浙大优学
一题一课

刷百题不如解透一题

低年级同步课后提升 / 毕业班专题自主复习

一题一课
高中数学

YITI YIKE
GAOZHONG SHUXUE

立体几何

主　　编　惠红民
本册主编　刘晓君
　　　　　刘　文

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

一题一课

高中数学(立体几何)

主　　编　惠红民
本册主编　刘晓君　刘　文

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

一题一课. 高中数学. 立体几何 / 惠红民主编. —
杭州:浙江大学出版社,2016. 6
ISBN 978-7-308-15687-5

Ⅰ. ①一… Ⅱ. ①惠… Ⅲ. ①立体几何课—高中—题
解 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 054083 号

一题一课. 高中数学. 立体几何

主编 惠红民

策　　划 陈海权(电子信箱:chess332@163. com)
责任编辑 夏晓冬
责任校对 陈　宇
封面设计 林智广告
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址: http://www. zjupress. com)
排　　版 杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷 富阳市育才印刷有限公司
开　　本 889mm×1194mm　1/16
印　　张 6
字　　数 226 千
版 印 次 2016 年 6 月第 1 版　2016 年 6 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-15687-5
定　　价 14. 80 元

浙江大学出版社发行中心联系方式:0571—88925591;http://zjdxcbs. tmall. com

目　录

刷百题不如解透一题 …… (1)

第一章　空间几何体的结构、三视图、表面积和体积 …… (2)

第 1 课　常见几何体的结构特征 …… (2)

第 2 课　旋转体和组合体 …… (4)

第 3 课　球以及与球有关的接切问题 …… (6)

第 4 课　空间几何体的三视图 …… (8)

第 5 课　空间几何体的表面积和体积 …… (10)

第二章　点、直线、平面之间的位置关系 …… (12)

第 6 课　平面的基本性质 …… (12)

第 7 课　空间直线的位置关系 …… (14)

第 8 课　线面平行的判定和性质 …… (16)

第 9 课　面面平行的判定与性质 …… (18)

第 10 课　线面垂直的判定与性质 …… (20)

第 11 课　面面垂直的判定和性质 …… (22)

第 12 课　三垂线定理 …… (24)

第 13 课　点线面位置关系综述 …… (26)

第 14 课　异面直线所成的角 …… (28)

第 15 课　线面角 …… (30)

第 16 课　二面角 …… (32)

第 17 课　空间中的距离 …… (34)

第三章　立体几何中的向量方法 …… (36)

第 18 课　空间向量(一) …… (36)

第 19 课　空间向量(二) …… (38)

第 20 课　立体几何中的向量方法(一) …… (40)

第 21 课　立体几何中的向量方法(二) …… (42)

第 22 课　立体几何中的向量方法(三) …… (44)

第 23 课　立体几何中的向量方法(四) …… (46)

第 24 课　立体几何中的向量方法(五) …… (48)

第 25 课　立体几何中的向量方法应用举例(一) …… (50)

第 26 课　立体几何中的向量方法应用举例(二) …… (52)

第四章　立体几何中的常见结论 ………………………… (54)

第 27 课　正方体中的几何性质 ………………………… (54)

第 28 课　正四面体的几何性质(一) ………………………… (56)

第 29 课　正四面体的几何性质(二) ………………………… (58)

第 30 课　三余弦定理(一) ………………………… (60)

第 31 课　三余弦定理(二) ………………………… (62)

第五章　立体几何中的常见问题及思想方法 ………………………… (64)

第 32 课　动点问题 ………………………… (64)

第 33 课　立体几何中的轨迹问题 ………………………… (66)

第 34 课　分类与整合思想、函数与方程思想在立体几何中的应用 ………………………… (68)

第 35 课　转化与化归思想在立体几何中的应用 ………………………… (70)

第 36 课　立体几何中的翻折、展开问题 ………………………… (72)

答案及解析 ………………………… (74)

刷百题不如解透一题

“学习解题的最好方法之一就是研究例题”

解题，无疑是学好数学的最佳途径。于是，刷题风起，题海浪涌，一时间，必刷题、必做题、高频题、母题等，不一而足。以为刷题是学习数学的魔方，题海则是成就学霸的金丹！固然，学习数学离不开解题，但沉溺题海并不意味着能考好数学，不如通过分析典型例题的解题过程来学会解题更加简短有效。

“题不在多，但求精彩”

“千淘万漉虽辛苦，吹尽狂沙始到金。”直白地表达出我们在“一题一课”系列的“一题”即例题选取上的态度与倾向。每一道例题不仅体现对概念的理解与思考价值，还体现知识与方法的代表性；每一道例题不仅解析精到、解法充满活力，更通过思维拓展，借题发挥，探索其中的内在规律和方法，达成“做一题，通一类，会一片”的目标 。

“多刷题，不如多反思”

“学而不思则罔，思而不学则殆。”做题需要产生效果、追求效益。**种种经验表明：题不是刷的越多越好，如果缺乏解题反思，不但浪费时间，甚至误导学习。**因此，本书在写作体例与排版上都突出了反思的意义与重要性，反思的过程既是对数学知识和解题方法的理解与强化的过程，也是学生内化解题能力的过程。

“解题是一种实践性的技能，就像游泳、滑雪或弹钢琴一样，只能通过模仿、练习和钻研才能占为己有”

