

本书能 补充强化 举一反三 温故知新  
你可以 充实一个暑假 领先高中三年



新编高中预备班

初高中衔接教材

数学

丛书主编 许康华  
本册主编 许康华

新编高中预备班

# 初高中衔接教材

数 学

本册主编 许康华

丛书主编 许康华

副主编 闻雪洪 毛 文 褚小光

编 委 (以下排名不分先后)

毛 文	王斌杰	许康华	沈学功
宋顺生	彭智华	吴瑛翰	廖 红
闻雪洪	裘明惠	施小琴	吴 斌
曹关明	徐献灿	高振华	潘成华
田开斌			



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS  
浙江大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

新编高中预备班：初高中衔接教材. 数学 / 许康华  
主编. —杭州：浙江大学出版社, 2016. 5  
ISBN 978-7-308-15760-5

I. ①新… II. ①许… III. ①中学数学课—初中—升  
学参考资料 IV. ①G634  
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 081974 号

## 新编高中预备班：初高中衔接教材·数学

许康华 主编

---

责任编辑 夏晓冬  
责任校对 陈宇 金佩雯  
封面设计 刘依群  
出版发行 浙江大学出版社  
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)  
(网址: <http://www.zjupress.com>)  
排 版 杭州星云光电图文制作有限公司  
印 刷 富阳市育才印刷有限公司  
开 本 787mm×1092mm 1/16  
印 张 9.75  
字 数 237 千  
版 印 次 2016 年 5 月第 1 版 2016 年 5 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 978-7-308-15760-5  
定 价 25.00 元

---

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行中心联系方式(0571)88925591; <http://zjdxcbbs.tmall.com>

# 前言

《高中预备班—初高中衔接教材》畅销 10 年不衰, 可谓是教辅出版的一个奇迹. 究其原因, 其一, 内容精当, 作者、编辑精雕细刻; 其二, 得到广大读者的厚爱, 许多读者为我们出谋划策, 提出了宝贵意见与建议. 为追求卓越, 也鉴于中小学教育、教学和考试改革日新月异, 我们对丛书进行全面修订, 使丛书更加适合学生使用, 帮助学生顺利完成初中升高中的衔接.

初中教学与高中教学相比, 在教学要求、教学进度与教学方式、知识体系、学习方法、思维层次、能力要求等诸方面都有较大的变化. 受这些变化影响, 有相当的学生不能一下子适应高中学习, 学习积极性受到一定的挫伤. 因此, 如何采取有效的措施做好衔接, 是摆在我们师生面前的一个共同的课题. 我们希望通过本书的使用能使衔接变得更为自然一些, 能使同学们在高中起始阶段的学习中少走弯路, 从而能使对高中课程的学习变得更为顺利.

本丛书具有以下一些突出特点:

**基础性** 充分体现新课程标准的精神, 既强化与高中知识密切相关的初中知识模块, 但又不是对这些知识模块的简单回顾与复习, 而是同时渗透高中学科的知识与方法, 化解高中教学中的一些难点, 为高中学习做好必要的铺垫.

**针对性** 力图避免衔而不接的毛病, 系统介绍在高中起始阶段教学中的主干内容, 希望通过这些内容的学习, 使同学们在心理上逐渐适应高中学科的教法、学法.

**前瞻性** 撷取各学科中的一些主要方法和思想, 以这些思想方法的介绍为经, 以知识的介绍为纬, 经纬交叉, 形成一个知识网络. 希望以此启迪学生的思维, 培养学生学习的兴趣, 提高学生的综合素质与创新能力.

**创新性** 体现素质教育的理念, 强调培养学生的创新精神、探究能力和实践能力, 安排了许多探索性问题和来自实际生活的应用题.

**实用性** 内容编排由浅入深, 层次分明, 例题习题丰富, 覆盖面广, 且同步配套, 解答详细, 使本书既便于教师教学, 又便于学生自学. 事实上, 培养自学能力是学好每门功课的一个重要方面.

“路漫漫其修远兮, 吾将上下而求索.” 囿于水平所限和时间仓促, 书中纰漏及不当之处在所难免, 恳请专家读者不吝赐教, 以便在日后再版时完善提高, 同时也预祝同学们能顺利完成高中三年的学业.

