

自动控制

理论

刘鸿飞 李政清 主编

*Zidong Kongzhi
Lilun*



电子科技大学出版社

自动控制 理论

刘鸿飞 李政清 主编

常州大学图书馆
藏书章

*Lidong Kongzhi
Lilun*



电子科技大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

自动控制理论 / 刘鸿飞, 李政清主编. —成都:
电子科技大学出版社, 2016.8
ISBN 978-7-5647-2706-2

I . ①自… II . ①刘… ②李… III . ①自动控制理论
—高等学校—教材 IV . ① TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 185165 号

自动控制理论

刘鸿飞 李政清 主编

出 版: 电子科技大学出版社 (成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编: 610051)
策划编辑: 罗 雅
责任编辑: 罗 雅
主 页: www.uestcp.com.cn
电子邮箱: uestcp@uestcp.com.cn
发 行: 新华书店经销
印 刷: 四川永先数码印刷有限公司
成品尺寸: 185mm×260mm 印张 11 字数 282 千字
版 次: 2016 年 8 月第 1 版
印 次: 2016 年 8 月第 1 次印刷
书 号: ISBN 978-7-5647-2706-2
定 价: 32.00 元

■ 版权所有 侵权必究 ■

- ◆ 本社发行部电话: 028-83202463; 本社邮购电话: 028-83201495。
- ◆ 本书如有缺页、破损、装订错误, 请寄回印刷厂调换。

前 言

自动控制技术已广泛应用于制造业、农业、交通、航空及航天等众多产业部门，极大地提高了社会劳动生产率，改善了人们的劳动环境，丰富和提高了人民的生活水平。在今天的社会生活中，自动化装置无所不在，为人类文明进步做出了重要贡献。

在控制技术需求推动下，控制理论本身也取得了显著进步。从线性近似到非线性系统的研究取得了新的成就，借助微分几何的固有非线性框架来研究非线性系统的控制，已成为目前重要的研究方向之一；离散事件动态系统理论的形成，扩展了对离散系统的描述和分析能力；分布参数系统的研究又有了新的突破；不确定性 H_∞ 控制及系统对外扰的鲁棒性分析和设计已扩展到无穷维空间。

本书主要考虑如何使大学生在学时少的情况下，能够掌握更多的自动控制理论知识。在编写过程中参考了大量的教科书，精选、编写了部分内容，在数学推理上力求通俗易懂，是具有实用价值的读物之一。它不仅可以作为大学生的教科书及参考书，还可用于电气自动化工程技术人员阅读和自学。

由于编者水平有限，时间仓促，书中难免有不妥和错误之处，恳请广大读者批评指正。

目 录

第 1 章 自动控制的基本概念	1
1.1 自动控制系统	1
1.2 自动控制系统的组成和类型	3
1.3 对自动控制系统性能的基本要求	7
第 2 章 自动控制系统的数学模型	8
2.1 动控制系统的微分方程	8
2.2 传递函数	11
2.3 控制系统的结构图	17
2.4 信号流图和梅森增益公式	23
第 3 章 时域分析法	29
3.1 时域分析法的概念	29
3.2 时域分析的主要性能指标	30
3.3 控制系统的稳态误差	32
3.4 基本控制规律的分析	40
第 4 章 根轨迹法	45
4.1 根轨迹法的基本概念	45
4.2 根轨迹的绘制	49
4.3 开环零、极点变化时的根轨迹	63

第 5 章 控制系统的频域分析法	65
5.1 频域分析法的基本概念	65
5.2 典型环节的频率特性	72
5.3 频域稳定判据	83
第 6 章 自动控制系统的校正	92
6.1 校正的基本概念和方法	92
6.2 校正装置及其特性	94
6.3 自动控制的串联校正	105
第 7 章 非线性系统分析	121
7.1 非线性控制系统概述	121
7.2 典型非线性特性	126
7.3 相平面的基本概念和绘制方法	133
第 8 章 离散控制系统	142
8.1 离散系统的基本概念	142
8.2 信号的采样与采样定理	144
8.3 Z 变换	148
8.4 离散控制系统的性能分析	159
参考文献	168

