本书能 补充强化 举一反三 温故知新

你可以 充实一个暑假 领先高中三年

新编高中预备班

初高中衔接教材

数学

丛书主编 许康华
本册主编 许康华

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

新编高中预备班

初高中衔接教材

数　学

本册主编　许康华

丛书主编　许康华
副 主 编　闻雪洪　毛　文　褚小光
编　　委　（以下排名不分先后）
毛　文　王斌杰　许康华　沈学功
宋顺生　彭智华　吴瑛翰　廖　红
闻雪洪　裘明惠　施小琴　吴　斌
曹关明　徐献灿　高振华　潘成华
田开斌

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编高中预备班：初高中衔接教材. 数学 / 许康华主编. —杭州：浙江大学出版社，2016.5

ISBN 978-7-308-15760-5

Ⅰ.①新… Ⅱ.①许… Ⅲ.①中学数学课—初中—升学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 081974 号

新编高中预备班：初高中衔接教材·数学

许康华 主编

责任编辑 夏晓冬
责任校对 陈 宇 金佩雯
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排 版 杭州星云光电图文制作有限公司
印 刷 富阳市育才印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 9.75
字 数 237 千
版 印 次 2016 年 5 月第 1 版 2016 年 5 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-15760-5
定 价 25.00 元

前　言

《高中预备班—初高中衔接教材》畅销10年不衰，可谓是教辅出版的一个奇迹.究其原因，其一，内容精当，作者、编辑精雕细刻；其二，得到广大读者的厚爱，许多读者为我们出谋划策，提出了宝贵意见与建议.为追求卓越，也鉴于中小学教育、教学和考试改革日新月异，我们对丛书进行全面修订，使丛书更加适合学生使用，帮助学生顺利完成初中升高中的衔接.

初中教学与高中教学相比，在教学要求、教学进度与教学方式、知识体系、学习方法、思维层次、能力要求等诸方面都有较大的变化.受这些变化影响，有相当的学生不能一下子适应高中学习，学习积极性受到一定的挫伤.因此，如何采取有效的措施做好衔接，是摆在我们师生面前的一个共同的课题.我们希望通过本书的使用能使衔接变得更自然一些，能使同学们在高中起始阶段的学习中少走弯路，从而能使对高中课程的学习变得更为顺利.

本丛书具有以下一些突出特点：

基础性　充分体现新课程标准的精神，既强化与高中知识密切相关的初中知识模块，但又不是对这些知识模块的简单回顾与复习，而是同时渗透高中学科的知识与方法，化解高中教学中的一些难点，为高中学习做好必要的铺垫.

针对性　力图避免衔而不接的毛病，系统介绍在高中起始阶段教学中的主干内容，希望通过这些内容的学习，使同学们在心理上逐渐适应高中学科的教法、学法.

前瞻性　撷取各学科中的一些主要方法和思想，以这些思想方法的介绍为经，以知识的介绍为纬，经纬交叉，形成一个知识网络.希望以此启迪学生的思维，培养学生学习的兴趣，提高学生的综合素质与创新能力.

创新性　体现素质教育的理念，强调培养学生的创新精神、探究能力和实践能力，安排了许多探索性问题和来自实际生活的应用题.

实用性　内容编排由浅入深，层次分明，例题习题丰富，覆盖面广，且同步配套，解答详细，使本书既便于教师教学，又便于学生自学.事实上，培养自学能力是学好每门功课的一个重要方面.

"路漫漫其修远兮，吾将上下而求索."囿于水平所限和时间仓促，书中纰漏及不当之处在所难免，恳请专家读者不吝赐教，以便在日后再版时完善提高，同时也预祝同学们能顺利完成高中三年的学业.

目　录

Contents

知 识 篇

第1讲 集　　合

知识要点

1. 集合的概念

(1) 集合

一般地,我们把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫做集合(简称为集).

(2) 集合中元素的特性

集合中的元素具有以下三个特性:

(ⅰ)确定性:设 A 是一个给定的集合,x 是某一具体对象,则 x 或者是 A 的元素,或者不是 A 的元素,两种情况有一种且只有一种成立.如$\sqrt{2}$,它属于实数集,即$\sqrt{2}$ 是实数集的一个元素,但$\sqrt{2}$ 不是有理数集的元素.

(ⅱ)互异性:对于一个给定的集合,它的任何两个元素都是不同的,两个相同的对象作为集合中的元素只记作一个,不能重复出现.如方程 $x^2-2x+1=0$ 的两个根,$x_1=x_2=1$,用集合记为$\{1\}$,而不能记为$\{1,1\}$.

