时间仓促，书中错漏和不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正，以便我们改进和提高。

本书编写组
E-mail:hongbo0571@163.com

目录 Contents

关键点 1　集合问题的求解策略 …… 1
关键点 2　充要条件的判断方法 …… 6
关键点 3　函数单调性、周期性的问题 …… 10
关键点 4　二次函数中的分类讨论思想 …… 13
关键点 5　指数函数、对数函数的最值问题 …… 17
关键点 6　函数的图形辨识 …… 20
关键点 7　运用三角函数定义解决问题 …… 25
关键点 8　三角函数的最值问题 …… 31
关键点 9　平面向量的运算问题 …… 36
关键点 10　运用等差数列和等比数列的性质巧解题 …… 41
关键点 11　不等式恒成立问题 …… 44
关键点 12　巧用基本不等式求最值 …… 48
关键点 13　运用二项式定理巧解题 …… 52
关键点 14　线面角与面面角的计算问题 …… 56
关键点 15　两直线的平行与垂直问题 …… 62
关键点 16　直线与圆位置关系的问题 …… 67
关键点 17　运用圆锥曲线定义巧解问题 …… 71
关键点 18　圆锥曲线中范围与最值 …… 76
参考答案 …… 81

关键点 1　集合问题的求解策略

指点迷津

集合是高中数学的重要基础知识，它贯穿于整个中学数学教学之中，并且作为一种数学语言和工具在其他数学问题中也有广泛的运用. 在高职考中，它也是年年必考的内容之一. 其中，2009～2011 年、2013 年主要考查集合的交、并、补运算，2012 年主要考查集合的概念，元素与集合之间的关系，集合与集合之间的关系. 集合题目一般有两种类型：一是涉及集合本身的问题；二是以集合为载体，综合其他数学知识构成的综合题，主要运用数形结合和分类讨论的思想来解题.

知识链接

1. 研究一个集合，首先要看集合的代表元素，然后再看元素的限制条件，当集合用描述法表示时，注意弄清元素所表示的意义.

集合	$\{x\mid f(x)=0\}$	$\{x\mid f(x)>0\}$	$\{x\mid y=f(x)\}$	$\{y\mid y=f(x)\}$	$\{(x,y)\mid y=f(x)\}$
集合的意义	方程 $f(x)=0$ 的解集	不等式 $f(x)>0$ 的解集	函数 $y=f(x)$ 的定义域	函数 $y=f(x)$ 的值域	函数 $y=f(x)$ 图象上的点集

2. 对于含有字母的集合，在求出字母的值后，要注意检验集合是否满足互异性.

3. 若集合 A 中元素的个数为 n 个，则它的子集的个数为 2^n 个，真子集的个数为 2^n-1 个，非空真子集的个数为 2^n-2 个.

4. 通过集合之间的关系，求参数的取值范围，最终是通过比较区间端点的大小来实现，因此确定两个集合内的元素，成为解决该类题目的关键. 因为元素的属性中含有参数，所以分类讨论成为必然，讨论时要注意不重不漏.

5. 解决有关 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\varnothing$，$A\subseteq B$ 等集合问题易因忽视空集而出现漏解的情况，这需要在解题中全方位、多角度地审视问题.

6. 在进行集合运算时，当集合元素离散时，多借助韦恩图；当集合元素连续时，多借助数轴，并注意端点值的取舍.

能力提升

1. 运用集合的性质

【例 1】 已知集合 $M=\{a,a+d,a+2d\}$，$N=\{a,aq,aq^2\}$，其中 $a\neq 0$，且 $M=N$，求 q 的值.

【解析】 ∵$M=N$，∴对应的元素相等，且有两种情况：

$$\begin{cases} a+d=aq & ① \\ a+2d=aq^2 & ② \end{cases} \text{或} \begin{cases} a+d=aq^2 & ③ \\ a+2d=aq & ④ \end{cases}$$

由①②消去 d，解得 $q=1$，则 $a=aq=aq^2$，与集合中元素的互异性矛盾，故舍去.