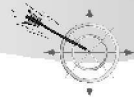
# 目 录

## Contents

知识篇 .....	( 1 )
第 1 讲 集 合 .....	( 3 )
第 2 讲 代数式及恒等变形 .....	( 9 )
第 3 讲 因式分解 .....	( 16 )
第 4 讲 一元二次方程根与系数的关系 .....	( 23 )
第 5 讲 绝对值与含绝对值的不等式 .....	( 30 )
第 6 讲 一元二次不等式及不等式组 .....	( 38 )
第 7 讲 二次函数的图象和性质 .....	( 44 )
第 8 讲 二次函数最值及其应用 .....	( 49 )
第 9 讲 给定区间上二次函数最值求法 .....	( 54 )
第 10 讲 函数及其表示(一) .....	( 59 )
第 11 讲 函数及其表示(二) .....	( 65 )
第 12 讲 二次方程根的分布 .....	( 71 )
第 13 讲 函数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 及函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象和性质 .....	( 76 )
第 14 讲 圆 .....	( 81 )
思想方法篇 .....	( 89 )
第 15 讲 配方法 .....	( 91 )
第 16 讲 换元法 .....	( 96 )
第 17 讲 待定系数法 .....	( 101 )
第 18 讲 函数方程的思想 .....	( 106 )
第 19 讲 数形结合的思想 .....	( 112 )
第 20 讲 分类讨论的思想 .....	( 117 )
参考答案 .....	( 125 )

知 识 篇





## 第 1 讲 集 合



### 知识要点

#### 1. 集合的概念

##### (1) 集合

一般地,我们把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫做集合(简称为集).

##### (2) 集合中元素的特性

集合中的元素具有以下三个特性:

(i) 确定性: 设  $A$  是一个给定的集合,  $x$  是某一具体对象, 则  $x$  或者是  $A$  的元素, 或者不是  $A$  的元素, 两种情况有一种且只有一种成立. 如  $\sqrt{2}$ , 它属于实数集, 即  $\sqrt{2}$  是实数集的一个元素, 但  $\sqrt{2}$  不是有理数集的元素.

(ii) 互异性: 对于一个给定的集合, 它的任何两个元素都是不同的, 两个相同的对象作为集合中的元素只记作一个, 不能重复出现. 如方程  $x^2 - 2x + 1 = 0$  的两个根,  $x_1 = x_2 = 1$ , 用集合记为  $\{1\}$ , 而不能记为  $\{1, 1\}$ .

(iii) 无序性: 集合与其中的元素排列顺序无关, 如集合  $\{a, b, c, d\}$  与  $\{a, d, c, b\}$  表示的是同一个集合.

#### 2. 元素与集合的关系

如果  $a$  是集合  $A$  中的元素, 就说  $a$  属于集合  $A$ , 记作  $a \in A$ ; 如果  $a$  不是集合  $A$  中的元素, 就说  $a$  不属于集合  $A$ , 记作  $a \notin A$ .

#### 3. 常用数集及其记法

全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集), 记作  $\mathbf{N}$ ; 所有正整数组成的集合称为正整数集, 记作  $\mathbf{N}^*$  或  $\mathbf{N}_+$ ; 全体整数组成的集合称为整数集, 记作  $\mathbf{Z}$ ; 全体有理数组成的集合称为有理数集, 记作  $\mathbf{Q}$ ; 全体实数组成的集合称为实数集, 记作  $\mathbf{R}$ .

#### 4. 集合的表示方法

##### (1) 列举法

把集合的元素一一列举出来, 并用花括号“ $\{\}$ ”括起来表示集合的方法叫做列举法. 列举法常用来表示有限集.

##### (2) 描述法

用集合所含元素的共同特性表示集合的方法称为描述法. 具体方法是: 在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围, 再画一条竖线, 在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.





