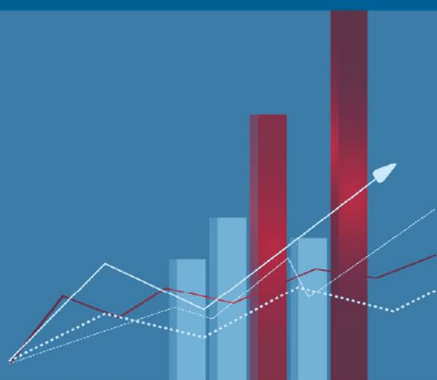


二粒子玻耳兹曼 方程组

ERLIZI BO'ERZIMAN FANGCHENGZU

布仁满都拉 赵迎春 著



内蒙古出版集团
内蒙古科学技术出版社

二粒子玻耳兹曼方程组

布仁满都拉 赵迎春 著

内蒙古出版集团

内蒙古科学技术出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

二粒子玻耳兹曼方程组 / 布仁满都拉, 赵迎春著
. — 赤峰 : 内蒙古科学技术出版社, 2015. 11
ISBN 978-7-5380-2607-8

I. ①二… II. ①布… ②赵… III. ①粒子—方程组
IV. ①O572.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 269181 号

出版发行: 内蒙古出版集团 内蒙古科学技术出版社

地 址: 赤峰市红山区哈达街南一段 4 号

邮 编: 024000

电 话: (0476) 8225264 8224848

邮购电话: (0476) 8224547

网 址: www.nm-kj.com

责任编辑: 马洪利

封面设计: 永 胜

印 刷: 赤峰金源彩色印刷有限责任公司

字 数: 130 千

开 本: 787×1092 1/16

印 张: 6.75

版 次: 2015 年 11 月第 1 版

印 次: 2015 年 11 月第 1 次印刷

定 价: 38.00 元

前 言

Boltzmann(玻耳兹曼)方程是气体运动论的基本方程, 因 L. Boltzmann 1872 年首先提出而得名. 它是一个非线性积分微分方程, 用于描述气体分子速度分布函数的变化, 它对研究稀薄气体动力学有重要意义. 在建立非平衡态统计力学的初期, Boltzmann 方程也起到了奠基的作用. 在一定条件下 BBGKY 方程可以导出 Boltzmann 方程. 当气体的密度变大成为稠密气体时用 BBGKY 方程描述. H. Grad 在《Correlation, Fluctuation, and turbulence in Rared field Gas》中讨论了 BBGKY 方程与湍流之间可能存在的关系, 认为对非线性非稳定流和湍流必须用 BBGKY 方程描述, 而不能用 Boltzmann 方程和 Navier- Stokes 方程来描述. 当在分子的三点混乱水平上考虑问题时, BBGKY 方程(含无穷多个方程)的前两个方程(称为二粒子 Boltzmann 方程组)可以独立求解.

本书前两章介绍了线性和非线性输运理论的基本内容, 后四章讲述了近年来对其开展的研究工作, 即介绍了二粒子 Boltzmann 方程组的特征值问题、近似解、自型解、初值问题、H-定理及熵的关系等方面的内容.

本书第一章、第二章, 以及第三章的 § 3.1、§ 3.2 和第六章的 § 6.1 由赵迎春撰写完成; 第三章的 § 3.3、§ 3.4, 第四章、第五章, 第六章的 § 6.2、§ 6.3 由布仁满都拉撰写完成, 两人共同对全书内容进行了整理.

在本书即将出版之际, 衷心感谢“内蒙古自治区自然科学基金项目”(No. 2015MS0110)和“内蒙古自治区高等学校科学技术研究项目”(No. NJZY14276)的资助.

鉴于著者的水平有限, 书中不足和错误之处在所难免, 敬望读者不吝指正.