由③④消去 d,解得 $q=-\frac{1}{2}$ 或 $q=1$(舍去),则 $d=-\frac{3}{4}a$,则 $M=N=\{a,-\frac{1}{2}a,\frac{1}{4}a\}(a\neq 0)$.

综上所述,故 q 的值为 $-\frac{1}{2}$.

【点评】 本题中,利用集合元素的无序性和两个集合相等时的元素特征,得两个方程组,从而打开了解题突破口.求出 q 的值后,又利用元素的互异性进行检验,保证了所求结果的准确性.

2.数形结合

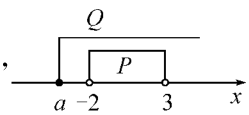
【例 2】 设集合 $P=\{x|x^2-x-6<0\}$,$Q=\{x|x-a\geqslant 0\}$.

(1)若 $P\subseteq Q$,求实数 a 的取值范围;

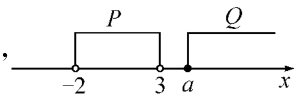
(2)若 $P\cap Q=\varnothing$,求实数 a 的取值范围;

(3)若 $P\cap Q=\{x|0\leqslant x<3\}$,求实数 a 的值.

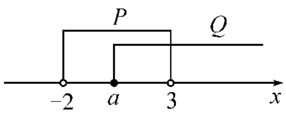
【解析】 由 $x^2-x-6<0$ 解得 $-2<x<3$,故 $P=\{x|-2<x<3\}$.而集合 $Q=\{x|x\geqslant a\}$.则

(1)若 $P\subseteq Q$, 

由数轴可知 $a\leqslant -2$.

(2)若 $P\cap Q=\varnothing$, 

由数轴可知 $a\geqslant 3$.

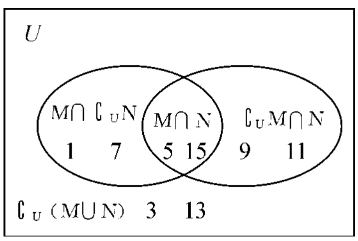
(3)若 $P\cap Q=\{x|0\leqslant x<3\}$, 

由数轴可知 $a=0$.

【点评】 研究数集的运算和相互关系时,可将题设通过数轴示意,借助直观图形来求解,既易于理解,又能提高解题效率,数形结合的优越性可见一斑.

【例 3】 设全集 $U=\{$不大于 15 的正奇数$\}$,已知集合 $M\cap N=\{5,15\}$,$\complement_U(M\cup N)=\{3,13\}$,$M\cap\complement_U N=\{1,7\}$,求集合 M,N.

【解析】 利用韦恩图.



集合 M,N 将全集 U 划分成 4 个子集:$M\cap\complement_U N$,$M\cap N$,$\complement_U M\cap N$,$\complement_U(M\cup N)$,并且 $U=(M\cap\complement_U N)\cup(M\cap N)\cup(\complement_U M\cap N)\cup\complement_U(M\cup N)$.

$\because U=\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$,$\therefore M=\{1,5,7,15\}$,$N=\{5,9,11,15\}$.

【点评】 对于涉及的集合个数、信息较多或对于未给元素的抽象集合,研究其关系或运算时,借助韦恩图的直观显示,常可使集合问题化难为易.

3.分类讨论

【例 4】 设集合 $A=\{x^2,2x-1,-4\}$,$B=\{x-5,1-x,9\}$,若 $A\cap B=\{9\}$,求 $A\cup B$.

【解析】 由 $9\in A$,可得 $x^2=9$ 或 $2x-1=9$,解得 $x=\pm 3$ 或 $x=5$.

当 $x=3$ 时，$A=\{9,5,-4\}$，$B=\{-2,-2,9\}$，B 中元素重复，故舍去.

当 $x=-3$ 时，$A=\{9,-7,-4\}$，$B=\{-8,4,9\}$，$A\cap B=\{9\}$ 满足题意，故 $A\cup B=\{-8,-7,-4,4,9\}$.

当 $x=5$ 时，$A=\{25,9,-4\}$，$B=\{0,-4,9\}$，此时 $A\cap B=\{-4,9\}$ 与 $A\cap B=\{9\}$ 矛盾，故舍去.