第 1 章 自动控制的基本概念

1.1 自动控制系统

1.1.1 自动控制与自动控制系统

在生产和科学发展的过程中,自动控制起着重要的作用。目前,自动控制广泛地应用于现代工业、农业、交通运输、国防和科学技术等要求较高的领域中。可以这样说,一个国家在自动控制方面水平的高低是衡量它的生产技术和科学技术水平先进与否的一项重要标志。自动控制涉及的范围很广,除了在宇宙飞船、导弹制导、飞机驾驶系统等领域中,在电力、机械、冶金、化工以及对人体有害的物质,如原子能反应堆等领域,自动控制也占据着十分重要的地位。它的概念已经扩大到其他领域,如经济、政治等领域。

自动控制就是在没有人的直接干预下,利用物理控制装置,对生产设备、生产过程、工艺参数和目标要求等进行自动调节与控制,使被控制的物理量(如温度、压力、pH 值等)保持恒定,或者按照一定的规律变化,达到要求的指标。例如矿井提升机速度的控制、水泥回转窑湿度的控制、造纸厂纸浆浓度的控制、轧钢厂加热炉温度的控制、物料传输机速度的控制等。

自动控制系统是指能够对被控制对象的工作状态进行自动控制的系统,是为实现某一控制目标所需要的所有物理部件的有效组合体。自动控制系统由自动控制装置与受控对象组成,一般按被控量命名,如速度控制系统、压力控制系统、温度控制系统等。自动控制系统的性能将直接影响到产品的产量、质量、成本、劳动条件和预期目标的完成。

生产的自动化、管理的科学化,大大地改善了劳动条件,使产品的质量得以提高,产量得以增加。近十几年来,计算机的广泛应用,使自动控制理论更加迅速地向前发展,使得自动控制技术所能完成的任务更加复杂,自动控制水平也大大地提高。电子技术和计算机技术的迅猛发展,为自动控制技术插上了翅膀,自动控制技术将在愈来愈多的领域发挥愈来愈重要的作用。自动控制系统涵盖的范围很广泛,包括人体自然系统、天体自然系统、季节自然系统、人造系统、家电控制系统、电梯控制系统、温度控制系统、水位控制系统、速度控制系统和汽车防抱死系统等。

1.1.2 自动控制理论的发展

自动控制技术的发展提出许多新问题,这些问题需要理论来支持。

1787 年,James Watt 为控制蒸汽机速度设计的离心调节器,是自动控制领域的第一项重大成果。1868 年,J. C. Maxwell 在论文《论调节器》中首先解释了 Watt 速度控制系统中出现的不稳定问题,通过线性常微分方程的建立和分析,指出了振荡现象的出现与从系统导出的

一个代数方程根的分布有密切的关系,开辟了用数学方法研究控制系统运动特性的途径。E. J. Routh(1877年)和 A. Hurwitz(1895年)分别独立地建立了直接根据代数方程的系数判别系统稳定性的准则。1892年, A. M. Lyapunov 用严格的数学分析方法全面地论述了稳定性问题, Lyapunov 稳定性理论至今仍然是分析系统稳定性的重要方法。

1922年, Minorsky 研制出船舶操纵自动控制器,并证明了通过系统的微分方程确定系统的稳定性的方法。1925年,英国电气工程师亥维赛把拉普拉斯变换应用到求解电路网络的问题上,创立了运算微积分,随后被应用到分析自动控制系统的问题上,并取得了显著的成就。1927年,美国贝尔实验室的电气工程师 H. S. Blsek 在解决电子管放大器失真问题时首先引入反馈的概念。1932年, Nyquist 提出了一种根据系统的开环频率响应(对稳态正弦输入)确定闭环系统稳定性的方法。1934年, Hezen 提出了用于位置控制系统的伺服机构的概念,讨论了可以精确跟踪变化的输入信号的机电伺服机构。1948年,美国科学家 W. R. Evans 提出了有名的根轨迹的分析方法,并于1950年进一步应用于反馈控制系统的设计,形成了与频率响应方法相对应的另一核心方法——根轨迹法。1956年,苏联科学家 L. S. Pontryagin 提出极大值原理;同年,美国数学家 R. Bellman 创立动态规划。极大值原理和动态规划为最优控制提供了理论工具。1959年,美国数学家 R. E. Kalman 提出了著名的卡尔曼滤波器,1960年又提出能控性和能观测性的概念。