(ⅲ)无序性:集合与其中的元素排列顺序无关,如集合$\{a,b,c,d\}$与$\{a,d,c,b\}$表示的是同一个集合.

2. 元素与集合的关系

如果 a 是集合 A 中的元素,就说 a 属于集合 A,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于集合 A,记作 $a\notin A$.

3. 常用数集及其记法

全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集),记作 $\mathbf{N}$;所有正整数组成的集合称为正整数集,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$;全体整数组成的集合称为整数集,记作 $\mathbf{Z}$;全体有理数组成的集合称为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;全体实数组成的集合称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.

4. 集合的表示方法

(1) 列举法

把集合的元素一一列举出来,并用花括号"$\{\}$"括起来表示集合的方法叫做列举法.列举法常用来表示有限集.

(2) 描述法

用集合所含元素的共同特性表示集合的方法称为描述法.具体方法是:在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围,再画一条竖线,在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

典型例题解析

例 1　判断以下各组对象能否构成集合.

(1) 很小的正实数；

(2) 某班所有高个子的同学；

(3) 方程 $x^2-4x+3=0$ 的所有实数解；

(4) $\sqrt{2}$ 的近似值；

(5) 我国所有的大城市；

(6) 在直角坐标平面上横坐标与纵坐标相等的所有点.

分析　根据集合元素的确定性进行判断,所给对象不明确就不能构成集合.

解　(1),(2),(4),(5) 中的对象没有明确的判断标准,因此不能构成集合.

(3),(6) 中的对象具体、明确,可以构成集合.

例 2　求集合 $\{a^2,0,1\}$ 中元素 a 的取值范围.

分析　根据集合元素的互异性,集合中的各元素应该是互不相等的.

解　由集合元素的互异性知,a 应满足 $a^2\neq 0$,且 $a^2\neq 1$,所以 a 的取值范围是 $a\in\mathbf{R}$,且 $a\neq 0$,$a\neq\pm 1$.

例 3　用适当的方法表示下列集合,并指出是有限集还是无限集.

(1) 由所有非负奇数组成的集合；

(2) 由大于 10 小于 30 的所有偶数组成的集合；

(3) 方程 $x^2+x+1=0$ 的实数解组成的集合；

(4) 不等式 $2x+1>0$ 的解组成的集合；

(5) 方程组 $\begin{cases}x+3y=11\\2x-y=8\end{cases}$ 的解组成的集合；

(6) 在平面直角坐标系上所有第二象限的点组成的集合.

解　(1) 由所有非负奇数组成的集合可表示为 $A=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{N}\}$,也可表示为 $\{1,3,5,7\cdots\}$,A 是无限集.

(2) 满足条件的数有 12,14,16,18,20,22,24,26,28,所以所求集合用列举法表示为 $B=\{12,14,16,18,20,22,24,26,28\}$,用描述法表示为 $B=\{x\mid x=2n,5<n<15,n\in\mathbf{N}\}$,$B$ 是有限集.

(3) 因为方程 $x^2+x+1=0$ 的判别式 $\Delta<0$,故此方程无实数解.所以所求集合为空集(指不含任何元素的集合),空集用符号 $\varnothing$ 表示,它是有限集.

(4) 所求集合用描述法表示为 $C=\{x\mid 2x+1>0,x\in\mathbf{R}\}$,$C$ 是无限集.

(5) 所求集合用描述法表示为 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x+3y=11\\2x-y=8\end{cases}\right\}$,由方程组解得 $x=5$,$y=2$,故所求集合也可用列举法表示为 $D=\{(5,2)\}$,D 是有限集.

(6) 所求集合为 $E=\{(x,y)\mid x<0,y>0$,且 $x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,$E$ 是无限集.

说明　本例中,(1),(2),(3) 三个集合中的元素是实数,它们都是数集;(5),(6) 两个

集合中的元素是点(或点的坐标),它们是点集,要注意区分数集与点集.

例 4 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{12}{5-x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{Z}\right.\right\}$,用列举法表示集合 A.

解 因为 $\frac{12}{5-x}$ 是自然数,且 $5-x$ 是整数,所以 $\frac{12}{5-x}$ 必是 12 的正约数,故 $5-x$ 也必是 12 的正约数,即有 $5-x=1,2,3,4,6,12$;$x=4,3,2,1,-1,-7$. 于是 $A=\{1,2,3,4,-1,-7\}$.