综上所述，$A\cup B=\{-8,-7,-4,4,9\}$.

【点评】 对一些含参数的集合问题，求解时常需要进行分类讨论.

4. 合理转化

【例 5】 设全集 $U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$A=\left\{(x,y)\mid \dfrac{y-3}{x-2}=1\right\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+1\}$，求 $(\complement_U A)\cap B$.

【解析】 集合 $U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 是平面上所有点的集合.

集合 A 是直线 $y=x+1$ 上去掉点 $(2,3)$ 的全体点集.

集合 B 是直线 $y=x+1$ 上的全体点集，于是 $(\complement_U A)\cap B=\{(2,3)\}$.

【点评】 集合问题一般都是用符号语言表述的，因而较抽象，解题过程中常需要把集合语言表述的问题转化成熟悉的非集合表述的问题，这样有助于运用熟知的方法解决问题.

拓展延伸

拓展点 1：集合中的信息迁移问题

【例 1】 设 $U=\{1,2,3,4\}$，A 与 B 是 U 的子集，若 $A\cap B=\{1,2\}$，则称 (A,B) 为一个“理想配集”，规定 (A,B) 和 (B,A) 是两个不同的“理想配集”，那么符合条件的“理想配集”的个数是多少个？

【解析】 由 A 与 B 是集合 U 的子集，且 $A\cap B=\{1,2\}$，得 A，B 应为 $\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,3,4\}$ 中的一个.

由定义知

①若 $A=\{1,2\}$，则集合 B 可以取以上 4 个集合中的任何一个，共有 4 种不同的情形；

②若 $A=\{1,2,3\}$，则集合 B 可以取 $\{1,2\}$，$\{1,2,4\}$ 中的任何一个，共有 2 种不同的情形；

③若 $A=\{1,2,4\}$，则集合 B 可以取 $\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$ 中的任何一个，共有 2 种不同的情形；

④若 $A=\{1,2,3,4\}$，则集合 B 可以取 $\{1,2\}$ 这 1 种情形.

综上所述，适合题意的情形共有 $4+2+2+1=9$（种）.

【点评】 这类问题主要是题目中引入了新概念、新术语、新符号或定义的新运算，处理这类问题的关键是要准确地理解相关“新内容”的含义，依据其含义寻找解题的切入点.

拓展点 2：数学知识有机渗透

【例 2】 已知满足不等式 $2x^2-9x+a<0$ 的任意的实数 x，至少满足不等式 $x^2-4x+3<0$ 和不等式 $x^2-6x+8<0$ 中的一个，试求实数 a 的取值范围.

【解析】 记 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0\}=\{x\mid 1<x<3\}$，$B=\{x\mid x^2-6x+8<0\}=\{x\mid 2<x<4\}$，则 $A\cup B=\{x\mid 1<x<4\}$.

记 $C=\{x\mid 2x^2-9x+a<0\}$，依题意得 $C\neq\varnothing$，且 $C\subseteq A\cup B$，

设 $f(x)=2x^2-9x+a$，结合二次函数的图象可得

$$\begin{cases}\Delta=(-9)^2-4\cdot 2a>0,\\ f(1)=2\times1^2-9\times1+a\geqslant0,\\ f(4)=2\times4^2-9\times4+a\geqslant0,\end{cases}$$解得 $7\leqslant a<\dfrac{81}{8}$，

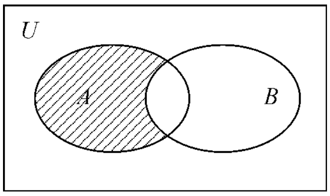
∴实数 a 的取值范围是 $\left\{a \mid 7 \leqslant a < \dfrac{81}{8}\right\}$.

【点评】 一些表面上看来与集合无关的题目，如果运用集合的语言、观点、思想和方法来分析，往往会达到事半功倍的效果. 因此，对于多个知识点相互渗透的题目，解题的关键在于根据题中所涉及的知识点，联想有关的知识点实施有效的转化.