布仁满都拉 赵迎春

2015 年 7 月

目 录

第一章 气体分子运动论基本原理.....	1
§ 1.1 速度分布函数.....	1
§ 1.2 宏观量和熵函数.....	4
第二章 基本方程.....	7
§ 2.1 Boltzmann 方程.....	7
§ 2.2 宏观守恒方程组.....	14
§ 2.3 Maxwell 分布.....	17
§ 2.4 BBGKY 和 Boltzmann 方程.....	23
第三章 二粒子 Boltzmann 方程组及其特征值问题.....	29
§ 3.1 二粒子 Boltzmann 方程组.....	29
§ 3.2 守恒方程组及 Enskog–Chapman 展开.....	33
§ 3.3 线性化二粒子 Boltzmann 方程组的积分算子的特征值、特征函数及其分布.....	47
§ 3.4 碰撞项的具体形式.....	59
第四章 线性化二粒子 Boltzmann 方程组的初值问题.....	63
§ 4.1 平衡解附近的解随时间向平衡解衰减.....	63
§ 4.2 线性化二粒子 Boltzmann 方程组初值问题解的唯一性.....	65
§ 4.3 二粒子 Boltzmann 方程组的局部解的存在唯一性.....	68
第五章 二粒子 Boltzmann H-定理.....	81
§ 5.1 二粒子 Boltzmann 方程组的边界条件.....	81
§ 5.2 二粒子 Boltzmann H-定理.....	83
§ 5.3 H-定理和熵的关系.....	90
第六章 二粒子 Boltzmann 方程组的精确解.....	92
§ 6.1 二粒子 Boltzmann 方程组的傅里叶变换.....	92
§ 6.2 二粒子 Boltzmann 方程组的精确解.....	94
§ 6.3 二粒子 Boltzmann 方程组的精确解和 Boltzmann 方程的自型解的关系.....	99
参考文献.....	100

第一章 气体分子运动论基本原理

§ 1.1 速度分布函数

分子运动论研究由大量的分子组成的气体, 这些分子在大多数时间间隔内相互独立地运动. 如果没有外力, 分子做直线运动. 当两个分子相互碰撞或与壁面碰撞时, 分子的碰撞破坏分子直线运动. 如果相比分子的动能, 分子的势能可以忽略, 则称这种气体为稀薄气体, 否则称为稠密气体.

为了更好地理解稀薄气体, 假设分子是直径为 d 的硬球. 众所周知, 当温度等于 273.15K, 压力等于 102.325 Pa 时, 1 摩尔比稀薄气体占有的体积和该体积内的分子总数分别等于 $V_M = 2.24 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ 和 $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ 分子/mol. 在这种情况下, 分子(有时称为粒子)数密度 $n = N_A / V_M \approx 2.68 \times 10^{25}$ 分子/ m^3 . 因此我们可以认为每个分子占有体积为 $V_C = 1/n \approx 3.72 \times 10^{-26} \text{ m}^3$ 的正立方体空间. 因此, 分子占有的空间的边长为 $D = (V_C)^{1/3} \approx 3.34 \times 10^{-9} \text{ m}$, 它代表分子之间的平均距离.

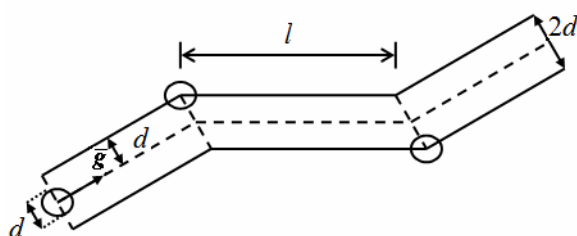


图 1.1 平均自由程

设一个分子以相对平均速度 $\bar{g}$ 在数密度为 n 的气体中运动. 由图 1.1 可以看出, 该分子在单位时间内与底面积为 πd^2 , 高度为 $\bar{g}$ 的圆柱内的其他分子发生碰撞. 因此, 碰撞频率为 $\nu = n\pi^2 \bar{g}$. 平均自由时间为 $\tau = 1/\nu = 1/(n\pi d^2 \bar{g})$. 一个分子与其他分子不发生碰撞的

平均距离, 即分子的两次碰撞之间的平均距离, 称为平均自由程, 记为 l . 当气体处于平衡态时, 有

$$l = \bar{c} \tau = \frac{\bar{c}}{n\pi d^2 \bar{g}}, \quad \bar{g} = \sqrt{2}\bar{c},$$

其中 $\bar{c}$ 是分子的平均热速度, 第二个等式在平衡态气体中成立. 也就是说, 在平衡态气体中平均自由程为

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}.$$

该公式说明了平均自由程反比于分子数密度, 也反比于分子直径的平方. 注意, 对离平衡态不远的情况也可以用该公式.