例 5 已知集合 $A=\{a-2,2a^2+5a,12\}$,且 $-3\in A$,求实数 a.

解 因为 $-3\in A$,所以 $-3=a-2$ 或 $-3=2a^2+5a$. 解得 $a=-1$ 或 $a=-\frac{3}{2}$. 当 $a=-1$ 时,有 $a-2=-3$,$2a^2+5a=-3$. 所以 $a=-1$ 舍去,因此 $a=-\frac{3}{2}$.

说明 在分析集合元素特性时,经常需用到分类讨论思想.

例 6 若集合 $A=\{x\mid x^2+ax+b=x\}$中,仅有一个元素 a,求 a 与 b 的值.

分析 集合 A 只有一个元素,意味着方程 $x^2+ax+b=x$ 的两个实根相等. 想到这一点,本题就不难解决了.

解 因为 A 中仅有一个元素 a,所以一元二次方程 $x^2+(a-1)x+b=0$ 有等根 a,故

$$\begin{cases}a^2+(a-1)a+b=0 & ①,\\ \Delta=(a-1)^2-4b=0 & ②.\end{cases}$$

由 ①,② 消去 b 得,$(a-1)^2+4a^2+4(a-1)a=0$,即$(3a-1)^2=0$,故 $a=\frac{1}{3}$,$b=\frac{1}{9}$.

另解 由题意知,一元二次方程 $x^2+(a-1)x+b=0$ 有等根 a,故由韦达定理知

$$\begin{cases}a+a=-(a-1),\\ a\cdot a=b,\end{cases}$$

解得 $a=\frac{1}{3}$,$b=\frac{1}{9}$.

例 7 已知集合 $A=\{x\mid ax^2-3x+2=0\}$. 若 A 中最多只有一个元素,试求 a 的取值范围.

解 (1) 当 $a=0$ 时,原方程为 $-3x+2=0$,则 $x=\frac{2}{3}$,符合题意.

(2) 当 $a\neq 0$ 时,方程 $ax^2-3x+2=0$ 为一元二次方程. 由 $\Delta=9-8a\leqslant 0$,得 $a\geqslant\frac{9}{8}$.

所以,当 $a\geqslant\frac{9}{8}$ 时,方程 $ax^2-3x+2=0$ 有两个相等的实根或无实根,符合题意.

综上所述,a 的取值范围是 $a=0$ 或 $a\geqslant\frac{9}{8}$.

说明 形如 $ax^2+bx+c=0$ 的方程,不一定是一元二次方程,需讨论二次项的系数 a.

例 8 由实数构成的集合 A 满足条件:若 $a\in A$,$a\neq 1$,则 $\frac{1}{1-a}\in A$. 证明:

(1) 若 $2\in A$,则集合 A 必还有另外两个元素,并求出这两个元素;

(2) 非空集合 A 不可能是单元素集.

分析　由集合 A 满足的条件可求出其他元素，要证明是不可能的问题，常用反证法.

解　(1) 因为 $a\in A, a\neq 1, \dfrac{1}{1-a}\in A$. 所以当 $2\in A$ 时，有 $\dfrac{1}{1-2}=-1\in A$；由于 $-1\neq 1$，故有 $\dfrac{1}{1-(-1)}=\dfrac{1}{2}\in A$；由于 $\dfrac{1}{2}\neq 1$，故有 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2\in A$. 因此，集合 A 中的另外两个元素是 $-1, \dfrac{1}{2}$.

(2) 假设集合 A 是单元素集，则必有 $a=\dfrac{1}{1-a}$，即 $a^2-a+1=0$.

由于 $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times 1=-3<0$，

故此方程没有实根. 假设不成立，从而结论成立.