自主模拟

一、选择题

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid 2^{2x(x-2)}<1\}$，$B=\{x \mid y=\ln(1-x)\}$，则图中阴影部分表示的集合为 ( )



A. $\{x \mid x \geqslant 1\}$
B. $\{x \mid 1 \leqslant x < 2\}$
C. $\{x \mid 0 < x \leqslant 1\}$
D. $\{x \mid x \leqslant 1\}$

2. 已知集合 $M=\{x \mid y=2x+1\}$，$N=\{y \mid y=-x^2\}$，则 ( )
A. $M \subseteq N$
B. $N \subseteq M$
C. $N=M$
D. $M \cap N=\{(-1,-1)\}$

3. 设函数 $f(x)=x^2-4x+3$，$g(x)=3^x-2$，集合 $M=\{x\in\mathbf{R} \mid f[g(x)]>0\}$，$N=\{x\in\mathbf{R} \mid g(x)<2\}$，则 $M\cap N$ 为 ( )
A. $(1,+\infty)$　　B. $(0,1)$
C. $(-1,1)$　　D. $(-\infty,1)$

4. 设集合 $P=\left\{f(x) \mid f(x)=\log_2(x+a)+b, a=-\dfrac{1}{2}\text{或}0\text{或}\dfrac{1}{2}\text{或}1, b=-1\text{或}0\text{或}1\right\}$，集合 $Q=\left\{(x,y) \mid x=-\dfrac{1}{2}\text{或}0\text{或}\dfrac{1}{2}\text{或}1, y=-1\text{或}0\text{或}1\right\}$，则在同一平面直角坐标系中，$P$ 中函数 $f(x)$ 的图象恰好经过 Q 中两个点的函数的个数是 ( )
A. 4 个　　B. 6 个
C. 8 个　　D. 10 个

二、填空题

5. 已知集合 $A=\{a,b,2\}$，$B=\{2,b^2,2a\}$，且 $A\cap B=A\cup B$，则 $a=$________.

6. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R} \mid |x+2|<3\}$，集合 $B=\{x\in\mathbf{R} \mid (x-m)(x-2)<0\}$，且 $A\cap B=(-1,n)$，则 $m=$________，$n=$________.

7. 给定集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}(n\in\mathbf{N}^*, n\geqslant 3)$，定义 $a_i+a_j(1\leqslant i<j\leqslant n, i,j\in\mathbf{N}^*)$ 中所有不同值的个数为集合 A 中元素和的容量，用 $L(A)$ 表示. 若 $A=\{2,4,6,8\}$，则 $L(A)=$________.

8. 设集合 $A=\left\{(x,y) \mid \dfrac{m}{2}\leqslant(x-2)^2+y^2\leqslant m^2, x,y\in\mathbf{R}\right\}$，$B=\{(x,y) \mid 2m\leqslant x+y\leqslant 2m+1, x,y\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 m 的取值范围是________.

三、解答题

9.(精练题)已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$,$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$.

(1)若 $B\subseteq A$,求实数 m 的取值范围;

(2)当 $x\in\mathbf{Z}$ 时,求 A 的非空真子集的个数;

(3)当 $x\in\mathbf{R}$ 时,若 $A\cap B=\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

10.(拔高题)已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=x^2+mx+2\}$,$B=\{(x,y)\mid y=x+1,0\leqslant x\leqslant 2\}$,若 $A\cap B\neq\varnothing$,试求实数 m 的取值范围.

关键点2　充要条件的判断方法

指点迷津

充分条件与必要条件的判断是学习常用逻辑用语时的重点和难点.我们在理解充分条件、必要条件、充要条件相关概念的基础上,掌握充要条件判断的四种方法:定义法、集合法、传递法和转换法.

知识链接

充分条件、必要条件、充要条件的概念.

(1)如果 $p\Rightarrow q$,则称 p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件.

(2)如果 $p\Rightarrow q$,且 $q\Rightarrow p$,则称 p 是 q 的充要条件.

能力提升

【例1】 设集合 $M=\{x|x>2\}$,$P=\{x|x<3\}$,那么"$x\in M$ 或 $x\in P$"是"$x\in P\cap M$"的什么条件?

【解析】 条件 p:$x\in M$ 或 $x\in P$;结论 q:$x\in P\cap M$.