由完全相同的质量为 m 的分子组成的气体称为单组分气体或简单气体. 我们一般采用统计学的方法研究气体, 因为单位体积的气体是由大量的无序的分子构成的. 在标准状态下, 1 cm^3 气体中含有大约 3×10^{19} 个气体分子. 因此, 用统计学的方法描述比大量分子的精确描述简单得多.

假设 $P(\mathbf{x})$ 是几率密度, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $P(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ 表示 $\mathbf{x}$ 处于 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ 之间的几率. $d\mathbf{x}$ 是体积元 ($d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$). 还有几率满足

$$\int_V P(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1, \quad (1.1)$$

其中 V 是 $\mathbf{x}$ 的整个变化范围.

假设 $\varphi(\mathbf{x})$ 是任意给定的函数. 那么我们可以利用几率密度, 表示 $\varphi(\mathbf{x})$ 的均值 (或平均值分):

$$\bar{\varphi} = \int_V P(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad (1.2)$$

以后用符号 “ $\bar{}$ ” 表示平均值.

假设气体分布在空间区域 $V \subseteq \mathbf{R}^3$ 中, 在 t 时刻分子处于状态点 $(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ 的概率密度为 $P(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$, 则分子在状态 $(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ 附近出现的概率为 $P(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)d\mathbf{x}d\mathbf{c}$. $P(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ 还满足

$$\iint_{V \times \mathbf{R}^3} P(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)d\mathbf{x}d\mathbf{c} = 1 \quad (t \geq 0). \quad (1.3)$$

设 $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = NP(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$, 称 f 为速度分布函数. 由 (1.3) 可知函数 f 满足

$$\iint_{V \times \mathbf{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{c} = N \quad (t \geq 0). \quad (1.4)$$

N 是 V 内气体分子的总数. $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ 表示在时刻 t , 那些位于体积元 $\mathbf{x}, d\mathbf{x}$ 中而且速度范围在 $\mathbf{c}, d\mathbf{c}$ 内的分子的几率数. 根据以上讨论可知, t 时刻, 在 $\mathbf{x}$ 处单位体积内的气体分子数, 即数密度为

$$n = \int_{\mathbf{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c}. \quad (1.5)$$

§ 1.2 宏观量和熵函数

宏观量是能够观测到的物理量, 如气体温度、压力、速度和分子通量等. 在统计学中这些量可以用速度分布函数表示出来.

气体的密度(单位体积内的质量) $\rho(\mathbf{x}, t)$ 可定义为

$$\rho(\mathbf{x}, t) = mn = \int_{\mathbf{R}^3} m f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c}. \quad (1.6)$$

对于单组分(简单)气体, 流体速度(气体宏观速度)和平均分子速度是相等的:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{c}} = \frac{1}{n(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{c} f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c}. \quad (1.7)$$

有时, 我们在与流体一起运动的坐标系中研究流体力学问题. 这时, 分子在运动坐标系中的运动速度等于

$$\mathbf{C} = \mathbf{c} - \mathbf{u}, \quad (1.8)$$

称 $\mathbf{C}$ 为特征速度或热速度. 对单组分(简单)气体来说, 特征速度的平均值等于零, 因为

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u} = 0. \quad (1.9)$$

单位质量气体的内能 e 可定义为

$$\rho e = \int \frac{1}{2} m C^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c}. \quad (1.10)$$

在气体分子运动论中, 定义温度 T 为

$$\rho e = \frac{3}{2} n R T. \quad (1.11)$$

下面讨论分子通量. 根据速度分布函数的物理意义, 在 Δt 时间内, 通过面积元 ΔA (垂直于 x_3 轴) 的分子数为

$$\Delta N = c_3 \Delta t \Delta A f(c_1, c_2, c_3) dc_1 dc_2 dc_3,$$

其中 $c_3 \Delta t \Delta A$ 是圆柱体的体积(见图 1.2).