19世纪50年代末,控制系统设计问题的重点从设计许多可行系统中的一种系统,转到设计在某种意义上的最佳系统。19世纪60年代,数字计算机的出现为复杂系统的基于时域分析的现代控制理论提供了可能。1960—1980年,确定性系统、随机系统的最佳控制以及复杂系统的自适应和学习控制都得到充分的研究。从1980年到现在,现代控制理论进展集中于鲁棒控制、 H_∞ 控制及其相关课题。

自动控制理论是研究自动控制共同规律的技术科学,既是一门古老的、日趋成熟的学科,又是一门发展的、具有强大生命力的新兴学科。自动控制理论的发展大致可分为以下主要阶段。

1. 第一阶段——经典控制理论

经典控制理论的基本特征为以传递函数为基础,研究单输入/单输出线性定常反馈控制系统的分析与设计问题,即用于常系数线性微分方程描述的系统的分析与综合。如调节电压改变电机的速度,调整方向盘改变汽车的运动轨迹等。这些理论发展较早,现已日臻成熟,但是只是讨论系统输入与输出之间的关系,而忽视系统的内部状态,是一种对系统的外部描述方法。

2. 第二阶段——现代控制理论

现代控制理论以状态空间法为基础,研究多输入/多输出、时变、非线性一类控制系统的分析与设计问题,实现自适应控制和最佳控制等。如把汽车看成一个具有两个输入(驾驶盘和加速踏板)和两个输出(方向和速度)的控制系统。计算机科学的发展,极大地促进了控制科学的发展。

3. 第三阶段——大系统控制理论

大系统控制理论是一种过程控制与信息处理相结合的动态系统工程理论,研究的对象具有规模庞大、结构复杂、功能综合、目标多样、因素众多等特点。它是一个多输入、多输出、

多干扰、多变量的系统。如人体,就可以看作一个大系统,其中有体温的控制、情感的控制、人体血液中各种成分的控制等。大系统控制理论目前仍处于发展阶段。

4. 第四阶段——智能控制理论

智能控制理论是近年来新发展起来的一种控制技术,是人工智能在控制上的应用。它的概念和原理主要是针对被控对象、环境、控制目标或任务的复杂性提出来的,指导思想是依据人的思维方式和处理问题的技巧,解决那些目前需要人的智能才能解决的复杂的控制问题。智能控制的方法包括模糊控制、神经网络控制、专家系统控制等,以解决传统控制系统不能解决的问题。

1.2 自动控制系统的组成和类型

1.2.1 基本组成部分

自动控制系统根据被控对象和具体用途的不同,可以有各种不同的结构形式。但是,从工作原理来看,自动控制系统通常是由一些具有不同职能的基本元部件所组成的。图1-1所示是一个典型自动控制系统的职能框图,简称方块图。图中的每一个方块,代表一个具有特定功能的元件。可见,一个完善的自动控制系统通常是由测量反馈元件、比较元件、放大元件、校正元件、执行元件以及被控对象等基本环节所组成的。通常,还把图中除被控对象外的所有元件合在一起,称为控制器。