若 $x\in M$,则 x 不一定属于 P,即 x 不一定属于 $P\cap M$,$\therefore p\nRightarrow q$.

若 $x\in P\cap M$,则 $x\in P$ 且 $x\in M$,$\therefore q\Rightarrow p$.

综上所述,"$x\in M$ 或 $x\in P$"是"$x\in P\cap M$"的必要不充分条件.

【点评】 写成命题的形式,然后按定义判断,判断的关键是分清条件和结论.

【例2】 已知条件 A:$(x-1)(x+4)\geqslant 0$,结论 B:$\dfrac{x+4}{x-1}\geqslant 0$,则 A 是 B 的什么条件?

【解析】 A 的解集是 $M=\{x|x\leqslant -4$ 或 $x\geqslant 1\}$,B 的解集是 $N=\{x|x\leqslant -4$ 或 $x>1\}$,显然 $N\subseteq M$,$\therefore A$ 是 B 的必要不充分条件,

【点评】 用集合的观念来看条件,体现数形结合的思想.若 p 以集合 A 的形式出现,q 以集合 B 的形式出现,则①若 $A\subseteq B$,则 p 是 q 的充分条件;②若 $B\subseteq A$,则 p 是 q 的必要条件.

【例3】 如果甲是乙的必要不充分条件,丙是乙的充要条件,那么丙是甲的什么条件?

【解析】 $\because$ 甲是乙的必要不充分条件,

$\therefore$ 甲$\nRightarrow$乙,乙$\Rightarrow$甲.

$\because$ 丙是乙的充要条件,

$\therefore$ 丙$\Leftrightarrow$乙.

$\therefore$ 丙$\Rightarrow$甲,甲$\nRightarrow$丙.

$\therefore$ 丙是甲的充分不必要条件.

【点评】 对于较复杂的关系,常用$\Rightarrow$、$\Leftarrow$、$\nRightarrow$等符号进行传递,画出它们的综合结构图,可

降低解题难度.

【例 4】 若 p:$x+y\neq 3$,q:$x\neq 1$ 或 $y\neq 2$,则 p 是 q 的什么条件?

【解析】 先判断原命题“若 p 则 q”的真假,原命题的真假较难判断,但它的逆否命题“若 $\neg q\Rightarrow \neg p$”,即“若 $x=1$ 且 $y=2$,则 $x+y=3$”显然为真,故原命题为真,即 $p\Rightarrow q$,逆命题的真假较难判断,但它的等价命题“若 $x+y=3$,则 $x=1$ 且 $y=2$”显然为假,故逆命题为假,即 $q\not\Rightarrow p$,所以 p 是 q 的充分不必要条件.

【点评】 命题的真假判断可进行等价转化,常利用:“原命题⇔逆否命题”,“否命题⇔逆命题”.一些否定形式的命题常用这种方法.

【例 5】 “一元二次方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq 0)$ 有一个正根和一个负根”的充分不必要条件是 (　　)

A. $a<0$　　B. $a>0$　　C. $a<-1$　　D. $a>1$

【解析】 因为一元二次方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq 0)$ 有一个正根和一个负根等价于 $\begin{cases}\Delta>0,\\ x_1x_2<0,\end{cases}$ 即 $a<0$,根据用集合观点看充分不必要条件就是要寻找该集合的一个真子集,故应该选 C.

【点评】 借助数轴、韦恩图等找出两个集合之间的关系去判断.

拓展延伸

拓展点 1:三角形形状判断及充要条件的判断

【例 1】 在$\triangle ABC$中,设命题 p:$\dfrac{a}{\sin B}=\dfrac{b}{\sin C}=\dfrac{c}{\sin A}$,命题 q:$\triangle ABC$ 是等边三角形,那么命题 p 是 q 的什么条件?

【解析】 如果$\triangle ABC$是等边三角形,则 $a=b=c$,$\angle A=\angle B=\angle C$.

那么$\dfrac{a}{\sin B}=\dfrac{b}{\sin C}=\dfrac{c}{\sin A}$显然成立,即 $q\Rightarrow p$.