分子通量可定义为在单位时间内通过单位面积的分子数, 即

$$\Delta\phi = \frac{\Delta N}{\Delta A \Delta t} = c_3 f(c_1, c_2, c_3) dc_1 dc_2 dc_3. \quad (1.12)$$

利用 Maxwell 分布和坐标变换可以计算出总的分子通量：

$$\phi = \int_0^\infty dc \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} n \left(\frac{m}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-mc^2/(2RT)} c^3 \times \cos\theta \sin\theta d\varphi = \frac{n}{4} \bar{c},$$

其中 $\bar{c} = \sqrt{8RT/(\pi m)}$.

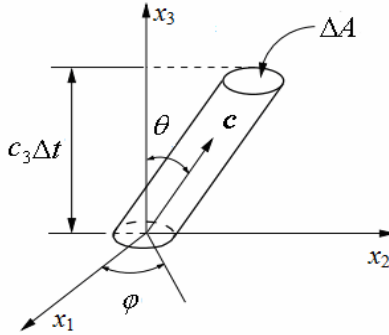


图 1.2 通过面积元 ΔA 的分子通量

众所周知，容器壁面受到的压力是由气体分子的动量传递引起的。如果分子与壁面碰撞是弹性的，即弹性碰撞，则碰撞前后速度的大小不变，只是改变方向，切向分量不变，法向分量变成相反(即由 c_3 变为 $-c_3$)。因此，一个分子与壁面发生碰撞后，动量的改变量为 $2mc_3$ ，从而可得出单位时间、单位面积内的动量改变量为

$$\Delta p = 2mc_3 \frac{\Delta N}{\Delta A \Delta t} = 2mc_3^2 f(c_1, c_2, c_3) dc_1 dc_2 dc_3,$$

对所有可能的速度积分，可得总的压力为

$$p = 2 \int_0^{+\infty} dc_3 \int_{-\infty}^{+\infty} dc_2 \int_{-\infty}^{+\infty} mc_3^2 f(c_1, c_2, c_3) dc_1,$$

当 f 满足 Maxwell 分布时，可以证明 $p = nRT$ 成立。

在简单的剪切流中，流体被限制在两个平行板之间，流体满足无滑移物、无渗透边界条件。在 $x_3 = 0$ 平面静止不动，在 $x_3 = L$ 处的平面以常速运动， $\mathbf{c} = (0, c_2(x_3), 0)$ 。该速度剖面是线性的，见图 1.3。

位于 x_3 处的界面上的动量传递等于该界面的上面和下面层处的分子动量之差。令 θ 是

分子速度矢量和 x_3 -轴之间的夹角. 一个分子与另一个分子发生碰撞之前行走的距离等于平均自由程. 位于 $x_3 - l \cos \theta$ 和 $x_3 + l \cos \theta$ 的分子的动量之差为

$$\Delta I = mc_2(x_3 - l \cos \theta) - mc_2(x_3 + l \cos \theta) \approx -2ml \frac{dc_2}{dx_3} \cos \theta.$$

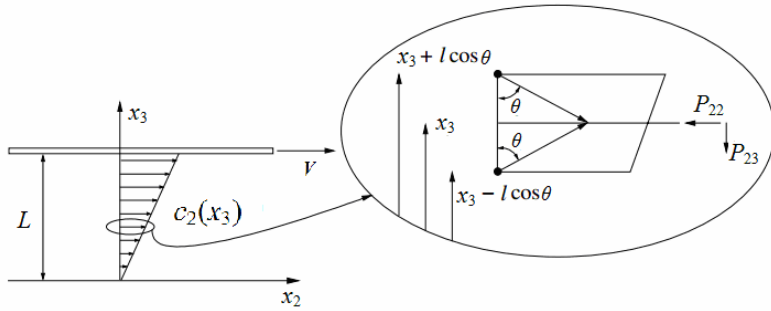


图 1.3 简单剪切流的速度剖面

利用分子通量公式(1.12), 可以算出所有分子的动量传输:

$$\Delta P_{23} = -2m \frac{dc_2}{dc_3} l \cos(\theta) c_3 f(c_1, c_2, c_3) dc_1 dc_2 dc_3.$$