例题帮助学生理解并学会运用同步教材所学知识及技能，然后通过变式练习（一课一练）内化落实，既满足低年级同步自主学习，又满足毕业班专题自主复习。

如果您是学生，请加入“一题一课学习交流”QQ群(205743216)，我们一起学习、提高；如果您是老师，请加入“一题一课教师研讨”QQ群(529481589)，我们一起研讨、探索。

“学习的本质，不在于记住哪些知识，而在于它触发了你的思考。”学习数学的道路上，祝愿您学会思考，体会成功！刷百题不如解透一题，“一题一课”系列图书还有哪些分册，请看本书封底。

第一章　空间几何体的结构、三视图、表面积和体积

第 1 课　常见几何体的结构特征

1. 棱柱可以通过对各个面的描述、棱的限定来定义，也可以从运动变化的观点来看，即平面多边形按照一个向量进行平移所经过的空间.

2. 可以从棱、面(底面和侧面)的形状和位置关系等方面来把握几何体的结构特征.

3. 如图 1-1，1-2，要掌握棱柱、棱锥各部分的结构特征，计算问题时往往转化到一个三角形中进行解决.

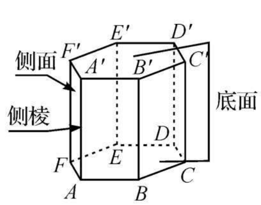

图 1-1

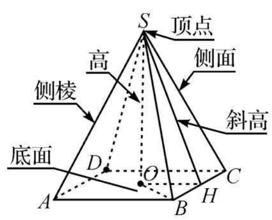

图 1-2

第 1 题　如图 1-3，在直棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，底面是边长为 3 的等边三角形，$AA'=4$，M 为 AA' 的中点，P 是 BC 上一点，且由点 P 沿棱柱侧面经过棱 CC' 到点 M 的最短路线长为 $\sqrt{29}$，设这条最短路线与 CC' 的交点为 N，求：

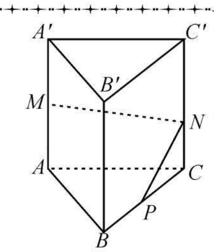

图 1-3

(1)该三棱柱的侧面展开图的对角线长；

(2)PC 与 NC 的长；

(3)三棱锥 $C-MNP$ 的体积.

【分析】　(1)侧面展开图从哪里剪开展平；(2)$MN+NP$ 最短，在展开图上呈现怎样的形式；(3)三棱锥以谁作底好，以有利于求高为标准.

【解析】　(1)该三棱柱的侧面展开图为一个长、宽分别为 4 和 9 的矩形，故对角线长为 $\sqrt{4^2+9^2}=\sqrt{97}$.

(2)将该三棱柱的侧面沿棱 BB' 展开，如图 1-4，设 $PC=x$，则 $MP^2=MA^2+(AC+x)^2$.

因为 $MP=\sqrt{29}$，$MA=2$，$AC=3$，

所以 $x=2$，即 $PC=2$.

又 $NC /\!/ MA$，故 $\dfrac{PC}{PA}=\dfrac{NC}{MA}$，

即 $\dfrac{2}{5}=\dfrac{NC}{2}$. 所以 $NC=\dfrac{4}{5}$.

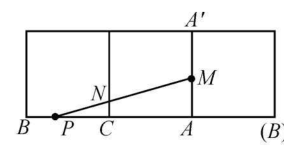

图 1-4

(3)$S_{\triangle PCN}=\dfrac{1}{2}\times CP\times CN=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{5}$.

在三棱锥 $M-PCN$ 中，点 M 到平面 PCN 的距离为 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 3=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

所以 $V_{C-MNP}=V_{M-PCN}=\dfrac{1}{3}\cdot h\cdot S_{\triangle PCN}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

【经验分享】　(1)解决空间几何体表面上的最值问题的根本思路是“展开”，即将空间几何体的“面”展开后铺在一个平面上，将问题转化为平面上的最值问题.

(2)如果已知的空间几何体是多面体，则根据问题的具体情况可以将这个多面体沿某条棱或者某两个面的交线展开，把不在同一个平面上的问题转化到一个平面中.

如果是圆柱、圆锥则可沿母线展开，把曲面上的问题转化为平面上的问题.

学习心得

一课一练 1(答案及解析见 P74)

1. 如图 1-5，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长均为 2，E，F 分别是 BC，A_1C_1 的中点，则 EF 的长等于（　　）

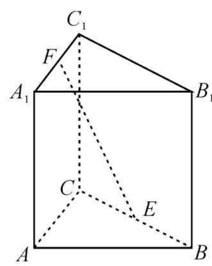

图 1-5

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{7}$

2. 将边长为 1 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，使得 $BD=1$，则三棱锥 $D-ABC$ 的体积是（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　B. $\frac{1}{12}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{12}$

3. 一个六棱柱的底面是正六边形，其侧棱垂直于底面. 已知该六棱柱的顶点都在同一个球面上，且该六棱柱的高为 $\sqrt{3}$、底面周长为 3，则这个球的体积为（　　）

A. $\frac{4}{3}\pi$　　B. $\frac{8}{3}\pi$　　C. $\frac{16}{3}\pi$　　D. $\frac{32}{3}\pi$

4. 某几何体的一条棱长为 $\sqrt{7}$，在该几何体的正视图中，这条棱的投影是长为 $\sqrt{6}$ 的线段，在该几何体的侧视图与俯视图中，这条棱的投影分别是长为 a 和 b 的线段，则 $a+b$ 的最大值为（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{5}$

5. 若正三棱柱的所有棱长均为 a，且其体积为 $16\sqrt{3}$，则 $a=$________.