典型例题解析

**例 1** 判断以下各组对象能否构成集合.

- (1) 很小的正实数;
- (2) 某班所有高个子的同学;
- (3) 方程  $x^2 - 4x + 3 = 0$  的所有实数解;
- (4)  $\sqrt{2}$  的近似值;
- (5) 我国所有的大城市;
- (6) 在直角坐标平面上横坐标与纵坐标相等的所有点.

**分析** 根据集合元素的确定性进行判断, 所给对象不明确就不能构成集合.

**解** (1), (2), (4), (5) 中的对象没有明确的判断标准, 因此不能构成集合.

(3), (6) 中的对象具体、明确, 可以构成集合.

**例 2** 求集合  $\{a^2, 0, 1\}$  中元素  $a$  的取值范围.

**分析** 根据集合元素的互异性, 集合中的各元素应该是互不相等的.

**解** 由集合元素的互异性知,  $a$  应满足  $a^2 \neq 0$ , 且  $a^2 \neq 1$ , 所以  $a$  的取值范围是  $a \in \mathbf{R}$ , 且  $a \neq 0, a \neq \pm 1$ .

**例 3** 用适当的方法表示下列集合, 并指出是有限集还是无限集.

- (1) 由所有非负奇数组成的集合;
- (2) 由大于 10 小于 30 的所有偶数组成的集合;
- (3) 方程  $x^2 + x + 1 = 0$  的实数解组成的集合;
- (4) 不等式  $2x + 1 > 0$  的解组成的集合;
- (5) 方程组  $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$  的解组成的集合;
- (6) 在平面直角坐标系上所有第二象限的点组成的集合.

**解** (1) 由所有非负奇数组成的集合可表示为  $A = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbf{N}\}$ , 也可表示为  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ ,  $A$  是无限集.

(2) 满足条件的数有 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 所以所求集合用列举法表示为  $B = \{12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28\}$ , 用描述法表示为  $B = \{x \mid x = 2n, 5 < n < 15, n \in \mathbf{N}\}$ ,  $B$  是有限集.

(3) 因为方程  $x^2 + x + 1 = 0$  的判别式  $\Delta < 0$ , 故此方程无实数解. 所以所求集合为空集 (指不含任何元素的集合), 空集用符号  $\emptyset$  表示, 它是有限集.

(4) 所求集合用描述法表示为  $C = \{x \mid 2x + 1 > 0, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $C$  是无限集.

(5) 所求集合用描述法表示为  $D = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x - y = 8 \end{cases} \right\}$ , 由方程组解得  $x = 5$ ,  $y = 2$ , 故所求集合也可用列举法表示为  $D = \{(5, 2)\}$ ,  $D$  是有限集.

(6) 所求集合为  $E = \{(x, y) \mid x < 0, y > 0, \text{且 } x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ ,  $E$  是无限集.

**说明** 本例中, (1), (2), (3) 三个集合中的元素是实数, 它们都是数集; (5), (6) 两个



集合中的元素是点(或点的坐标),它们是点集,要注意区分数集与点集.

**例 4** 已知集合  $A = \left\{ x \mid \frac{12}{5-x} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{Z} \right\}$ , 用列举法表示集合  $A$ .

**解** 因为  $\frac{12}{5-x}$  是自然数,且  $5-x$  是整数,所以  $\frac{12}{5-x}$  必是 12 的正约数,故  $5-x$  必是 12 的正约数,即有  $5-x = 1, 2, 3, 4, 6, 12; x = 4, 3, 2, 1, -1, -7$ . 于是  $A = \{1, 2, 3, 4, -1, -7\}$ .

**例 5** 已知集合  $A = \{a-2, 2a^2+5a, 12\}$ , 且  $-3 \in A$ , 求实数  $a$ .

**解** 因为  $-3 \in A$ , 所以  $-3 = a-2$  或  $-3 = 2a^2+5a$ . 解得  $a = -1$  或  $a = -\frac{3}{2}$ . 当  $a = -1$  时, 有  $a-2 = -3, 2a^2+5a = -3$ . 所以  $a = -1$  舍去, 因此  $a = -\frac{3}{2}$ .