▶▶▶▶　习　题　◀◀◀◀

1. 下列各对象中，能够形成一个集合的是　(　　)

   A. 世界上所有矮个子的人　　B. 大于 -5 的实数

   C. 著名的科学家　　D. 比较容易的数学题

2. 集合 $A=\{x \mid x\leqslant 2\sqrt{37}\}, a=3\sqrt{10}$，则　(　　)

   A. $a\in A$　　B. $a\notin A$　　C. $\{a\}\in A$　　D. 以上都不对

3. 设 $A=\{1, 2a+1, a^2-2\}$，若 $5\in A$，则 a 的值为　(　　)

   A. 2　　B. $\sqrt{7}$ 或 2　　C. $-\sqrt{7}$ 或 2　　D. $\pm\sqrt{7}$ 或 2

4. 集合 S 与 T 表示同一个集合的是　(　　)

   A. $S=\{0\}, T=\varnothing$

   B. $S=\{1, -1\}, T=\{-1, 1\}$

   C. $S=\{x \mid y=x^2\}, T=\{y \mid y=x^2\}$

   D. $S=\{(1, -2)\}, T=\{(-2, 1)\}$

5. 设 P, Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b \mid a\in P, b\in Q\}$，若 $P=\{0, 2, 5\}, Q=\{1, 2, 6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是　(　　)

   A. 9 个　　B. 8 个　　C. 7 个　　D. 6 个

6. 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空：

   (1) 1 ________ $\mathbf{N}$　　(2) 0 ________ $\mathbf{N}^*$　　(3) $\sqrt{2}$ ________ $\mathbf{Q}$

   (4) $\dfrac{3}{5}$ ________ $\mathbf{Z}$　　(5) -2 ________ $\mathbf{N}$　　(6) 3.14 ________ $\mathbf{Q}$

   (7) $\dfrac{1}{7}$ ________ $\mathbf{R}$　　(8) π ________ $\mathbf{R}$　　(9) -5 ________ $\mathbf{Z}$

7. 若 a, b, c 是非零实数，$x=\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{c}{|c|}$，则由数 x 组成的集合可以表示为________.

8. 已知集合 $A=\{x \mid -2<x<a, x\in \mathbf{Z}\}$，若集合 A 中恰好有 3 个元素，则 a 的取值范围是________.

9. 按要求表示下列集合.

(1) 用列举法表示 $A=\{(x,y)\mid x+2y=9,x\in\mathbf{N}^*,y\in\mathbf{N}^*\}$;

(2) 用描述法表示 $B=\{1,4,7,10,13,16\}$.

10. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 中只有一个元素,求 a 的值,并求出这个元素;

(2) 若 A 中至多只有一个元素,求 a 的取值范围.

11. 非空集合 M 中的元素都是正整数,且满足:如果 $x\in M$,则必有 $6-x\in M$,试写出所有这样的集合 M.

12. 已知集合 $A=\{a-1,3a+1,a^2+a+2\}$，且 $4\in A$，求实数 a.

13.* 已知集合 $A=\{x\mid x=m^2-n^2,m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}\}$.

求证：(1) 任何奇数都是 A 的元素；

(2) 任何形如 $4k-2(k\in\mathbf{N}^*)$ 的偶数都不是 A 的元素.

第2讲 代数式及恒等变形

知识要点

1. 乘法公式

(1) 平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

(2) 完全平方公式$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;

(3) 三数和的平方公式$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;

(4) 立方和公式$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$;

(5) 立方差公式$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$;

(6) 完全立方公式$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

2. 二次根式

(1) 定义　形如$\sqrt{a}\,(a\geqslant 0)$的式子叫做二次根式,化简后被开方数相同的二次根式叫同类二次根式.

(2) 性质　(ⅰ)$\sqrt{a}\geqslant 0$;(ⅱ)$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0).\end{cases}$

(3) 运算　乘法运算$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\,(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$;除法运算$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\,(a\geqslant 0,b>0)$.

3. 幂的运算

(1) 正整数指数幂 $a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{个}a}$.

(2) 零指数幂 $a^0=1(a\neq 0)$.

(3) 负整数指数幂 $a^{-p}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^p$ ($a\neq 0$, p 是正整数).

整数指数幂的运算性质

(ⅰ) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ (m,n 是整数);

(ⅱ) $(a^m)^n=a^{mn}=(a^n)^m$ (m,n 是整数);

(ⅲ) $(ab)^n=a^nb^n$ (n 是整数);

(ⅳ) $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ($a\neq 0,m,n$ 是整数).

(4)正分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ ($a>0,m,n$ 是正整数,$n>1$),

负分数指数幂 $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ ($a>0,m,n$ 是正整数,$n>1$).

上述的整数指数幂的运算性质,对于有理数指数幂也同样适用,即

(ⅰ) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$ ($a>0,s,r$ 是有理数);

(ⅱ) $(a^r)^s=a^{rs}=(a^s)^r$ ($a>0$，s，r 是有理数)；

(ⅲ) $(ab)^r=a^rb^r$ ($a>0$，$b>0$，r 是有理数).