6. 平面内的一个四边形为平行四边形的充要条件有许多个，如两组对边分别平行；类似地，写出空间中的一个四棱柱为平行六面体的两个充要条件：

充要条件①：________________________________；

充要条件②：________________________________.

7. 一个正三棱柱的侧棱长和底面边长相等，体积为 $2\sqrt{3}$，它的三视图中的俯视图如图 1-6 所示，左视图是一个矩形，则这个矩形的面积是________.

图 1-6

8. 如图 1-7，有两个相同的直三棱柱，底面三角形的三边长分别是 $3a$，$4a$，$5a$，高为 $\frac{2}{a}$，其中 $a>0$. 用它们拼成一个三棱柱或四棱柱，在所有可能的情形中，表面积最小的一个是四棱柱，求 a 的取值范围.

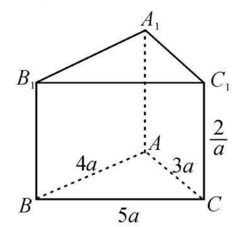

图 1-7

易错追踪

第 2 课　旋转体和组合体

1. 对于旋转体，联系定义中的旋转过程来理解、认识、记忆其结构特征是行之有效的.

2. 注意发挥常见几何体作为模型的积极作用，联系模型有助于开展空间想象和合理的运算.

3. 旋转体中的有关概念和数量关系可以参照图 2-1、2-2 来进行识别.

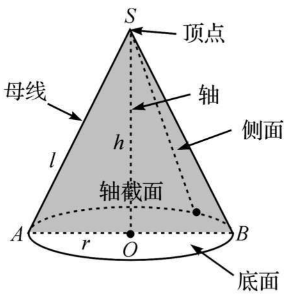

图 2-1

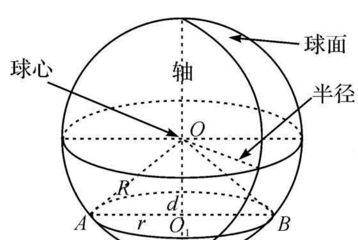

图 2-2

第 2 题　在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PD=a$，$PA=PC=\sqrt{2}a$，若在这个四棱锥内放一球，求此球的最大半径.

【分析】　题目所述的四棱锥可以看成是正方体的一部分. 它的四个侧面是两对全等的直角三角形. 整个图形关于平面（锥体的对角面）PDB 是对称的. 参照平面几何中处理三角形内接圆问题的方法，容易想到利用等体积法，部分的体积之和等于整体的体积，可以列出关于球的半径的方程，问题得以解决.

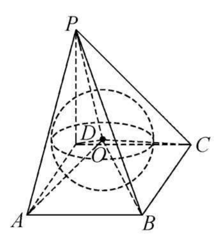

图 2-3

【解析】　如图 2-3，当球内切于四棱锥，即与四棱锥各面均相切时球的半径最大.

设球的半径为 r，球心为 O，连结 OP，OA，OB，OC，OD，

则把此四棱锥分割成四个三棱锥和一个四棱锥，这些小棱锥的高都是 r，底面分别为原四棱锥的侧面和底面，

则 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}r(S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PAD}+S_{正方形ABCD})=\frac{1}{3}r(2+\sqrt{2})a^2$.

由题意，知 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，

所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{正方形ABCD}\cdot PD=\frac{1}{3}a^3$.

由体积相等，得 $\frac{1}{3}r(2+\sqrt{2})a^2=\frac{1}{3}a^3$，

解得 $r=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})a$.

【经验分享】（1）处理多面体与球的相接、相切问题时，要准确构图，在充分展开空间想象力的同时，发挥常见几何体的模型作用. 与球有关的组合体问题，一种是内切，另一种是外接. 解题时要认真分析图形，明确切点和接点的位置，确定有关元素间的数量关系，并作出合适的截面图.

球内切于正方体，切点为正方体各个面的中心，正方体的棱长等于球的直径；

球外接于正方体，正方体的顶点均在球面上，正方体的体对角线长等于球的直径.

有时还会出现球和正方体的每条棱相切，这时，球的直径等于面对角线的长.

（2）空间问题和平面问题进行类比，“整体等于部分之和”，也是本题成功解决的一个前提. 在立体几何的学习中，注意原来一些数学方法的迁移运用.