如果$\dfrac{a}{\sin B}=\dfrac{b}{\sin C}=\dfrac{c}{\sin A}$,又∵$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$,

∴两式相除得$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{a}{c}$.令$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{a}{c}=t$,

∴$a=ct$,$b=at$,$c=bt$,∴$abc=abct^3$,∴$t^3=1$,解得 $t=1$,

∴$a=b=c$,即$\triangle ABC$是等边三角形,∴$p\Rightarrow q$.

∴$p\Leftrightarrow q$,∴p 是 q 的充要条件.

【点评】 判断三角形形状主要是根据正弦定理、余弦定理及三角形的内角和为 π.化简有两个方向:(1)角化边,(2)边化角.

拓展点 2:运用集合间的包含关系判断充要条件

【例 2】 已知命题 p:$|4-x|>6$,q:$x^2-2x+1-a^2\geqslant 0(a>0)$.若 p 是 q 的充分不必要条件,求 a 的取值范围.

【解析】 ∵$|4-x|>6$,解得 $x<-2$ 或 $x>10$,∴p 的解集是 $A=\{x|x<-2$ 或 $x>10\}$.

∵$x^2-2x+1-a^2\geqslant 0$,解得 $x\leqslant 1-a$ 或 $x\geqslant 1+a$,∴q 的解集是 $B=\{x|x\leqslant 1-a$ 或 $x\geqslant 1+a\}$.

$\because p\Rightarrow q$，$\therefore A\subsetneqq B$，$\therefore\begin{cases}1-a\geqslant-2,\\1+a\leqslant10,\\a>0,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant3$.

$\therefore a$ 的取值范围为 $(0,3]$.

【点评】 对命题充要条件的判断，利用集合间的包含关系来判断：若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件或 B 是 A 的必要条件，再借助数轴找出数量关系式.

自主模拟

一、选择题

1. 在 $\triangle ABC$ 中，“$\cos A=\dfrac{1}{2}$”是“$\angle A=60^\circ$”的 （　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. “$b^2=ac$”是“a,b,c 成等比数列”的 （　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 条件甲：“$a>1$”是条件乙：“$a>\sqrt{a}$”的 （　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 设 α,β 是方程 $x^2-ax+b=0$ 的两个根，则“$a>2$，且 $b>1$”是“α,β 都大于 1”的 （　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

5. “$|2x-3|<1$”是“$x(x-3)<0$”的____________条件.

6. “$a<0$”是“方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负实根”的____________条件.

7. 已知 α,β 为锐角，若 p：$\sin\alpha<\sin(\alpha+\beta)$，$q$：$\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$，则 p 是 q 的____________条件.

8. 设 p：$x^2-x-20>0$，q：$\dfrac{1-x^2}{|x|-2}<0$，则 p 是 q 的____________条件.

三、解答题

9. (精练题)“$m=\dfrac{1}{2}$”是“直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 互相垂直”的什么条件?

充要条件的判断方法

10.(拔高题)(1)是否存在实数 m,使“$2x+m<0$”是“$x^2-2x-3>0$”的充分条件?

(2)是否存在实数 m,使“$2x+m<0$”是“$x^2-2x-3>0$”的必要条件?

关键点3　函数单调性、周期性的问题

指点迷津

在掌握单一的函数性质的基础上，结合函数图象来研究形如 $y=f[g(x)]$ 的单调性，$f(x+a)=-f(x)$、$f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$ 的周期性，以及一些交汇性问题，其中可以采用换元、分类讨论、数形结合等方法，不仅重视函数性质，还重视函数性质之间的联系，由单一到综合，实现螺旋式上升.

知识链接

1. 函数的单调性和单调区间.
2. 函数的周期性和最小正周期.
3. 复合函数的单调性：

对于复合函数 $y=f[g(x)]$，若 $t=g(x)$ 在区间 (a,b) 上是单调函数，且 $y=f(t)$ 在区间 $(g(a),g(b))$ 或者 $(g(b),g(a))$ 上是单调函数. 若 $t=g(x)$ 与 $y=f(t)$ 的单调性相同，则 $y=f[g(x)]$ 为增函数；若 $t=g(x)$ 与 $y=f(t)$ 的单调性相反，则 $y=f[g(x)]$ 为减函数.