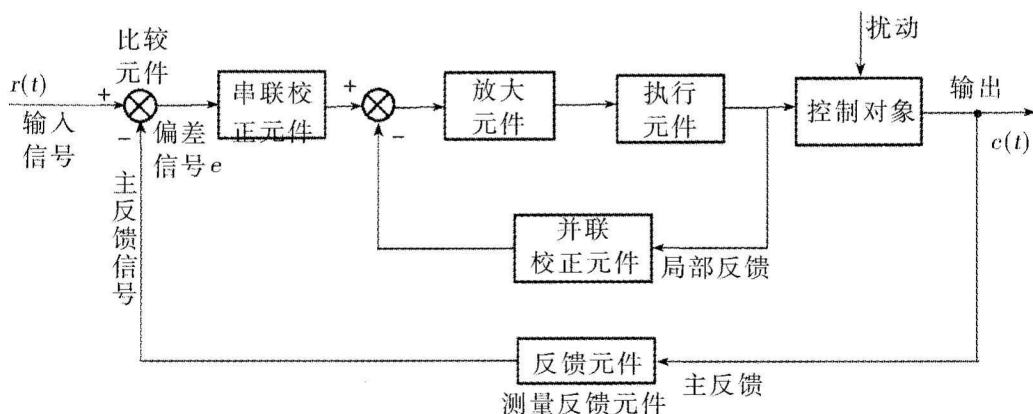


图 1-1 典型自动控制系统的方块图

图 1-1 所示各元件的功能如下。

测量反馈元件——用以测量被控量并将其转换成与输入量同一物理量后,再反馈到输入端以做比较。

比较元件——用来比较输入信号与反馈信号,并产生反映两者差值的偏差信号。

放大元件——将微弱的信号做线性放大。

校正元件——按某种函数规律变换控制信号,以利于改善系统的动态品质或静态性能。

执行元件——根据偏差信号的性质执行相应的控制作用,以便使被控量按期望值变化。

控制对象,又称被控对象或受控对象,通常是指生产过程中需要进行控制的工作机械或生产过程。出现于被控对象中需要控制的物理量称为被控量。

1.2.2 自动控制系统中常用的名词术语

系统:自动控制系统是由被控对象和自动控制装置按一定方式联结起来的,以完成某种自动控制任务的有机整体。

输入信号:系统的输入信号是指参考输入,又称给定量或给定值,它是控制着输出量变化规律的指令信号。

输出信号:系统的输出信号是指被控对象中要求按一定规律变化的物理量,又称被控量,它与输入量之间保持一定的函数关系。

反馈信号:由系统(或元件)输出端取出并反向送回系统(或元件)输入端的信号。反馈有主反馈和局部反馈之分。

偏差信号:它是指参考输入与主反馈信号之差。偏差信号简称偏差。

误差信号:它是指系统输出量的实际值与期望值之差,简称误差。在单位反馈的情况下,误差值也就是偏差值,二者是相等的。

扰动信号:简称扰动或干扰,它与控制作用相反,是一种不希望的、影响系统输出的不利因素。扰动信号既可来自系统内部,又可来自系统外部,前者称内部扰动,后者称外部扰动。

1.2.3 自动控制系统的类型

自动控制系统的分类方法种类繁多、错综复杂,主要根据数学模型的差异来划分不同系统。

1. 按控制方式分

(1) 开环控制系统

在开环控制系统中,系统输出只受输入的控制,控制精度和抑制干扰的特性都比较差。开环控制系统中,基于按时序进行逻辑控制的称为顺序控制系统;由顺序控制装置、检测元件、执行机构和被控工业对象所组成,主要应用于机械、化工、物料装卸运输等过程的控制以及机械手和生产自动线。

(2) 闭环控制系统

闭环控制系统是建立在反馈原理基础之上的,利用输出量同期望值的偏差对系统进行控制,可获得比较好的控制性能。闭环控制系统又称反馈控制系统。

2. 按信号流向划分

在前面的讨论中可以看出,不同控制方式的系统,信号的流向是不同的。故按信号的流向,可以将系统分为开环控制系统、闭环控制系统及复合控制系统。

3. 按输入信号变化规律划分

系统输入信号设定了系统预期的运行规律。输入信号的变化规律不同,对相应的控制系统的要求也就不同。按系统输入信号的变化规律可以将系统划分为恒值控制系统与随动控制系统。

(1) 恒值控制系统

此类控制系统的输入信号为一个常值,要求输出信号也为一个常值。系统在运行过程

中,由于各种扰动因素的影响,总会使实际输出值与预期值之间产生偏差。因此,恒值控制系统分析与设计的重点就在于系统的抗扰性能,研究各种扰动对输出的影响及抗扰的措施。前述的电动机调速系统即为典型的恒值控制系统。在工业控制中,如果被控量是温度、流量、压力、液位等生产过程参量时,这种控制系统则称为过程控制系统,它们大多数都属与恒值控制系统。

(2) 随动控制系统

此类系统的输入信号是预先未知的、随时间任意变化的函数,要求输出量以一定的精度和速度跟随输入量的变化而变化。因此,随动控制系统的分析与设计重点就在于系统的跟随性能——快速准确地复现输入信号。此时,扰动的影响是次要的。例如,雷达跟踪系统、电压跟随器等就是典型的随动系统。在随动系统中,如果输出量是机械位移或其导数时,这类系统称之为伺服系统。