ΔP_{23} 代表单位时间内通过单位面积的动量, 即压力. 该压力作用在垂直于 x_2 -轴的界面, 并平行于 x_3 -轴. 对所有可能的速度积分后可以得到总的压力分量 P_{23} :

$$P_{23} = -ml \frac{dc_2}{dx_3} \int_0^\infty dc \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} n \left(\frac{m}{2\pi RT} \right)^{3/2} e^{-mc^2/(2RT)} \times c^3 \cos^2 \theta d\varphi = -\frac{mln\bar{c}}{3} \frac{dc_2}{dx_3} = -\mu \frac{dc_2}{dx_3},$$

其中

$$\mu = mln\bar{c}/3,$$

称为气体的黏性系数. 代入 l 和 $\bar{c}$ 的表达式, 得

$$\mu = \frac{2\sqrt{mRT}}{3\pi^{3/2}d^2}.$$

第二章 基本方程

§ 2.1 Boltzmann 方程

在本节中, 考虑由同一种分子组成的气体, 即简单气体. 用 f 表示速度分布函数. 速度分布函数 f 是位置矢量 $\mathbf{x}$, 分子速度 $\mathbf{c}$ 和时间 t 的函数. 在 t 时刻, 那些位于体积元 $\mathbf{x}$, $d\mathbf{x}$ 内而且它的速度在 $\mathbf{c}$, $d\mathbf{c}$ 范围内的可能的分子数目等于

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{c}, \quad (2.1)$$

用 m 表示分子的质量, $m\mathbf{F}$ 表示作用在每个分子上的外力. 如果任意一个分子在 dt 时间内不发生碰撞, 则每个分子在时间 dt 内从原位置移动到位置 $\mathbf{x} + \mathbf{c}dt$, 速度从 $\mathbf{c}$ 变为 $\mathbf{c} + \mathbf{F}dt$. 因为没有分子之间的碰撞, 故这些分子 ($f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{c}$) 过时间段 dt 后将全部既不增加也不减少地移动到 $\mathbf{x} + \mathbf{c}dt$, 它们速度变为 $\mathbf{c} + \mathbf{F}dt$. 根据分布函数的定义有

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{c}dt, \mathbf{c} + \mathbf{F}dt, t + dt) d\mathbf{x} d\mathbf{c} = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{c}. \quad (2.2)$$

但是, 一般说来, 第二群的分子总数 $f(\mathbf{x} + \mathbf{c}dt, \mathbf{c} + \mathbf{F}dt, t + dt) d\mathbf{x} d\mathbf{c}$ 不等于原来第一群的分子总数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{c}$, 这是因为分子之间的碰撞会使原来第一群的分子改变速度, 偏离它们的轨道, 同时, 其他分子改变轨道(因碰撞)进入第二群, 成为第二群的一个分子. 因此, 在碰撞存在的情况下, 应有下式

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{c}dt, \mathbf{c} + \mathbf{F}dt, t + dt) d\mathbf{x} d\mathbf{c} = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{c} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{碰}} dt d\mathbf{x} d\mathbf{c}, \quad (2.3)$$

其中 $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{碰}} dt d\mathbf{x} d\mathbf{c}$ 表示在某一个固定位置处由碰撞引起的速度分布函数的变化率. (2.3)

式两边除以 $d\mathbf{c} d\mathbf{x} dt$, 并令 dt 趋于零, 可以推出 Boltzmann 方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{碰}}. \quad (2.4)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ 表示关于空间的梯度, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}}$ 表示关于速度的梯度. 可以把 Boltzmann 方程改写为

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathbf{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{碰}}. \quad (2.5)$$

上式说明了速度分布函数在空间某一点处的变化率是两部分的和.

$$-\mathbf{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}}$$

表示由运动和受外力引起的增加的部分. 另一部分是代表由碰撞而增加的部分.