**说明** 在分析集合元素特性时,经常需用到分类讨论思想.

**例 6** 若集合  $A = \{x \mid x^2 + ax + b = x\}$  中,仅有一个元素  $a$ , 求  $a$  与  $b$  的值.

**分析** 集合  $A$  只有一个元素,意味着方程  $x^2 + ax + b = x$  的两个实根相等. 想到这一点,本题就不难解决了.

**解** 因为  $A$  中仅有一个元素  $a$ , 所以一元二次方程  $x^2 + (a-1)x + b = 0$  有等根  $a$ , 故

$$\begin{cases} a^2 + (a-1)a + b = 0 & \text{①,} \\ \Delta = (a-1)^2 - 4b = 0 & \text{②.} \end{cases}$$

由 ①, ② 消去  $b$  得,  $(a-1)^2 + 4a^2 + 4(a-1)a = 0$ , 即  $(3a-1)^2 = 0$ , 故  $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{9}$ .

**另解** 由题意知,一元二次方程  $x^2 + (a-1)x + b = 0$  有等根  $a$ , 故由韦达定理知

$$\begin{cases} a + a = -(a-1), \\ a \cdot a = b, \end{cases}$$

解得  $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{9}$ .

**例 7** 已知集合  $A = \{x \mid ax^2 - 3x + 2 = 0\}$ . 若  $A$  中最多只有一个元素, 试求  $a$  的取值范围.

**解** (1) 当  $a = 0$  时, 原方程为  $-3x + 2 = 0$ , 则  $x = \frac{2}{3}$ , 符合题意.

(2) 当  $a \neq 0$  时, 方程  $ax^2 - 3x + 2 = 0$  为一元二次方程. 由  $\Delta = 9 - 8a \leq 0$ , 得  $a \geq \frac{9}{8}$ .

所以, 当  $a \geq \frac{9}{8}$  时, 方程  $ax^2 - 3x + 2 = 0$  有两个相等的实根或无实根, 符合题意.

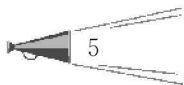
综上所述,  $a$  的取值范围是  $a = 0$  或  $a \geq \frac{9}{8}$ .

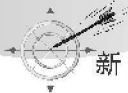
**说明** 形如  $ax^2 + bx + c = 0$  的方程, 不一定是一元二次方程, 需讨论二次项的系数  $a$ .

**例 8** 由实数构成的集合  $A$  满足条件: 若  $a \in A, a \neq 1$ , 则  $\frac{1}{1-a} \in A$ . 证明:

(1) 若  $2 \in A$ , 则集合  $A$  必还有另外两个元素, 并求出这两个元素;

(2) 非空集合  $A$  不可能是单元素集.





**分析** 由集合  $A$  满足的条件可求出其他元素,要证明是不可能的问题,常用反证法.

**解** (1) 因为  $a \in A, a \neq 1, \frac{1}{1-a} \in A$ . 所以当  $2 \in A$  时, 有  $\frac{1}{1-2} = -1 \in A$ ; 由于  $-1 \neq 1$ , 故有  $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$ ; 由于  $\frac{1}{2} \neq 1$ , 故有  $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \in A$ . 因此, 集合  $A$  中的另外两个元素是  $-1, \frac{1}{2}$ .

(2) 假设集合  $A$  是单元素集, 则必有  $a = \frac{1}{1-a}$ , 即  $a^2 - a + 1 = 0$ .

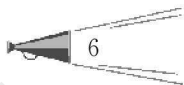
由于  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ ,

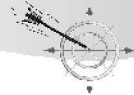
故此方程没有实根. 假设不成立, 从而结论成立.