4. 线性系统和非线性系统

同时满足叠加性与均匀性(又称为齐次性)的系统称为线性系统。叠加性是指当几个输入信号共同作用于系统时,总的输出等于每个输入单独作用时产生的输出之和;均匀性是指当输入信号增大若干倍时,输出也相应增大同样的倍数。

若以符号 $T[\cdot]$ 来表示系统输入与输出之间的关系,则在输入信号 $r(t)$ 作用下,系统的输出 $c(t)$ 可表示为

$$c(t) = T[r(t)] \quad (1-1)$$

借用这种形式,可以对线性系统加以描述。

设

$$c_1(t) = T[r_1(t)] \quad c_2(t) = T[r_2(t)] \quad (1-2)$$

叠加性可表示为

$$T[r_1(t) + r_2(t)] = T[r_1(t)] + T[r_2(t)] = c_1(t) + c_2(t) \quad (1-3)$$

均匀性可表示为

$$\begin{aligned} T[a_1 r_1(t)] &= a_1 T[r_1(t)] = a_1 c_1(t) \\ T[a_2 r_2(t)] &= a_2 T[r_2(t)] = a_2 c_2(t) \end{aligned} \quad (1-4)$$

式中, a_1 与 a_2 为两个任意的常数。

也可以将上述两点统一表示为(叠加原理)

$$T[a_1 r_1(t) + a_2 r_2(t)] = a_1 T[r_1(t)] + a_2 T[r_2(t)] = a_1 c_1(t) + a_2 c_2(t) \quad (1-5)$$

对于线性连续控制系统,可以用线性的微分方程来表示。

不满足叠加性与均匀性的系统即为非线性控制系统。显然,系统中只要有一个元件的特性是非线性的,该系统即为非线性的控制系统。非线性控制系统的特性要用非线性的微分或差分方程来描述。这类方程的特点是系数与变量有关,或者方程中含有变量及其导数的高次幂或乘积项。

严格来说,实际中不存在线性系统,因为实际的物理系统总是具有不同程度的非线性,如放大器的饱和特性、齿轮的间隙、电动机的死区及摩擦特性等。非线性控制系统的研究目前还没有统一的方法。但对于非线性程度不太严重的系统,可在一定范围内将其近似为线性系统。

5. 定常系统和时变系统

如果系统的参数不随时间而变化,则称此类系统为定常系统(或称为时不变系统);反

之,若系统的参数随时间改变,则称为时变系统。

对于时不变系统,由于系统参数不随时间变化,因此,在同样的起始状态下,系统的输出(响应)与输入信号作用于系统的时刻无关,即

$$T[r(t-t_0)] = c(t-t_0) \quad (1-6)$$

此表达式的含义为:输入信号延迟时间 t_0 ,则输出也同样延迟时间 t_0 ,波形形状不变。

时变系统由于系统的参数随时间改变,因此,此类系统的输出与输入信号作用于系统的时刻有关。

需要指出的是,线性常系数的微分方程或差分方程所描述的系统不一定是线性定常系统。只有将它们的解划分为零输入响应与零状态响应时,它们所代表的系统才分别具有零输入线性与零状态线性。因此,我们将线性常系数的微分方程或差分方程与线性定常系统等同起来时,总是要假定系统具有零初始的条件。如果初始条件不为零,则可以将其等效为外加的输入信号(激励)。

6. 连续系统和离散系统

为讨论系统的连续性与离散性,先要对信号的连续性与离散性加以定义。将自动控制系统中随时间变化的物理量统称为信号。按照时间函数取值的连续性与离散性可将信号划分为连续时间信号与离散时间信号(简称连续信号与离散信号)。若在所讨论的时间间隔内,除若干个不连续的点外,对于任意时间值都有确定的函数值,此信号就称为连续信号。而离散信号在时间上是离散的,只在规定的瞬时给出函数值,在其他时间没有定义,因此离散信号可以认为是一组序列值的集合。除了时间上的连续与离散外,信号的幅值也可以是连续或离散的(只能取某些规定的值):对于连续信号,若幅值也是连续的,则称为模拟信号。在一般情况下,往往对模拟信号和连续信号不加以区分。对于离散信号,若幅值是连续的,则称为采样信号;若幅值是离散的,则称为数字信号。在自动控制系统中,采样信号都是在连续信号的基础上经过采样后得到的,对采样信号再进行量化处理,就可以得到适于计算机控制的数字信号。