下面讨论 $(\partial f / \partial t)_{\text{碰}}$ 和速度分布函数 f 之间的关系. $(\partial f / \partial t)_{\text{碰}}$ 可以用含未知(速度分布)函数 f 的积分来表示. 所以 Boltzmann 方程是含未知函数 f 的微分和积分的方程. 用

$$(\partial f / \partial t)_{\text{碰}}^+ d\mathbf{x} d\mathbf{c} dt \quad (2.6)$$

表示在 dt 时间内由碰撞而进入 $\mathbf{x}, \mathbf{c}$ 附近 $d\mathbf{x} d\mathbf{c}$ 的分子数, 用

$$(\partial f / \partial t)_{\text{碰}}^- d\mathbf{x} d\mathbf{c} dt \quad (2.7)$$

表示由碰撞而离开 $\mathbf{x}, \mathbf{c}$ 处的区域 $d\mathbf{x} d\mathbf{c}$ 的分子数. 因此

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{碰}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{碰}}^+ - \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{碰}}^- \quad (2.8)$$

在本节, 假设气体是稀薄气体, 即只考虑二体碰撞, 忽略不计三体或三体以上的碰撞的几率.

假设质量为 m_1 和 m_2 的两个相互碰撞的分子是光滑、球对称的, 并可以看成力心点. 另外, 还认为当两个分子相碰撞时, 外力远远小于碰撞时的作用力, 因此在碰撞过程中可以忽略外力. 用 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ 和 $\mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2$ 分别表示分子 1 和 2 的碰撞前后的速度. 令

$$\mathbf{G} = \frac{m_1 \mathbf{c}_1 + m_2 \mathbf{c}_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.9)$$

$\mathbf{G}$ 是两个分子组成的系统的质心速度.

由动量守恒定律和能量守恒定律, 有

$$m_1 \mathbf{c}_1 + m_2 \mathbf{c}_2 = m_1 \mathbf{c}'_1 + m_2 \mathbf{c}'_2 = m_0 \mathbf{G}, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{2}m_1c_1^2 + \frac{1}{2}m_2c_2^2 = \frac{1}{2}m_1c_1'^2 + \frac{1}{2}m_2c_2'^2, \quad (2.11)$$

其中 $m_0 = (m_1 + m_2)$.

用 $\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{g}'$ 分别表示碰撞前后第二个分子相对于第一个分子的相对速度, 于是

$$\mathbf{g} = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{g}' = \mathbf{c}_2' - \mathbf{c}_1', \quad (2.13)$$

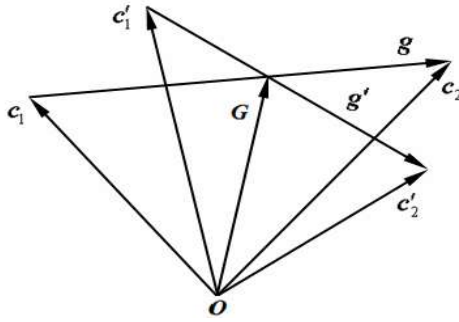


图 2.1 分子碰撞中相对速度的变化

根据式 (2.9), (2.12) 和 (2.13) 可知可以用 $\mathbf{G}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}'$ 表示 $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ 和 $\mathbf{c}_1'$, $\mathbf{c}_2'$:

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{G} - M_2\mathbf{g}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{G} + M_1\mathbf{g}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{c}_1' = \mathbf{G} - M_2\mathbf{g}', \quad (2.16)$$

$$\mathbf{c}_2' = \mathbf{G} + M_1\mathbf{g}'. \quad (2.17)$$

将 (2.14)–(2.17) 代入能量守恒式 (2.11) 可得

$$\frac{1}{2}(m_1c_1^2 + m_2c_2^2) = \frac{1}{2}m_0(G^2 + M_1M_2g^2), \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{2}(m_1c_1'^2 + m_2c_2'^2) = \frac{1}{2}m_0(G^2 + M_1M_2g'^2). \quad (2.19)$$

因此有

$$g = g', \quad (2.20)$$

其中 $M_1 = m_1/(m_1 + m_2)$, $M_2 = m_2/(m_1 + m_2)$.