### 习 题

- 下列各对象中, 能够形成一个集合的是 ( )
  - 世界上所有矮个子的人
  - 大于  $-5$  的实数
  - 著名的科学家
  - 比较容易的数学题
- 集合  $A = \{x \mid x \leq 2\sqrt{37}\}$ ,  $a = 3\sqrt{10}$ , 则 ( )
  - $a \in A$
  - $a \notin A$
  - $\{a\} \in A$
  - 以上都不对
- 设  $A = \{1, 2a+1, a^2-2\}$ , 若  $5 \in A$ , 则  $a$  的值为 ( )
  - 2
  - $\sqrt{7}$  或 2
  - $-\sqrt{7}$  或 2
  - $\pm\sqrt{7}$  或 2
- 集合  $S$  与  $T$  表示同一个集合的是 ( )
  - $S = \{0\}, T = \emptyset$
  - $S = \{1, -1\}, T = \{-1, 1\}$
  - $S = \{x \mid y = x^2\}, T = \{y \mid y = x^2\}$
  - $S = \{(1, -2)\}, T = \{(-2, 1)\}$
- 设  $P, Q$  为两个非空实数集合, 定义集合  $P+Q = \{a+b \mid a \in P, b \in Q\}$ , 若  $P = \{0, 2, 5\}, Q = \{1, 2, 6\}$ , 则  $P+Q$  中元素的个数是 ( )
  - 9 个
  - 8 个
  - 7 个
  - 6 个
- 用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空:
 

(1) $1 \in \mathbf{N}$	(2) $0 \in \mathbf{N}^*$	(3) $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$
(4) $\frac{3}{5} \in \mathbf{Z}$	(5) $-2 \in \mathbf{N}$	(6) $3.14 \in \mathbf{Q}$
(7) $\frac{1}{7} \in \mathbf{R}$	(8) $\pi \in \mathbf{R}$	(9) $-5 \in \mathbf{Z}$
- 若  $a, b, c$  是非零实数,  $x = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}$ , 则由数  $x$  组成的集合可以表示为\_\_\_\_\_.
- 已知集合  $A = \{x \mid -2 < x < a, x \in \mathbf{Z}\}$ , 若集合  $A$  中恰好有 3 个元素, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.





9. 按要求表示下列集合.

(1) 用列举法表示  $A = \{(x, y) \mid x + 2y = 9, x \in \mathbf{N}^*, y \in \mathbf{N}^*\}$ ;

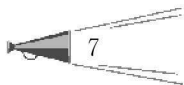
(2) 用描述法表示  $B = \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$ .

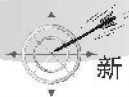
10. 已知集合  $A = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}\}$ .

(1) 若  $A$  中只有一个元素, 求  $a$  的值, 并求出这个元素;

(2) 若  $A$  中至多只有一个元素, 求  $a$  的取值范围.

11. 非空集合  $M$  中的元素都是正整数, 且满足: 如果  $x \in M$ , 则必有  $6 - x \in M$ , 试写出所有这样的集合  $M$ .





12. 已知集合  $A = \{a - 1, 3a + 1, a^2 + a + 2\}$ , 且  $4 \in A$ , 求实数  $a$ .

13.\* 已知集合  $A = \{x \mid x = m^2 - n^2, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}\}$ .

求证: (1) 任何奇数都是  $A$  的元素;

(2) 任何形如  $4k - 2 (k \in \mathbf{N}^*)$  的偶数都不是  $A$  的元素.



## 第2讲 代数式及恒等变形



### 知识要点

#### 1. 乘法公式

- (1) 平方差公式  $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ;
- (2) 完全平方公式  $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ ;
- (3) 三数和的平方公式  $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ ;
- (4) 立方和公式  $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ ;
- (5) 立方差公式  $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ ;
- (6) 完全立方公式  $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ .

#### 2. 二次根式

(1) 定义 形如  $\sqrt{a}$  ( $a\geq 0$ ) 的式子叫做二次根式, 化简后被开方数相同的二次根式叫同类二次根式.