学习心得

一课一练 2(答案及解析见 P74)

1. 如图 2-4，模块①～⑤均由 4 个棱长为 1 的小正方体构成，模块⑥由 15 个棱长为 1 的小正方体构成. 先从模块①～⑤中选出三个放到模块⑥上，使得模块⑥成为一个棱长为 3 的大正方体. 则下列选择方案中，能够完成任务的是　（　）

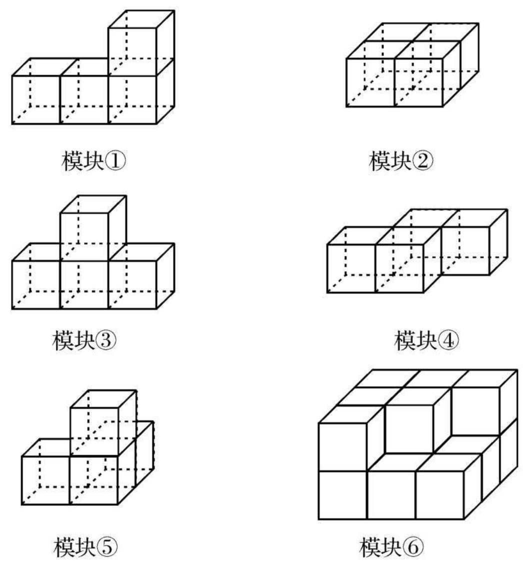

图 2-4

A. 模块①②⑤　　B. 模块①③⑤

C. 模块②④⑥　　D. 模块③④⑤

2. 在梯形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$AD\parallel BC$，$BC=2AD=2AB=2$. 将梯形 $ABCD$ 绕 AD 所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的体积为　（　）

A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{4\pi}{3}$

C. $\frac{5\pi}{3}$　　D. 2π

3. 如图 2-5，有一个水平放置的透明无盖的正方体容器，容器高 8 cm，将一个球放在容器口，再向容器内注水，当球面恰好接触水面时测得水深为 6 cm，如果不计容器的厚度，则球的体积为　（　）

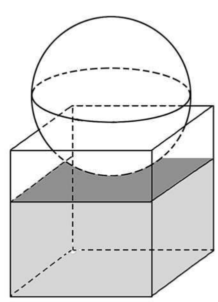

图 2-5

A. $\frac{500\pi}{3}$ cm^3　　B. $\frac{866\pi}{3}$ cm^3

C. $\frac{1372\pi}{3}$ cm^3　　D. $\frac{2048\pi}{3}$ cm^3

4. 若圆锥的侧面积与过轴的截面面积之比为 2π，则其母线与轴的夹角的大小为________.

5. 在平面内，如果用一条直线去截正方形的一个角，那么截下的直角三角形按图 2-6 所标边长，由勾股定理有 $c^2=a^2+b^2$. 设想正方形换成正方体，把截线换成如图 2-7 所示的截面，这时从正方体上截下三条侧棱两两垂直的三棱锥 $O-LMN$，如果用 S_1，S_2，S_3 表示三个侧面面积，S_4 表示截面面积，那么你类比得到的结论是__________.

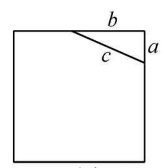

图 2-6

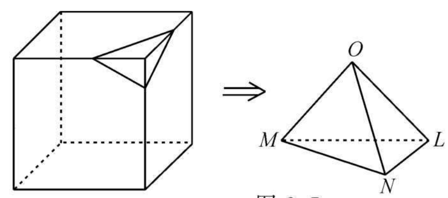

图 2-7

6. 如图 2-8 是一个长方体截去一个角所得多面体的直观图，图 2-9 是它的主视图和左视图(单位：cm).

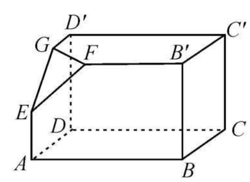

图 2-8

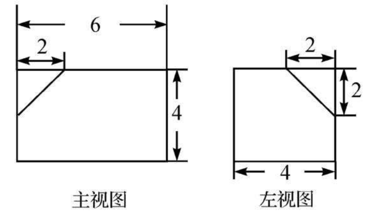

图 2-9

(1)画出该多面体的俯视图；

(2)按照给出的尺寸，求该多面体的体积.

易错追踪

第3课　球以及与球有关的接切问题

本课是高考常考内容之一,多以选择题和填空题的形式出现,而且经常与多面体结合起来考查,如多面体的外接球、内切球等等.

第3题　(1)球面上有三个点,其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的$\frac{1}{6}$,经过这三个点的小圆的周长为4π,求这个球的半径.

(2)一个倒圆锥形容器,它的轴截面是正三角形,在容器内注入水,并放入一个半径为r的铁球,这时水面恰好和球面相切.问:将球从圆锥内取出后,圆锥内水面的高是多少?

(3)正三棱锥的高为1,底面边长为$2\sqrt{6}$,求内切球的表面积与体积.

【分析】　(1)注意对"球面距离"的准确理解,明确它与"两点间距离"的区别和联系.

(2)先作出轴截面,弄清楚圆锥和球相切时的位置特征,利用铁球取出后,锥内水面下降部分(圆台)的体积等于球的体积,列式求解.

(3)球心到正三棱锥四个面的距离相等且为球的半径.

【解析】　(1)如图3-1所示,

设球的半径为R,小圆的半径为r,则$2\pi r=4\pi$,所以$r=2$.

设三点分别为A,B,C,点O为球心,由球面距离概念知$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\frac{\pi}{3}$.

又因为$OA=OB$,所以$\triangle AOB$是等边三角形.同理,$\triangle BOC,\triangle COA$都是等边三角形,

所以$\triangle ABC$是等边三角形,边长等于球半径R.

r为$\triangle ABC$的外接圆半径,$r=\frac{\sqrt{3}}{3}AB=\frac{\sqrt{3}}{3}R,R=2\sqrt{3}$.