能力提升

【例 1】 已知函数 $f(x)=x^2+(3a-1)x+2a$ 在 $(-\infty,-4)$ 上为减函数，求实数 a 的取值范围.

【解析】 函数 $f(x)$ 的减区间为 $\left(-\infty,-\dfrac{3a-1}{2}\right)$，故 $-\dfrac{3a-1}{2}\geqslant-4$，解得 $a\leqslant3$.

∴实数 a 的取值范围为 $(-\infty,3]$.

【点评】 理解单调区间与在某区间为单调函数的区别和联系，建立不等式.

【例 2】 已知函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+3)=\dfrac{1}{f(x)}$，若 $f(1)=3$，求 $f(13)$ 的值.

【解析】 ∵$f(x+3)=\dfrac{1}{f(x)}$，∴$f(x+6)=\dfrac{1}{f(x+3)}=f(x)$，

∴$f(x)$ 的最小正周期为 6，∴$f(13)=f(1)=3$.

【点评】 通过函数周期性的概念求周期，再利用周期求函数值.

【例 3】 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}-1$ 的减区间.

【解析】 函数 $f(x)$ 的图象是由 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 的图象向左平移 2 个单位，再向下平移 1 个单位得到的.

∴函数 $f(x)$的减区间为$(-\infty,-2)$,$(-2,+\infty)$.

【点评】 通过作图,利用数形结合的方式确定函数的减区间.

【例 4】 已知函数 $f(x)$对于任意实数 x 满足 $f(x+4)=-f(x)$,当 $x\in[-2,0]$时,$f(x)=x-1$.求 $f(2015)$的值.

【解析】 $\because f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$,∴函数 $f(x)$的最小正周期为 8,$\therefore f(2015)=f(2016-1)=f(-1)=-1-1=-2$.

【点评】 利用函数周期性求特定范围内抽象函数的值.

【例 5】 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$,满足 $f(x+1)=-\dfrac{1}{f(x)}$,且在$[-2,0]$上为增函数.设 $a=f(3)$,$b=f(\sqrt{2})$,$c=f(2)$,试判断 a,b,c 的大小关系.

【解析】 $\because f(x+2)=-\dfrac{1}{f(x+1)}=f(x)$,$\therefore f(x)$的最小正周期为 $T=2$.

$\therefore a=f(3)=f(-1)$,$b=f(\sqrt{2})=f(\sqrt{2}-2)$,$c=f(2)=f(0)$.

$\because -1<\sqrt{2}-2<0$ 且 $f(x)$在$[-2,0]$上为增函数.

$\therefore f(-1)<f(\sqrt{2}-2)<f(0)$,即 $a<b<c$.

【点评】 利用函数周期性和单调性比较函数值的大小.

拓展延伸

拓展点:复合函数的单调性

【例 1】 求函数 $y=3^{x^2-2x}$的减区间.

【解析】 所求函数的定义域为 **R**.设 $t(x)=x^2-2x$,则函数 $t(x)$在$(-\infty,1)$上是减函数,在$(1,+\infty)$上是增函数.

又$\because y=3^t$ 在 **R** 上是增函数,∴函数 $y=3^{x^2-2x}$的减区间为$(-\infty,1)$.

【点评】 本题采用换元的方式,利用复合函数单调性法则进行求解.

【例 2】 求函数 $y=\log_3(x^2-2x)$的减区间.

【解析】 $\because x^2-2x>0$,$\therefore x<0$ 或 $x>2$,∴所求函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

设 $t(x)=x^2-2x$,则函数 $t(x)$在$(-\infty,0)$上为减函数,在$(2,+\infty)$上为增函数.

又$\because y=\log_3 t$ 为增函数,$\therefore y=\log_3(x^2-2x)$的减区间为$(-\infty,0)$.

【点评】 本题利用复合函数单调性法则进行求解,但关键在于求函数的定义域,在函数的定义域范围内讨论函数的单调性.