- (2) 性质 (i)  $\sqrt{a}\geq 0$ ; (ii)  $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a(a\geq 0), \\ -a(a<0). \end{cases}$

- (3) 运算 乘法运算  $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$  ( $a\geq 0, b\geq 0$ ); 除法运算  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$  ( $a\geq 0, b>0$ ).

#### 3. 幂的运算

- (1) 正整数指数幂  $a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\uparrow a}$ .

- (2) 零指数幂  $a^0=1$  ( $a\neq 0$ ).

- (3) 负整数指数幂  $a^{-p}=(\frac{1}{a})^p$  ( $a\neq 0, p$  是正整数).

整数指数幂的运算性质

- (i)  $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$  ( $m, n$  是整数);

- (ii)  $(a^m)^n=a^{mn}=(a^n)^m$  ( $m, n$  是整数);

- (iii)  $(ab)^n=a^n b^n$  ( $n$  是整数);

- (iv)  $a^m\div a^n=a^{m-n}$  ( $a\neq 0, m, n$  是整数).

- (4) 正分数指数幂  $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$  ( $a>0, m, n$  是正整数,  $n>1$ ),

- 负分数指数幂  $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$  ( $a>0, m, n$  是正整数,  $n>1$ ).

上述的整数指数幂的运算性质, 对于有理数指数幂也同样适用, 即

- (i)  $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$  ( $a>0, s, r$  是有理数);

(ii)  $(a^r)^s = a^{rs} = (a^s)^r$  ( $a > 0, s, r$  是有理数);

(iii)  $(ab)^r = a^r b^r$  ( $a > 0, b > 0, r$  是有理数).



### 典型例题解析

**例 1** 化简下列各式.

(1)  $(1-m)(1+m)(m^2+m+1)(m^2-m+1)$ ;

(2)  $(x^2+2xy+y^2)(x^2-xy+y^2)^2$ .

**解** (1) 原式  $= [(1-m)(1+m+m^2)][(m+1)(m^2-m+1)]$   
 $= (1-m^3)(m^3+1) = 1-m^6$ .

(2) 原式  $= (x+y)^2(x^2-xy+y^2)^2 = [(x+y)(x^2-xy+y^2)]^2$   
 $= (x^3+y^3)^2 = x^6+2x^3y^3+y^6$ .

**说明** 在进行代数式的乘法、除法运算时,要观察代数式的结构是否符合乘法公式的结构.

**例 2** 已知  $x^2-5x+1=0$ , 求  $x^3+\frac{1}{x^3}$  的值.

**解** 因为  $x^2-5x+1=0$ , 所以  $x \neq 0$ , 所以  $x+\frac{1}{x}=5$ ,

原式  $= (x+\frac{1}{x})(x^2-1+\frac{1}{x^2}) = (x+\frac{1}{x})[(x+\frac{1}{x})^2-3] = 5 \times (5^2-3) = 110$ .

**说明** 本题若是先从方程  $x^2-5x+1=0$  中解出  $x$  的值后,再代入代数式求值,则计算较繁.现在我们根据条件式与求值式的联系,用整体代换的方法,简化了计算.整体代换是代数求值中一种常用的思想方法.

**例 3** 已知  $a+b+c=0$ , 求  $\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{c^2+a^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2}$  的值.

**分析** 要求值,必须充分地利用  $a+b+c=0$  这个条件,联系到式子的分母含有平方,可以把已知条件  $a+b+c=0$  先移项,再两边平方.

**解** 由  $a+b+c=0$ , 得  $a=-b-c$ , 两边平方,得  $a^2=b^2+c^2+2bc$ ,

即  $b^2+c^2-a^2=-2bc$ . 同理可得  $c^2+a^2-b^2=-2ca, a^2+b^2-c^2=-2ab$ .

所以,原式  $= \frac{1}{-2bc} + \frac{1}{-2ca} + \frac{1}{-2ab} = -\frac{a+b+c}{2abc} = 0$ .