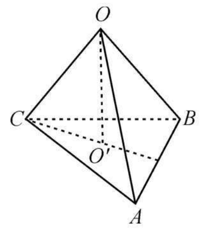

图3-1

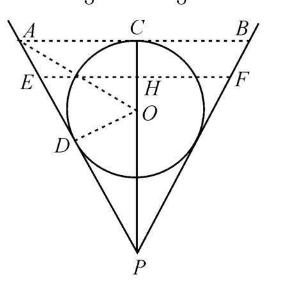

图3-2

(2)如图3-2所示,作轴截面,设球未取出时水面高$PC=h$,球取出后,水面高$PH=x$.

因为$AC=\sqrt{3}r,PC=3r$,

则以AB为底面直径的圆锥容积为

$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi\cdot AC^2\cdot PC=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{3}r)^2\cdot 3r=3\pi r^3$,

球取出后水面下降到EF,水的体积为

$V_{水}=\frac{1}{3}\pi\cdot EH^2\cdot PH=\frac{1}{3}\pi(PH\tan 30°)^2PH=\frac{1}{9}\pi x^3$.

又$V_{水}=V_{圆锥}-V_{球}$,则$\frac{1}{9}\pi x^3=3\pi r^3-\frac{4}{3}\pi r^3$,解得$x=\sqrt[3]{15}r$.

(3)如图3-3所示,

球O是正三棱锥$P-ABC$的内切球,O到正三棱锥四个面的距离都是球的半径R.

PH是正三棱锥的高,即$PH=1$.E是BC边的中点,H在AE上,$\triangle ABC$的边长为$2\sqrt{6}$,所以$HE=\frac{\sqrt{3}}{6}\times 2\sqrt{6}=\sqrt{2}$,所以$PE=\sqrt{3}$.

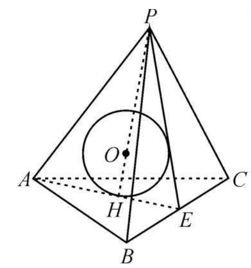

图3-3

可以得到$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAC}=S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}BC\cdot PE=3\sqrt{2}$,

$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{6})^2=6\sqrt{3}$.

由$V_{P-ABC}=V_{O-PAB}+V_{O-PAC}+V_{O-PBC}+V_{O-ABC}$得

$\frac{1}{3}\times 6\sqrt{3}\times 1=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{2}\times R\times 3+\frac{1}{3}\times 6\sqrt{3}\times R$,

解得$R=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\sqrt{6}-2$,

所以$S_{球}=4\pi R^2=4\pi(\sqrt{6}-2)^2=8(5-2\sqrt{6})\pi$.

【经验分享】　球心是决定球的位置的关键点,以球心的位置特点来抓住球的基本量,这是解决球的有关问题的常用方法.

学习心得

一课一练 3(答案及解析见 P75)

1. 球面上有 A,B,C 三点组成这个球的一个截面的内接三角形,其中 $AB=18,BC=24,AC=30$,球心到这个截面的距离为球半径的一半,求球的表面积.

2. 过球 O 的表面上一点 A 引三条长度相等的弦 AB,AC,AD,且两两夹角都为 $60°$,若球半径为 R,求弦 AB 的长度.

3. A,B 是半径为 R 的球 O 的球面上两点,它们的球面距离为 $\frac{\pi}{2}R$,求过点 A,B 的平面中,与球心的最大距离是多少?

4. 自半径为 R 的球面上一点 M,引球的三条两两垂直的弦 MA,MB,MC,求 $MA^2+MB^2+MC^2$ 的值.

5. 试比较等体积的球与正方体的表面积的大小.

6. 在球心同侧有相距 9cm 的两个平行截面,它们的面积分别为 $49\pi cm^2$ 和 $400\pi cm^2$. 求球的表面积.

易错追踪

第4课　空间几何体的三视图

三视图一直都是高考的热点内容,几乎每年必考一个选择题或填空题.

本课的重点是会将空间几何体的三视图还原成直观图.

第4题　(1)一个四面体的三视图如图4-1所示,则该四面体的表面积是　(　　)

A. $1+\sqrt{3}$　B. $2+\sqrt{3}$　C. $1+2\sqrt{2}$　D. $2\sqrt{2}$

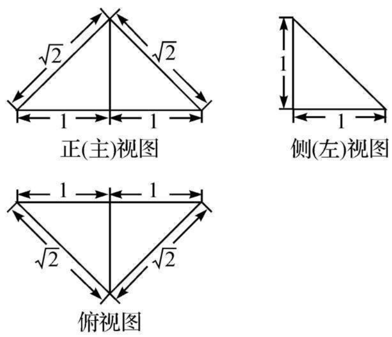

图4-1

(2)某工件的三视图如图4-2所示,现将该工件通过切割,加工成一个体积尽可能大的长方体新工件,并使新工件的一个面落在原工件的一个面内,则原工件材料的利用率为(材料利用率$=\dfrac{\text{新工件的体积}}{\text{原工件的体积}}$)　(　　)

A. $\dfrac{8}{9\pi}$　B. $\dfrac{16}{9\pi}$

C. $\dfrac{4(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$　D. $\dfrac{12(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$

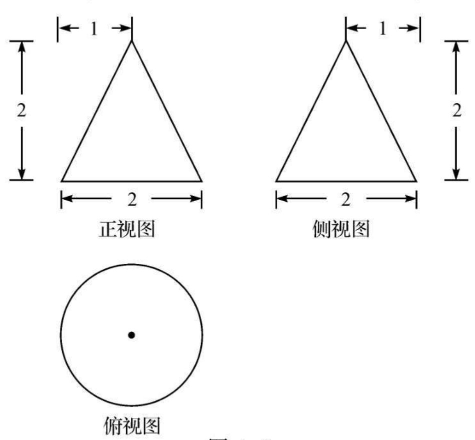

图4-2

【分析】　(1)根据三视图的摆放规律"长对正、高平齐、宽相等",可以恢复还原直观图,并读出几何体的棱长等数据.