典型例题解析

例 1　化简下列各式.

(1) $(1-m)(1+m)(m^2+m+1)(m^2-m+1)$；

(2) $(x^2+2xy+y^2)(x^2-xy+y^2)^2$.

解　(1) 原式 $=[(1-m)(1+m+m^2)][(m+1)(m^2-m+1)]$

$=(1-m^3)(m^3+1)=1-m^6$.

(2) 原式 $=(x+y)^2(x^2-xy+y^2)^2=[(x+y)(x^2-xy+y^2)]^2$

$=(x^3+y^3)^2=x^6+2x^3y^3+y^6$.

说明　在进行代数式的乘法、除法运算时，要观察代数式的结构是否符合乘法公式的结构.

例 2　已知 $x^2-5x+1=0$，求 $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ 的值.

解　因为 $x^2-5x+1=0$，所以 $x\neq0$，所以 $x+\dfrac{1}{x}=5$，

原式 $=(x+\dfrac{1}{x})(x^2-1+\dfrac{1}{x^2})=(x+\dfrac{1}{x})\left[(x+\dfrac{1}{x})^2-3\right]=5\times(5^2-3)=110$.

说明　本题若是先从方程 $x^2-5x+1=0$ 中解出 x 的值后，再代入代数式求值，则计算较繁.现在我们根据条件式与求值式的联系，用整体代换的方法，简化了计算.整体代换是代数求值中一种常用的思想方法.

例 3　已知 $a+b+c=0$，求 $\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}$ 的值.

分析　要求值，必须充分地利用 $a+b+c=0$ 这个条件，联系到式子的分母含有平方，可以把已知条件 $a+b+c=0$ 先移项，再两边平方.

解　由 $a+b+c=0$，得 $a=-b-c$，两边平方，得 $a^2=b^2+c^2+2bc$，

即 $b^2+c^2-a^2=-2bc$.同理可得 $c^2+a^2-b^2=-2ca$，$a^2+b^2-c^2=-2ab$.

所以，原式 $=\dfrac{1}{-2bc}+\dfrac{1}{-2ca}+\dfrac{1}{-2ab}=-\dfrac{a+b+c}{2abc}=0$.

说明　解题时要注意多寻找条件与结论之间的联系，并联想相应的知识方法.

例 4　已知 $a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=2$，求 $ab+bc+ca$ 的值.

解　因为 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$，

所以 $1^2=2+2(ab+bc+ca)$，所以 $ab+bc+ca=-\dfrac{1}{2}$.

说明　注意 $a+b+c$，$ab+bc+ca$，$a^2+b^2+c^2$ 之间的联系，要能正用、逆用三个数和的平方公式.

例 5　化简下列各式：

(1) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$；

(2) $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}$.

解 (1) 因为$\sqrt{2}>1,\sqrt{3}>\sqrt{2},2>\sqrt{3}$,

所以,原式$=|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+|\sqrt{3}-2|=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}=1$.

(2) 原式$=\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^3}=|x+1|+x-1$

$$=\begin{cases}(x+1)+x-1=2x,(x\geqslant -1),\\ -(x+1)+x-1=-2,(x<-1).\end{cases}$$

说明 请注意性质$\sqrt{a^2}=|a|$的使用:在化去绝对值符号而字母的范围未知时,必须对字母的取值进行分类讨论.

例 6 已知$\sqrt{2y-24}+\sqrt{ax-y-3x}=0$,问:$a$为何值时,$x$为负数?

分析 根据非负数的性质,原方程可转化为$2y-24=0$且$ax-y-3x=0$,进而考察解的情况.

解 原方程等价于方程组$\begin{cases}2y-24=0,\\ ax-y-3x=0.\end{cases}$所以$\begin{cases}y=12,\\ x=\dfrac{12}{a-3}(a\neq 3).\end{cases}$

所以,当$a<3$时,$x<0$,即$a<3$时,x为负数.

说明 去根式是解决问题的关键.通过去根式,用a表示x,从而得到关于a的不等式,求出a的取值范围.

例 7 已知$0<m<1$,且$m+m^{-1}=6$,求$\sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$的值.

分析 寻找所求与已知之间的关系是解题的突破口,易知$(\sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}})^2=m+\dfrac{1}{m}-2=m+m^{-1}-2$,则可先求得$(\sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}})^2$的值,再求出$\sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$的值.