根据系统信号的不同特征,可以对自动控制系统加以分类。如果系统中的各变量都是连续信号,则称该系统为连续(时间)系统;如果在系统的一处或几处存在离散信号,则称该系统为离散(时间)系统。计算机控制系统和采样控制系统即为典型的离散系统,前面所讨论的电动机调速系统则为连续系统。

连续系统常用微分方程来描述,离散系统则采用差分方程来描述。对于两类系统的分析与综合,在理论与方法上都具有平行的相似性。对于线性定常的连续系统,其数学工具为建立在拉氏变换基础上的传递函数;对于线性定常离散系统,其数学工具为 z 变换。这两种分析方法都是在变换域内进行的。

7. 单输入/单输出系统与多输入/多输出系统

单输入/单输出系统(SISO)也称为单变量系统,系统的输入量与输出量各为一个。经典控制理论主要就是研究这一类系统。

多输入/多输出系统(MIMO)也称为多变量系统,系统的输入量与输出量多于一个。现代控制理论适用于这类系统的分析与综合。其数学工具为建立在线性代数基础上的状态空间法,这种方法是在时间域内进行的,而时域分析法对控制过程来说是最直接的。

1.3 对自动控制系统性能的基本要求

为了实现自动控制的基本任务,需要对系统在控制过程中表现出来的行为提出要求。对控制系统的基本要求,通常是通过系统对特定输入信号的响应来满足,常用单位阶跃信号作用下的过渡过程及稳态过程的一些特征值来表示。

对自动控制系统的研究(包括分析、综合)是从动态、静态两方面特性进行分析的。控制系统的性能可以用动态特性来衡量,根据动态特性在不同阶段的特点,在工程上常用稳、快、准三个特性来评价自动控制的总体精度。

稳定性,即系统正常工作的首要条件。被控制信号跟踪已变化的外作用信号,从一种状态到另一种状态,如最终能达到希望值,则认为该系统是稳定的。

快速性是衡量动态过程进行的快慢。对控制系统而言,仅满足稳定性的要求是不够的,还必须对其过渡过程的形式和快慢提出要求,过渡过程越短,说明系统的快速性越好。

准确性是系统正常工作时对精度的要求。系统动态过程结束后,被控量与给定值的偏差,称为稳态误差,它是衡量系统稳态精度的指标。精度以稳态误差表示,即实际输出 $c(t)$ 与期望值之差是否进入允许误差区 Δ (误差带)。以输入阶跃信号为例,单位阶跃响应如图 1-2 所示。

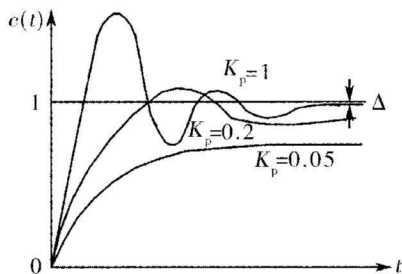


图 1-2 单位阶跃响应的过渡过程

第2章 自动控制系统的数学模型

2.1 自动控制系统的微分方程

微分方程是控制系统最基本的数学模型,要研究系统的运动,必须列写系统的微分方程。一个控制系统由若干具有不同功能的元件组成,首先要根据各个元件的物理规律,列写各个元件的微分方程,得到一个微分方程组,然后消去中间变量,即得控制系统总的输入和输出的微分方程。本节着重研究描述线性定常控制系统的微分方程的建立和求解方法。

2.1.1 线性系统微分方程建立的一般步骤

微分方程是描述自动控制系统动态特性的最基本的方法,其微分方程式的建立一般步骤如下。

(1) 根据元件的工作原理和在系统中的作用,确定系统和元件的输入量和输出量(必要时还考虑扰动量),并根据需要引进一些中间变量。

(2) 一般从系统的输入端开始,根据各元件在工作过程中所遵循的物理或化学定律,按工作条件忽略一些次要因素,并考虑相邻元件的彼此影响,列出微分方程。常用的定律有电路系统的基尔霍夫定律、力学系统的牛顿定律和热力学定律等。