(2)本小题考查了圆锥的内接长方体和基本不等式求最值.

首先由三视图读出圆锥的数据,其次正确分析圆锥内接长方体和圆锥的公共点,可列出长方体长、宽、高之间的条件式,结合基本不等式可以求解.

【解析】　(1)由题意,该四面体的直观图如图4-3所示.

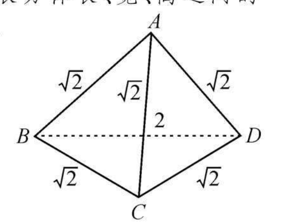

图4-3

$\triangle ABD$,$\triangle BCD$是等腰直角三角形,$\triangle ABC$,$\triangle ACD$是等边三角形.

则$S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$,$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以四面体的表面积$S=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=2\times1+2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$,故选B.

(2)分析题意可知,问题等价于圆锥的内接长方体的体积的最大值.

设长方体的长、宽、高分别为x,y,h,长方体上底面截圆锥的截面半径为a,

则$x^2+y^2=(2a)^2=4a^2$.

圆锥的轴截面如图4-4所示,则可知$\dfrac{a}{1}=\dfrac{2-h}{2}$,$h=2-2a$.

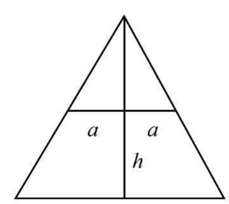

图4-4

而长方体的体积$V=xyh\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}h=2a^2h=2a^2(2-2a)\leqslant2\times\left(\dfrac{a+a+2-2a}{3}\right)^3=\dfrac{16}{27}$,当且仅当$x=y$,$a=2-2a$,即$a=\dfrac{2}{3}$时,等号成立.

此时材料的利用率为$\dfrac{\dfrac{16}{27}}{\dfrac{1}{3}\pi\times1^2\times2}=\dfrac{8}{9\pi}$,故选A.

【经验分享】　本题主要考查立体几何中的最值问题,与实际应用相结合,立意新颖,解决此类问题的两大核心思路:一是化立体问题为平面问题,结合平面几何的相关知识求解;二是建立目标函数的数学思想,选择合理的变量,利用导数或基本不等式求其最值.

学习心得

一课一练 4(答案及解析见 P75)

1. 一个几何体的三视图如图 4-5 所示，则该几何体的表面积为　　(　　)

A. 3π　　B. 4π　　C. $2\pi+4$　　D. $3\pi+4$

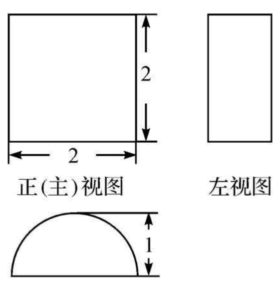

图 4-5

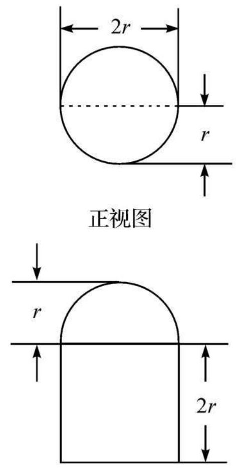

图 4-6

2. 圆柱被一个平面截去一部分后与半球(半径为 r)组成一个几何体，该几何体三视图中的正视图和俯视图如图 4-6 所示. 若该几何体的表面积为 $16+20\pi$，则 r 等于　　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

3. 某几何体的三视图如图 4-7 所示，则该几何体的体积为　　(　　)

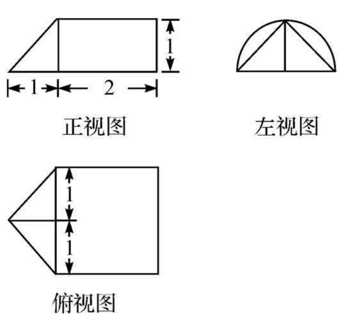

图 4-7

A. $\frac{1}{3}+\pi$　　B. $\frac{2}{3}+\pi$

C. $\frac{1}{3}+2\pi$　　D. $\frac{2}{3}+2\pi$

4. 某三棱锥的三视图如图 4-8 所示，则该三棱锥的表面积为　　(　　)

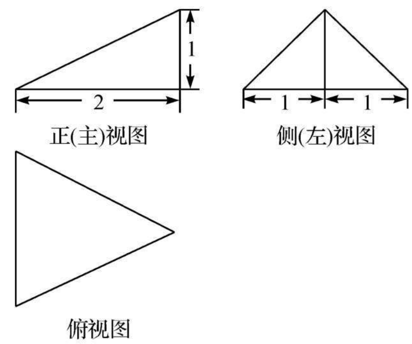

图 4-8

A. $2+\sqrt{5}$　　B. $4+\sqrt{5}$

C. $2+2\sqrt{5}$　　D. 5

5. 一个棱柱的直观图如图 4-9 所示，其三视图中，主视图和俯视图都是边长为 a 的正方形，左视图是直角边长为 a 的等腰直角三角形，其中 M，N 分别是 AB，AC 的中点，G 是 DF 上的一动点.