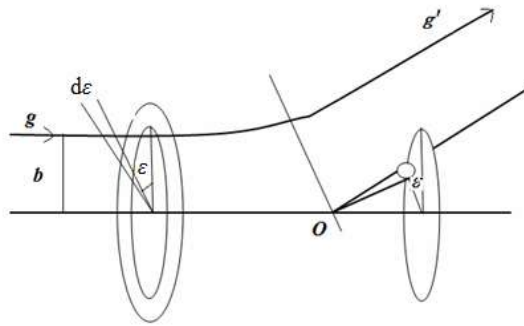


图 2.2 分子互相碰撞示意图

在二体碰撞中, 为了方便假设分子 1 静止不动, 位于如图 2.2 所示的 O 点. 相对于分子 1, 分子 2 以速度 $\mathbf{g}$ 相对运动, 即分子 2 的相对速度等于 $\mathbf{g}$. 选取以 O 为原点的球坐标, 极轴平行于 $\mathbf{g}$. b 表示 $\mathbf{g}$ 至极轴的距离, 称为碰撞参数. 用 $\mathbf{g}'$ 表示碰撞后分子 2 相对于分子 1 的相对速度. $\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{g}'$ 所在平面与初始平面夹角及 $\mathbf{g}$ 与 $\mathbf{g}'$ 的夹角分别记为 ε 和 χ . 过 O 点作平行于 $\mathbf{g}'$ 的一条直线, 则 ε 和 χ 如图 2.2 所示. 以 $\boldsymbol{\Omega}$ 表示 $\mathbf{g}'$ 方向的单位矢量, 即 $\boldsymbol{\Omega}$ 等于 $\mathbf{g}'/g$. $d\boldsymbol{\Omega}$ 表示立体角元, 即

$$d\boldsymbol{\Omega} = \sin \chi d\chi d\varepsilon. \quad (2.21)$$

由于设分子 1 在 O 点不动, 分子 2 碰撞前相对于 O 点以相对速度 $\mathbf{g}$ 运动. 在 dt 时间内能与分子 1 碰撞的分子 (即能到达面积元 $bdbd\varepsilon$ 上的分子) 应在以 $bdbd\varepsilon$ 为底面, 以 $-\mathbf{g}dt$ 为棱的柱体中, 即这些分子 2 必须在 $gbdbd\varepsilon dt$ 的体积中, 才能 dt 时间内到达面积元 $bdbd\varepsilon$ (见图 2.3).

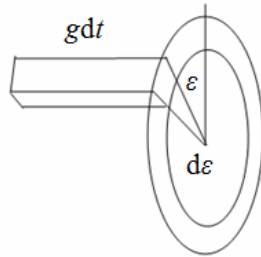


图 2.3 分子 1 附近的状况

速度在 $\mathbf{c}_1, d\mathbf{c}_1$, 位置在 $\mathbf{x}, d\mathbf{x}$ 范围内的分子 1 的分子数为 $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, t) d\mathbf{c}_1 d\mathbf{x}$. 每个分子 1 与体积 $g b d b d \varepsilon d t$ 中的分子 2 发生碰撞. 对每个分子 1 的这样的体积 ($g b d b d \varepsilon d t$) 中有 $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{c}_2, t) g b d b d \varepsilon d t d\mathbf{c}_2$ 个分子 2. 所以在时间段 $d t$ 内, 碰撞总数为

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, t) f_2(\mathbf{x}, \mathbf{c}_2, t) g b d b d \varepsilon d \mathbf{c}_1 d \mathbf{c}_2 d \mathbf{x} d t. \quad (2.22)$$

分 1 和 2 碰撞后, 速度分别变为 $\mathbf{c}'_1$ 和 $\mathbf{c}'_2$, 故这两个分子不在原来的速度范围 $\mathbf{c}_1, d\mathbf{c}_1$ 和 $\mathbf{c}_2, d\mathbf{c}_2$, 因此, 因碰撞而损失的分子数等于碰撞总数. 根据 $(\partial f / \partial t)_{\text{碰}}^- d\mathbf{x} d\mathbf{c}_1$ 的定义, 对所有可能的 $b, \varepsilon, \mathbf{c}_2$ 积分, 并除以 $d\mathbf{x} d t$ 得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{碰}}^- = \int d\mathbf{c}_2 \int d\varepsilon \int d b f_1(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, t) f_2(\mathbf{x}, \mathbf{c}_2, t) g b. \quad (2.23)$$

记

$$\sigma d\mathbf{\Omega} = b d b d \varepsilon, \quad (2.24)$$

σ 称为微分碰撞截面, 或称微分散射截面, 它是 g 和 χ 的函数, 即 $\sigma = \sigma(g, \chi)$.