(3) 将各元件或环节的微分方程联立起来,消去中间变量,就能得到系统输出量和输入量(包括扰动量)之间关系的微分方程,即元件的数学模型。

(4) 一般将与输出量有关的项写在方程的左端,与输入量有关的项写在方程的右端,方程两端的导数项均按降幂排列,最后将该方程整理成标准形式,其一般形式为

$$a_0 \frac{d^n x_0}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_0}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx_0}{dt} + a_n x_0 = b_0 \frac{d^m x_i}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_i}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dx_i}{dt} + b_m x_i$$

2.1.2 微分方程的建立举例

例2-1 由电阻 R 、电感 L 和电容 C 组成的 RLC 无源网络如图2-1所示。设输入量为 $u_1(t)$, 输出量为 $u_2(t)$, 试列写其微分方程。

解:(1) 确定输入、输出量

$u_1(t)$ ——输入量

$u_2(t)$ ——输出量

(2) 列写微分方程,根据基尔霍夫定律及元件约束关系有

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_2(t) &= u_1(t) \\ i(t) &= C \frac{du_2(t)}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

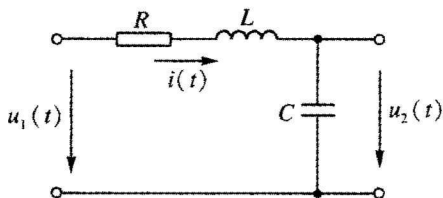


图 2-1 RLC 无源网络

(3) 消去中间变量 $i(t)$, 可得电路微分方程式

$$LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + RC \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = u_1(t) \quad (2-2)$$

可见, RLC 无源网络的动态数学模型是一个二阶常系数线性微分方程。

例 2-2 如图 2-2 所示为有源 RC 网络, 设输入电压为 $u_i(t)$, 输出电压为 $u_o(t)$, 试列写其微分方程。

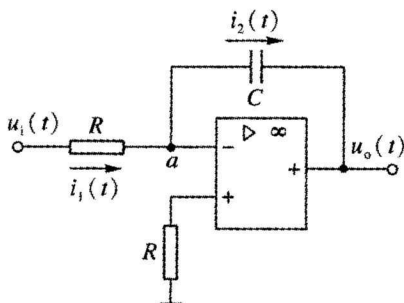


图 2-2 有源 RC 网络

解: 根据运算放大器的特性可知

$$\left. \begin{aligned} u_o(t) &\approx 0 \\ i_1(t) &= -i_2(t) \\ \frac{u_i(t)}{R} &= i_1(t) \\ i_2(t) &= -C \frac{du_o(t)}{dt} = \frac{u_i(t)}{R} \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

由此可列出系统微分方程为

$$-RC \frac{du_o(t)}{dt} = u_i(t) \quad (2-4)$$

例 2-3 试写出图 2-3 所示电枢控制的他励直流电动机的微分方程。以电枢电压为输入量, 以电动机输出角速度为输出量。

解: 直流电动机的运动是一种复合系统的运动。它由两个子系统构成: 一个是电网络系统, 产生电磁转矩; 另一个是机械运动系统, 输出机械能带动负载转动。直流电动机的运动方程可由以下三部分组成。

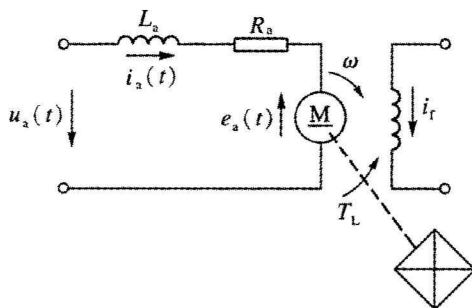


图 2-3 他励直流电动机示意图

(1) 电枢回路电压平衡方程

$$u_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_a(t) \quad (2-5)$$

式中, $e_a(t)$ 为电动机电枢反电动势, 可表示为

$$e_a(t) = C_e \omega(t)$$

C_e 为反电动势常数, $V/(\text{rad/s})$ 。

(2) 电磁转矩方程

$$T_e(t) = G_m i_a(t) \quad (2-6)$$

式中, G_m 为电动机转矩系数, $N \cdot m/A$; $T_e(t)$ 为电枢电流产生的电磁转矩, $N \cdot m$ 。

(3) 电动机轴上的转矩平衡方程

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t) = T_e(t) - T_L(t) \quad (2-7)$$