(1)求证：$GN\perp AC$；

(2)求三棱锥 $E-MCF$ 的体积.

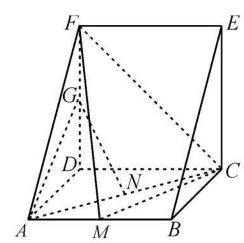

图 4-9

易错追踪

第5课　空间几何体的表面积和体积

1. 牢记常见几何体的表面积和体积公式.

2. 棱柱和棱锥可以看作特殊的棱台，它们的表面积、体积公式可加以类比.

3. 求表面积要注意完整求解，不要丢掉某个面，求体积时常用割补法.

第5题　(1)某四面体的三视图如图5-1所示，该四面体四个面的面积中最大的是　(　　)

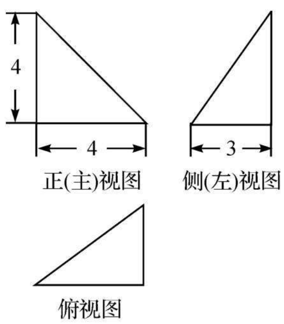

图5-1

A. 8　　B. $6\sqrt{2}$　　C. 10　　D. $8\sqrt{2}$

(2)一个正方体被一个平面截去一部分后，剩余部分的三视图如图5-2所示，则截去部分体积与剩余部分体积的比值为　(　　)

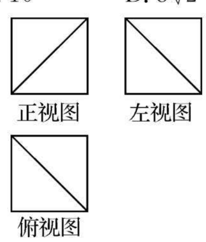

图5-2

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{7}$

C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{5}$

【分析】　(1)还原成直观图，该四面体四个面都是直角三角形.

(2)发挥正方体的模型作用.

【解析】　(1)直观图如图5-3所示，

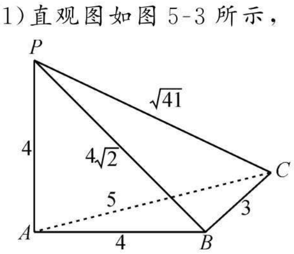

图5-3

由俯视图知，$\triangle ABC$是直角三角形，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$. 由主视图和侧视图知，$PA\perp$平面$ABC$，所以$\triangle PAB$，$\triangle PAC$是直角三角形，

所以$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$，$S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5=10$.

在$\triangle PBC$中，因为$PB=4\sqrt{2}$，$BC=3$，$PC=\sqrt{41}$，

所以$PB^2+BC^2=PC^2$.

所以$\triangle PBC$是直角三角形，

所以$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 3=6\sqrt{2}$.

该四面体四个面的面积中最大的是10. 所以选C.

(2)由三视图得，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，截去四面体$A-A_1B_1D_1$，如图5-4所示，设正方体的棱长为a，则$V_{A-A_1B_1D_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^3=\frac{1}{6}a^3$，故剩余几何体的体积为$\frac{5}{6}a^3$，

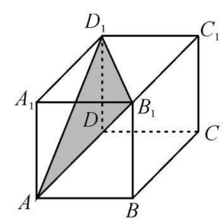

图5-4

所以截去部分体积与剩余部分体积的比值为$\frac{1}{5}$，故选D.

【经验分享】　分享一些解决空间几何体的表面积和体积的常见方法：

(1)与球有关的组合体问题，一种是内切，一种是外接. 解题时要明确切点和接点的位置，如球内切于正方体，切点为正方体各个面的中心，正方体的棱长等于球的直径；球外接于正方体，正方体的顶点均在球面上，正方体的体对角线长等于球的直径.

(2)等积法：等积法的前提是几何图形(或几何体)的面积(或体积)通过已知条件可以得到，等积法可以用来求解几何图形的高或几何体的高，特别是求三角形的高和三棱锥的高.

学习心得

一课一练 5(答案及解析见 P75)

1. 棱长都是 1 的三棱锥的表面积为　(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

2. 长方体的一个顶点上三条棱长分别是 3,4,5,且它的 8 个顶点都在同一球面上,则这个球的表面积是　(　　)

A. 25π　　B. 50π

C. 125π　　D. 都不对

3. 正方体的内切球和外接球的半径之比为　(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 在$\triangle ABC$中,$AB=2$,$BC=\frac{3}{2}$,$\angle ABC=120°$,若将该三角形绕直线 BC 旋转一周,则所形成的几何体的体积是　(　　)

A. $\frac{9}{2}\pi$　　B. $\frac{7}{2}\pi$　　C. $\frac{5}{2}\pi$　　D. $\frac{3}{2}\pi$

5. 若三个球的表面积之比是 1∶2∶3,则它们的体积之比是________.