自主模拟

一、选择题

1. 设 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数,a 为实数,则 ( )

A. $f(a)>f(2a)$ B. $f(a^2)<f(a)$ C. $f(a^2+a)<f(a)$ D. $f(a^2+1)>f(a)$

2. 函数 $y=1-\dfrac{1}{x-1}$ ( )

A. 在$(-1,+\infty)$上为增函数 B. 在$(-1,+\infty)$上为减函数

C. 在$(1,+\infty)$上为增函数 D. 在$(1,+\infty)$上为减函数

3. 已知函数 $f(x)$ 对任意的实数 x 满足 $f(x+1)=\frac{2}{f(x)}$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x+1$，则 $f\left(\frac{5}{2}\right)$ 的值为 ( )

A. 2　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 函数 $f(x)=\log_5(2x+1)$ 的增区间是 ( )

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

二、填空题

5. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，点 $A(0,-2)$，$B(-3,2)$ 都在其图象上，则不等式 $-2<f(x)<2$ 的解集为________.

6. 若函数 $f(x)=|x+a|$ 的增区间是 $[3,+\infty)$，则 $a=$________.

7. 若函数 $f(x)$ 对于实数 $x\geqslant 0$ 都有 $f(x+2)=f(x)$，且当 $x\in[0,2)$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)$，则 $f(2014)+f(2015)$ 的值为________.

8. 函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x}$ 的减区间为________.

三、解答题

9. (精练题)设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上以 6 为周期的函数，$f(x)$ 在 $(0,3)$ 上为减函数，且函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，判断 $f(1.5)$，$f(3.5)$，$f(6.5)$ 的大小关系.

10. (拔高题)已知 $f(x)=\begin{cases} a^x(x>1), \\ \left(4-\frac{a}{2}\right)x+2(x\leqslant 1) \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，求实数 a 的取值范围.

关键点 4　二次函数中的分类讨论思想

指点迷津

分类讨论思想在高中数学乃至整个数学领域都是非常重要的数学思想.学习和掌握分类讨论思想有利于提高分析问题和解决问题的能力,其实质是将整体问题转化为部分问题来解决,不同的数学问题均有不同的分类方法,而二次函数中的分类讨论问题,基本上是围绕二次函数的开口方向、对称轴、图象与 x 轴的交点、单调性等问题展开.我们解决的步骤为:(1)首先确定分类讨论的对象;(2)对分类讨论的对象进行合理的分类;(3)逐级分类,详细讨论,逐步解决;(4)归纳总结.

知识链接

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的基本性质:

(1)顶点坐标为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$,对称轴方程为 $x=-\dfrac{b}{2a}$.

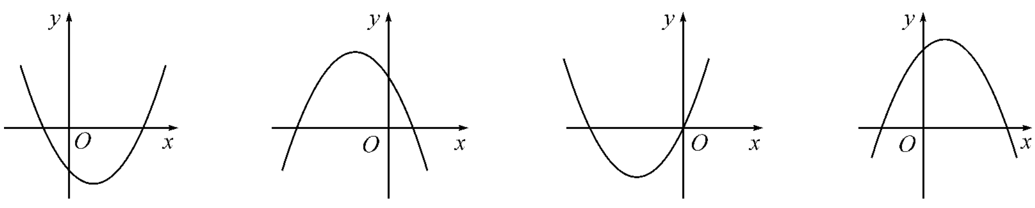
(2)定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $\left[\dfrac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$.

(3)当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时,取得最小值为 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

(4)单调性:此二次函数在 $\left(-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ 内是增函数;在 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right)$ 内是减函数.

能力提升

【例 1】　已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的系数满足 $abc<0$,则它的图象可能是　(　　)



A.　　B.　　C.　　D.

【解析】　二次函数的开口方向由 a 决定,对称轴由 a,b 决定,与 y 轴的交点的位置由 c 决定.因此,选项 A 中,可知 $c<0$,由题意得 $ab>0$,即对称轴方程为 $x=-\dfrac{b}{2a}<0$,不合题意;选项 B 中,可知 $c>0$,由题意得 $ab<0$,即对称轴方程为 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$,不合题意;选项 C 中,可知 $c=0$,即 $abc=0$ 不合题意;选项 D 中,可知 $c>0$,由题意得 $ab<0$,即对称轴方程为 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$,