**说明** 解题时要注意多寻找条件与结论之间的联系,并联想相应的知识方法.

**例 4** 已知  $a+b+c=1, a^2+b^2+c^2=2$ , 求  $ab+bc+ca$  的值.

**解** 因为  $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ ,

所以  $1^2 = 2+2(ab+bc+ca)$ , 所以  $ab+bc+ca = -\frac{1}{2}$ .

**说明** 注意  $a+b+c, ab+bc+ca, a^2+b^2+c^2$  之间的联系,要能正用、逆用三个数和的平方公式.

**例 5** 化简下列各式:

(1)  $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ ;



$$(2) \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}.$$

**解** (1) 因为  $\sqrt{2} > 1, \sqrt{3} > \sqrt{2}, 2 > \sqrt{3}$ ,

所以, 原式 =  $|1 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - 2| = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{3} = 1$ .

$$(2) \text{原式} = \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^3} = |x+1| + x - 1$$

$$= \begin{cases} (x+1) + x - 1 = 2x, & (x \geq -1), \\ -(x+1) + x - 1 = -2, & (x < -1). \end{cases}$$

**说明** 请注意性质  $\sqrt{a^2} = |a|$  的使用: 在化去绝对值符号而字母的范围未知时, 必须对字母的取值进行分类讨论.

**例 6** 已知  $\sqrt{2y-24} + \sqrt{ax-y-3x} = 0$ , 问:  $a$  为何值时,  $x$  为负数?

**分析** 根据非负数的性质, 原方程可转化为  $2y-24=0$  且  $ax-y-3x=0$ , 进而考察解的情况.

$$\text{解 原方程等价于方程组} \begin{cases} 2y-24=0, \\ ax-y-3x=0. \end{cases} \text{ 所以} \begin{cases} y=12, \\ x=\frac{12}{a-3} (a \neq 3). \end{cases}$$

所以, 当  $a < 3$  时,  $x < 0$ , 即  $a < 3$  时,  $x$  为负数.

**说明** 去根式是解决问题的关键. 通过去根式, 用  $a$  表示  $x$ , 从而得到关于  $a$  的不等式, 求出  $a$  的取值范围.

**例 7** 已知  $0 < m < 1$ , 且  $m + m^{-1} = 6$ , 求  $\sqrt{m} - \frac{1}{\sqrt{m}}$  的值.

**分析** 寻找所求与已知之间的关系是解题的突破口, 易知  $(\sqrt{m} - \frac{1}{\sqrt{m}})^2 = m + \frac{1}{m} - 2 = m + m^{-1} - 2$ , 则可先求得  $(\sqrt{m} - \frac{1}{\sqrt{m}})^2$  的值, 再求出  $\sqrt{m} - \frac{1}{\sqrt{m}}$  的值.

$$\text{解 因为} (\sqrt{m} - \frac{1}{\sqrt{m}})^2 = m + \frac{1}{m} - 2 = m + m^{-1} - 2 = 6 - 2 = 4,$$

又因为  $0 < m < 1$ , 所以  $0 < \sqrt{m} < 1, \frac{1}{\sqrt{m}} > 1$ , 则  $\sqrt{m} - \frac{1}{\sqrt{m}} < 0$ , 所以  $\sqrt{m} - \frac{1}{\sqrt{m}} = -2$ .

**说明** 本题与例 2 类似, 不是直接求  $m$  的值, 而是将  $m + m^{-1}$ , 即  $\sqrt{m} - \frac{1}{\sqrt{m}}$  当作一个整体, 将要求的式子转化为含  $m + m^{-1}$  的式子, 再求值.