6.《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著,书中有如下问题:"今有委米依垣内角,下周八尺,高五尺.问:积及为米几何?"其意思为"在屋内墙角处堆有米(如图 5-5,米堆为一个圆锥的四分之一),米堆底部的弧长为 8 尺,米堆的高为 5 尺.问:米堆的体积和堆放的米各为多少?"已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺,圆周率约为 3,估算出堆放的米约有　(　　)

图 5-5

A. 14 斛　　B. 22 斛　　C. 36 斛　　D. 66 斛

7. 已知 A,B 是球 O 的球面上两点,$\angle AOB=90°$,C 为该球面上的动点,若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 36,则球 O 的表面积为　(　　)

A. 36π　　B. 64π

C. 144π　　D. 256π

8. 如图 5-6,E,F 分别为正方体的面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心,则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的投影可能是________.

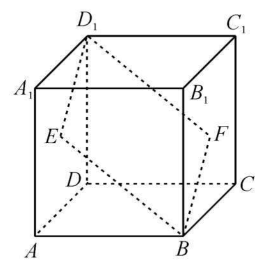

图 5-6

9. 已知一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,$\sqrt{6}$,则这个长方体的对角线长是________;若长方体的共顶点的三个侧面面积分别为 3,5,15,则它的体积为________.

10. 将圆心角为 120°、面积为 3π 的扇形,作为圆锥的侧面,求圆锥的表面积和体积.

易错追踪

第二章　点、直线、平面之间的位置关系

第 6 课　平面的基本性质

1. 平面的基本性质可以看作是立体几何的公理基础，是不需要证明的客观事实.

2. 平面的基本性质是确定平面的条件，是证明几个点在同一平面内、几条线相交于同一点等问题的工具.

3. 重视用平面的基本性质进行推理，言之有据，学会用集合语言、立体几何语言富有逻辑性地表述问题.

第 6 题　如图 6-1，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 AB 和 AA_1 的中点.

(1) 求证：E，C，D_1，F 四点共面；

(2) 求证：CE，D_1F，DA 三线共点；

(3) 设正方体的棱长为 6，求经过 E，F，C_1 三点的平面截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得多边形的周长.

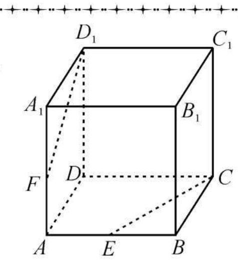

图 6-1

【分析】 (1)两条相交直线或两条平行直线确定一个平面；

(2)可以先证 CE 与 D_1F 交于一点，然后再证该点在直线 DA 上；

(3)运用平面的基本性质确定截面多边形的形状是计算周长或面积的前提. 利用性质可以找到该多边形与正方体各条棱的交点，然后连成多边形.

【解析】 (1)连结 EF，CD_1，A_1B.

因为 E，F 分别是 AB，AA_1 的中点，所以 $EF//BA_1$.

又 $A_1B//D_1C$，所以 $EF//CD_1$，所以 E，C，D_1，F 四点共面.

(2)如图 6-2，因为 $EF//CD_1$，$EF<CD_1$，

所以 CE 与 D_1F 必相交，设交点为 P，

则由 $P\in CE$，$CE\subset$ 平面 $ABCD$，得 $P\in$ 平面 $ABCD$.

同理 $P\in$ 平面 ADD_1A_1.

又平面 $ABCD\cap$ 平面 $ADD_1A_1=DA$，

所以 $P\in$ 直线 DA. 所以 CE，D_1F，DA 三线共点.

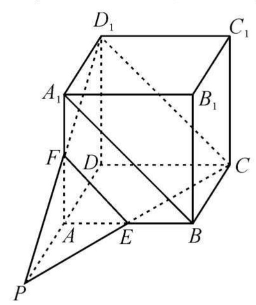

图 6-2

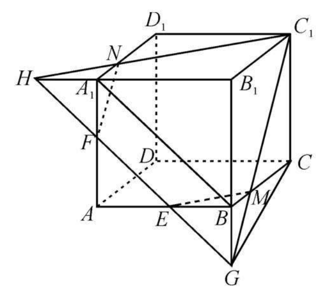

图 6-3

(3)如图 6-3，延长 FE，B_1B 相交于点 G.

因为 $FE//A_1B$，$A_1F//BG$

所以四边形 $AFBG$ 为平行四边形，所以 $BG=3$.

连结 C_1G，与 BC 相交于点 M.

由 $\triangle BMG\backsim\triangle CMG$，知 $BM=\dfrac{1}{3}BC=2$.

连结 EM，得 $EM=\sqrt{BE^2+BM^2}=\sqrt{13}$，

$C_1M=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$.

同理作出截面与棱 A_1D_1 的交点 N.

所以五边形 C_1MEFN 为所求截面，其周长为 $6\sqrt{13}+3\sqrt{2}$.

【经验分享】 基本性质 1 是判断一条直线是否在某个平面内的依据；基本性质 2 及推论是判断或证明点、线共面的依据；基本性质 3 是证明三线共点或三点共线的依据.

截面问题不能只是连结已知三点，得出三角形. 需注意平面是无限延展的，要结合平面的基本性质，准确地确定截面形状. 研究截面与研究几何体的表面(侧面和底面)、展开图、三视图等一样，都是把空间问题转化为平面问题，这是研究几何体的一个重要途径.

学习心得