解 因为$(\sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}})^2=m+\dfrac{1}{m}-2=m+m^{-1}-2=6-2=4$,

又因为$0<m<1$,所以$0<\sqrt{m}<1,\dfrac{1}{\sqrt{m}}>1$,则$\sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}}<0$,所以$\sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}}=-2$.

说明 本题与例2类似,不是直接求m的值,而是将$m+m^{-1}$,即$\sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$当作一个整体,将要求的式子转化为含$m+m^{-1}$的式子,再求值.

例 8 已知$a>0,a^{2x}=3$,求$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$的值.

分析 由立方和公式,将分子分解因式,化简后再求值.

解 原式$=\dfrac{(a^x)^3+(a^{-x})^3}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}$

$=a^{2x}-1+a^{-2x}=3+\dfrac{1}{3}-1=\dfrac{7}{3}$.

说明 此题除上述解法外,还可直接由条件$a^{2x}=3$,解出$a^x=\sqrt{3}$,再代入求值.(注意$a^x\neq-\sqrt{3}$).

例 9 若有理数 x,y,z 满足$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$,请确定$(x-yz)^3$ 的值.

分析 由已知等式先将其配方,即可求出 x,y,z 的值.

解 原方程可变形为 $x+y+z-2\sqrt{x}-2\sqrt{y-1}-2\sqrt{z-2}=0$,

配方得$(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y-1}-1)^2+(\sqrt{z-2}-1)^2=0$,

所以$\sqrt{x}-1=0$,$\sqrt{y-1}-1=0$,$\sqrt{z-2}-1=0$,

即 $x=1,y=2,z=3$. 则$(x-yz)^3=(1-2\times3)^3=-125$.

说明 在此题的配方过程中,关键要抓住 $x=(\sqrt{x})^2$,$y-1=(\sqrt{y-1})^2$,$z-2=(\sqrt{z-2})^2$.

例 10 化简$\left(\frac{\sqrt{a}+2}{a-2\sqrt{a}}+\frac{1-\sqrt{a}}{a-4\sqrt{a}+4}\right)\div\left(1-\frac{4}{\sqrt{a}}\right)-\left(\frac{\sqrt{a}+2}{a-4}\right)^2$.

解 原式$=\left[\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)}+\frac{1-\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-2)^2}\right]\div\frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}-\left[\frac{\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a})^2-2^2}\right]^2$

$$=\left[\frac{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)^2}+\frac{\sqrt{a}(1-\sqrt{a})}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)^2}\right]\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-4}-\left(\frac{1}{\sqrt{a}-2}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)^2}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-4}-\left(\frac{1}{\sqrt{a}-2}\right)^2=\frac{1}{(\sqrt{a}-2)^2}-\left(\frac{1}{\sqrt{a}-2}\right)^2=0.$$

说明 上题是化简方面技巧性较强的一道题目,一般学生较难求得正确结果.若采用换元法来化简则更简便.

另解 设$\sqrt{a}=A$,$2=B$,则 $a=A^2$,$4=B^2$.

所以原式$=\left(\frac{A+B}{A^2-AB}+\frac{1-A}{A^2-2AB+B^2}\right)\div\left(1-\frac{B^2}{A}\right)-\left(\frac{A+B}{A^2-B^2}\right)^2$

$$=\left[\frac{A+B}{A(A-B)}+\frac{1-A}{(A-B)^2}\right]\div\left(\frac{A-B^2}{A}\right)-\left(\frac{1}{A-B}\right)^2$$

$$=\frac{(A+B)(A-B)+A(1-A)}{A(A-B)^2}\times\frac{A}{A-B^2}-\left(\frac{1}{A-B}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{A-B}\right)^2-\left(\frac{1}{A-B}\right)^2=0.$$

►►►► 习　题 ◄◄◄◄

1. 已知$\frac{3x+4}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}-\frac{B}{x+1}$,其中 A,B 为常数,则 $4A-B$ 的值为 (　　)

A. 7　　B. 9　　C. 13　　D. 5

2. 若$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2$,则$\frac{3x+xy-3y}{x-xy-y}$的值为 (　　)

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{5}{3}$　　D. $\frac{5}{3}$

3. 如果$\sqrt{\frac{3-m}{m}}=\frac{\sqrt{3-m}}{\sqrt{m}}$成立,则实数 m 的取值范围是 (　　)

A. $m\geqslant3$　　B. $m\leqslant0$　　C. $0<m\leqslant3$　　D. $0\leqslant m\leqslant3$