**例 8** 已知  $a > 0, a^{2x} = 3$ , 求  $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$  的值.

**分析** 由立方和公式, 将分子分解因式, 化简后再求值.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \frac{(a^x)^3 + (a^{-x})^3}{a^x + a^{-x}} = \frac{(a^x + a^{-x})(a^{2x} - 1 + a^{-2x})}{a^x + a^{-x}} \\ &= a^{2x} - 1 + a^{-2x} = 3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

**说明** 此题除上述解法外, 还可直接由条件  $a^{2x} = 3$ , 解出  $a^x = \sqrt{3}$ , 再代入求值. (注意  $a^x \neq -\sqrt{3}$ ).



**例 9** 若有理数  $x, y, z$  满足  $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z)$ , 请确定  $(x-yz)^3$  的值.

**分析** 由已知等式先将其配方, 即可求出  $x, y, z$  的值.

**解** 原方程可变形为  $x+y+z-2\sqrt{x}-2\sqrt{y-1}-2\sqrt{z-2}=0$ ,

配方得  $(\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{y-1}-1)^2 + (\sqrt{z-2}-1)^2 = 0$ ,

所以  $\sqrt{x}-1=0, \sqrt{y-1}-1=0, \sqrt{z-2}-1=0$ ,

即  $x=1, y=2, z=3$ . 则  $(x-yz)^3 = (1-2 \times 3)^3 = -125$ .

**说明** 在此题的配方过程中, 关键要抓住  $x=(\sqrt{x})^2, y-1=(\sqrt{y-1})^2, z-2=(\sqrt{z-2})^2$ .

**例 10** 化简  $(\frac{\sqrt{a}+2}{a-2\sqrt{a}} + \frac{1-\sqrt{a}}{a-4\sqrt{a}+4}) \div (1-\frac{4}{\sqrt{a}}) - (\frac{\sqrt{a}+2}{a-4})^2$ .

**解** 原式 =  $\left[ \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)} + \frac{1-\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-2)^2} \right] \div \frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}} - \left[ \frac{\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a})^2-2^2} \right]^2$

$$= \left[ \frac{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)^2} + \frac{\sqrt{a}(1-\sqrt{a})}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)^2} \right] \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-4} - \left( \frac{1}{\sqrt{a}-2} \right)^2$$

$$= \frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)^2} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-4} - \left( \frac{1}{\sqrt{a}-2} \right)^2 = \frac{1}{(\sqrt{a}-2)^2} - \left( \frac{1}{\sqrt{a}-2} \right)^2 = 0.$$

**说明** 上题是化简方面技巧性较强的一道题目, 一般学生较难求得正确结果. 若采用换元法来化简则更简便.

**另解** 设  $\sqrt{a}=A, 2=B$ , 则  $a=A^2, 4=B^2$ .

所以原式 =  $\left( \frac{A+B}{A^2-AB} + \frac{1-A}{A^2-2AB+B^2} \right) \div \left( 1-\frac{B^2}{A} \right) - \left( \frac{A+B}{A^2-B^2} \right)^2$

$$= \left[ \frac{A+B}{A(A-B)} + \frac{1-A}{(A-B)^2} \right] \div \left( \frac{A-B^2}{A} \right) - \left( \frac{1}{A-B} \right)^2$$

$$= \frac{(A+B)(A-B)+A(1-A)}{A(A-B)^2} \times \frac{A}{A-B^2} - \left( \frac{1}{A-B} \right)^2$$

$$= \left( \frac{1}{A-B} \right)^2 - \left( \frac{1}{A-B} \right)^2 = 0.$$

### 习 题

- 已知  $\frac{3x+4}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} - \frac{B}{x+1}$ , 其中  $A, B$  为常数, 则  $4A-B$  的值为 ( )  
 A. 7                      B. 9                      C. 13                      D. 5
- 若  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$ , 则  $\frac{3x+xy-3y}{x-xy-y}$  的值为 ( )  
 A.  $\frac{3}{5}$                       B.  $-\frac{3}{5}$                       C.  $-\frac{5}{3}$                       D.  $\frac{5}{3}$
- 如果  $\sqrt{\frac{3-m}{m}} = \frac{\sqrt{3-m}}{\sqrt{m}}$  成立, 则实数  $m$  的取值范围是 ( )  
 A.  $m \geq 3$                       B.  $m \leq 0$                       C.  $0 < m \leq 3$                       D.  $0 \leq m \leq 3$