上面讨论了这样的碰撞 (称为正碰撞): 速度为 $\mathbf{c}_1$ 的分子 1 和速度为 $\mathbf{c}_2$ 的分子 2 碰撞后速度分别变为 $\mathbf{c}'_1$ 和 $\mathbf{c}'_2$. 这时, 碰撞前的相对速度 $\mathbf{g}$ 碰撞后变为 $\mathbf{g}'$ (碰撞后的相对速度). 当然存在这样的碰撞, 称为第一对碰撞 (正碰撞) 的逆碰撞或反碰撞: 速度为 $\mathbf{c}'_1$ 的分子 1 和速度为 $\mathbf{c}'_2$ 的分子 2 碰撞后速度分别变为 $\mathbf{c}_1$ 和 $\mathbf{c}_2$. 这时, 碰撞前的相对速度 $\mathbf{g}'$ 碰撞后变为 $\mathbf{g}$ (碰撞后的相对速度).

用类似于求 (2.22) 的方法可求出在 $d t$ 时间内, 在 $(\mathbf{c}'_1, d\mathbf{c}'_1), (\mathbf{c}'_2, d\mathbf{c}'_2), (\mathbf{x}, d\mathbf{x})$ 内发生的逆碰撞次数为

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_1, t) f_2(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_2, t) g' \sigma' d\mathbf{\Omega}' d\mathbf{c}'_1 d\mathbf{c}'_2 d\mathbf{x} d t. \quad (2.25)$$

其中 $\mathbf{\Omega}'$ 表示 $\mathbf{g}'$ 方向的单位向量, σ' 可以用 σ 代替. 利用 (2.9) 和 (2.14)–(2.17) 可推出

$$\mathbf{c}'_1 = M_1 \mathbf{c}_1 + M_2 \mathbf{c}_2 - M_2 \mathbf{g}', \quad (2.26)$$

$$\mathbf{c}'_2 = M_1 \mathbf{c}_1 + M_2 \mathbf{c}_2 + M_1 \mathbf{g}', \quad (2.27)$$

$$\mathbf{c}_1 = M_1 \mathbf{c}'_1 + M_2 \mathbf{c}'_2 - M_2 \mathbf{g}, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{c}_2 = M_1 \mathbf{c}'_1 + M_2 \mathbf{c}'_2 + M_1 \mathbf{g}. \quad (2.29)$$

利用 (2.26)–(2.29) 可以证明

$$d\mathbf{c}'_1 d\mathbf{c}'_2 d\mathbf{g} = |J| d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 d\mathbf{g}'. \quad (2.30)$$

$$J \equiv \frac{\partial(\mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2, \mathbf{g})}{\partial(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{g}')} = \pm 1, \quad (2.31)$$

即

$$d\mathbf{c}'_1 d\mathbf{c}'_2 d\mathbf{g} = d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 d\mathbf{g}' \quad (2.32)$$

成立. 因此可把逆碰撞次数 (2.25) 表示为

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_1, t) f_2(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_2, t) g \sigma d\mathbf{\Omega} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 d\mathbf{x} dt. \quad (2.33)$$

对所有可能的 $\mathbf{c}_2$ 和 $\mathbf{\Omega}$ 积分, 可得因逆碰撞而增加的第一类 ($\mathbf{c}_1, d\mathbf{c}_1$) 分子的增量:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{碰}}^+ = \int d\mathbf{c}_2 \int d\mathbf{\Omega} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_1, t) f_2(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_2, t) g \sigma(g, \chi). \quad (2.34)$$

由 (2.8), (2.23), (2.24) 和 (2.34) 可推出

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{碰}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{碰}}^+ - \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{碰}}^- = \iint [f_1(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_1, t) f_2(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_2, t) \\ &\quad - f_1(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, t) f_2(\mathbf{x}, \mathbf{c}_2, t)] g \sigma(g, \chi) d\mathbf{\Omega} d\mathbf{c}_2. \end{aligned}$$

因为我们只讨论简单气体 (只有一种分子组成的气体: $m_1 = m_2$), 所以也可以把上式表示为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{碰}} = \iint [f' f'_1 - f f_1] g \sigma(g, \chi) d\mathbf{\Omega} d\mathbf{c}_1. \quad (2.35)$$

其中

$$f = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t), \quad f_1 = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, t),$$