式中, $T_L(t)$ 为负载力矩, $N \cdot m$; f 为电动机和负载折合到电动机轴上的黏性摩擦系数, $N \cdot m/(\text{rad/s})$; J 为电动机和负载折算到电动机轴上的转动惯量, $N \cdot m \cdot s^2$ 。

消去中间变量 $i_a(t)$, $e_a(t)$ 及 $T_e(t)$, 可得出由 $u_a(t)$, $\omega(t)$ 及 $T_L(t)$ 表示的微分方程

$$\frac{JL_a d^2\omega(t)}{C_m dt^2} + \left(\frac{L_a f}{C_m} + \frac{JR_a}{C_m}\right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \left(C_e + \frac{R_a f}{C_e}\right) \omega(t) = u_a(t) - \frac{R_a}{C_m} T_L(t) - \frac{L_a dT_L(t)}{C_m dt} \quad (2-8)$$

这是一个二阶微分方程。表明当以电枢电压为输入, 电动机角速度为输出时, 电枢控制的他励直流电机是二阶系统。在工程实际中, 为便于分析系统, 常略去次要因素, 使系统变得简单。下面分几种情况讨论。

① 忽略黏性摩擦的影响, 即设 $f = 0$, 这时式(2-8)变为

$$\frac{JL_a d^2\omega(t)}{C_m dt^2} + \frac{JR_a d\omega(t)}{C_m dt} + C_e \omega(t) = u_a(t) - \frac{R_a}{C_m} T_L(t) - \frac{L_a dT_L(t)}{C_m dt} \quad (2-9)$$

② 忽略电枢电感的影响, 即设 $L_a = 0$, 这时式(2-8)变为

$$\frac{JR_a d\omega(t)}{C_m dt} + \left(C_e + \frac{R_a f}{C_e}\right) \omega(t) = u_a(t) - \frac{R_a}{C_m} T_L(t) \quad (2-10)$$

此系统简化为一阶系统。

③ 同时忽略黏性摩擦和电感的影响, 即设 $f = 0$, $L_a = 0$, 式(2-8)变为一阶系统

$$T_m \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \frac{1}{C_e} u_a(t) - \frac{T_m}{J} T_L(t) \quad (2-11)$$

2.2 传递函数

微分方程是在时域分析系统的数学模型,它提供了分析问题的全部信息。在给定外作用和初始条件下,求解微分方程,可知系统的输出响应。这种分析方法很直观,如利用计算机进行解算,将能迅速而准确地得出方程的解。但是,当要研究系统的结构或参数变化对输出的影响时,利用这种方法,便要重新列写和求解微分方程,这既不方便,又很难求得一个规律性的结论。于是人们提出另一个数学模型,即传递函数。这是在用拉普拉斯变换方法求解微分方程过程中引出来的复域中的数学模型,它不但能等同微分方程反映系统的输入、输出动态特性,而且能间接地反映结构、参数变化时对系统输出的影响。

2.2.1 定义

在初始条件为零时,传递函数为输出量的拉氏变换式与输入量的拉氏变换式之比,即

$$\text{传递函数}(s) = \frac{\text{输出量的拉氏变换式}}{\text{输入量的拉氏变换式}} = \frac{C(s)}{R(s)}$$

初始条件为零,一般是输入量在 $t=0$ 时刻以后才作用于系统,系统的输入量和输出量及其各阶导数在 $t \leq 0$ 时的值均为零。在研究一个系统时,通常假定该系统原来处于稳定平衡状态,输入量不变化,系统的输出量就不会发生变化。系统的各个变量都可用输入量作用前的稳态值作为起算点(即零点),所以一般都能满足零初始条件。

传递函数一般表达式为:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{M(s)}{N(s)} \quad (2-12)$$

式中, $M(s)$ 为传递函数的分子多项式; $N(s)$ 为传递函数的分母多项式。

由以上推导过程可知,正是因为初始条件为零,才能将微分方程中的微分算符 $d^{(i)}/dt^{(i)}$ 直接换成相应的 $s^{(i)}$,即可得到系统的传递函数。

对于 n 阶线性定常系统,

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

设初始条件为零,经拉氏变换后,得

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \cdots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

所以, n 阶线性定常系统的输入、输出传递函数为

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (\beta_i s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} \end{aligned} \quad (2-13)$$