GAODENG SHUXUE

高等数学

上

主　编　黄英芬　毛　志

副主编　熊卫芝　赵　静

重庆大学出版社

普通高等教育教材

高等数学

（上册）

主　编　黄英芬　毛　志
副主编　熊卫芝　赵　静

重庆大学出版社

内容简介

本书分上、下册.上册内容包括函数、极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,积分及其应用,空间解析几何等;下册内容包括多元函数微分法及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,微分方程等.全书基本上涵盖了现行理工科类院校"高等数学"课程的全部教学内容,内容深浅适宜,注意与中学数学的衔接,例题充分结合教学内容,难易适中,特别注重将建模思想融入课程内容之中.

本书可作为高等院校理工科类各专业的教材,也可作为理工科学生考研参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上/黄英芬,毛志主编.--重庆:重庆大学出版社,2018.8

ISBN 978-7-5689-1281-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①黄… ②毛… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 172511 号

高等数学(上册)

主　编　黄英芬　毛　志

副主编　熊卫芝　赵　静

策划编辑:何　梅　范　琪

责任编辑:姜　凤　　版式设计:何　梅　范　琪

责任校对:邹　忌　　责任印制:张　策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:易树平

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023) 88617190　88617185(中小学)

传真:(023) 88617186　88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆俊蒲印务有限公司印刷

*

开本:787mm×1092mm　1/16　印张:14.25　字数:349千

2018 年 9 月第 1 版　2018 年 9 月第 1 次印刷

印数:1—2 000

ISBN 978-7-5689-1281-5　定价:38.00 元

前言

《高等数学》(上、下册)是根据教育部提出的“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”精神,结合普通高等学校本科专业类教学质量国家标准的要求与铜仁学院建设高水平教学服务型大学的目标,围绕近几年全国高校工科数学教学指导委员会工作会议的意见,作为铜仁学院精品课程建设,强调高等数学要为专业教育服务而编写的一套教材. 全书分上、下册,上册内容包括函数、极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,积分及其应用,空间解析几何;下册内容包括多元函数微分法及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,微分方程. 本书各章节配有习题和总练习题,利用总练习题检测学习效果,题目难易适当,层次分明.

本书注重将数学素质的培养融入教学内容之中,突出微积分的基本思想和方法. 在内容上力求实用,简洁易懂. 在使用过程中注意以问题驱动教学,带着问题教学,为解决问题而引入新知识、新方法是编写本书的另一初衷. 在编写过程中借鉴了传统高等数学的体系结构,同时也做了一些新尝试,例如,将传统的不定积分融入定积分之中,改为积分及其应用,当学生学习完定积分的概念之后,要计算定积分就会产生困难,为解决这个问题,就得学习不定积分,这也是问题驱动的数学教学的一种方式.

本书上册由黄英芬、毛志担任主编,参与本书的编写还有熊卫芝、赵静,其中黄英芬编写第四、五章,熊卫芝编写第一、二章,赵静编写第三章,由黄英芬、毛志负责统稿. 本书的问世,是铜仁学院大数据学院狠抓教学改革的一个缩影,在编写过程中参考了部分高等数学教材. 本书的编写,还离不开我们的同事——铜仁学院大数据学院全体老师的支持,在此致以谢意.

限于编者水平有限,书中不妥和错误在所难免,恳请专家、同行及读者批评指正.

编　者

2018 年 5 月

目录

第一章
函数、极限与连续

微积分的主要研究对象是变量，首先要研究的就是变量之间的某种确定的依赖关系，即函数关系.

本章在对函数及其性质重点复习和适当补充的基础上，着重讨论函数的极限和连续性等基本概念，以及有关的一些性质.

第一节　函　数

一、区间与邻域

本书中所讨论的数都是实数. 书中用到的集合主要是数集，即元素为数的集合.

全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$. 全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$. 全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$. 全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

区间是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集，设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

开区间在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段(图 1.1). 但 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$. a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点；数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

闭区间在数轴上也表示点 a 与点 b 之间的线段，且 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$(图 1.2).

类似地可定义半开区间：

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\};(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

上述区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为区间的长度，a 和 b 称为区间的端点. 此外还有无限区间，如

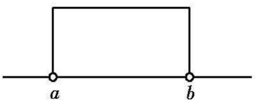

图 1.1

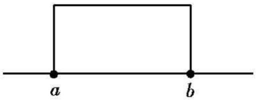

图 1.2

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\},(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}.$$

其中区间中的记号“$+\infty$”“$-\infty$”,分别读作“正无穷大”和“负无穷大”. 它们并不是数,不能参与运算.

邻域也是高等数学经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$.

开区间$(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$,其中 δ 是某个正数,称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U_\delta(a)$,即

$$U_\delta(a)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

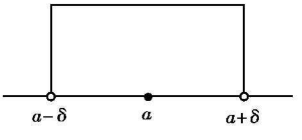

图 1.3

点 a 称为邻域的中心,δ 称为该邻域的半径. 从数轴上看,点 a 的 δ 邻域表示为:以点 a 为中心,长度为 2δ 的开区间(图 1.3).

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$. 因此,

$$U_\delta(a)=\{x\,\|\,x-a|<\delta\}.$$

在点 a 的 δ 邻域中去掉中心点 a 后,称为点 a 的去心(空心)δ 邻域,记作$\mathring{U}_\delta(a)$,即

$$\mathring{U}_\delta(a)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$.

二、函数的概念

在观察自然现象或工程问题时,常常发现同时有几个变量在变化,且它们的变化并非彼此无关,而是互相联系的. 下面列举两个变量互相联系的例子.

例 1.1 2016 年 12 月,明尼苏打 Internationale Fall 市的气温在寒假期间异乎寻常地低. 表 1.1 给出了 12 月 17—26 日每天的低温值.

表 1.1 2016 年 12 月 17—26 日,International Fall 市每天的低温值

日期	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
低温/°F	−14	−21	−30	5	−9	−23	−31	−35	−14	−22

也许你觉得气温是无法预测的,然而温度的确和日期是一一对应的,每天只产生一次低温. 对每个日期 t,有唯一的低温 L 与其对应.

例 1.2 三角形一边长固定为 a,那么三角形面积 S 与该边上高 x 有如下关系:

$$S=\frac{1}{2}ax\quad(0<x<+\infty)$$

从例 1.1 和例 1.2 中可以看出,我们讨论的问题中都有两个变量,而且这两个例子中的变量都有共同的特征:当其中一个变量的值在某一范围内确定后,另一个变量的值按照一定的对应关系也随之而确定. 我们把两个变量之间的这种关系抽象为函数关系.

定义 1　设 x 和 y 是两个变量,x 的变化域是 D. 如果对每个数 $x\in D$,按照某种规则 f,变量 y 总有唯一确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$. x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为该函数的定义域. 当 x 取数值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$. 函数值的集合称为函数的值域,即

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}\subset \mathbf{R}$$

其中,W 是函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应规则的记号 f 也可改用其他字母,如"φ""g""F"等. 此时函数记作 $y=\varphi(x)$,$y=g(x)$,$y=F(x)$等.

定义域是函数定义中的一个重要概念,确定函数的定义域,一是根据问题的实际意义,例 1.1 定义域为日期的集合$\{17,18,19,20,21,22,23,24,25,26\}$,例 1.2 定义域为$(0,+\infty)$. 有时不考虑函数的实际意义,一般用算式表达函数时,则将自变量所能取的使算式有意义的一切实数值作为函数的定义域. 例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域为$[-1,1]$,函数 $y=\ln(1+x)$的定义域为$(-1,+\infty)$.

函数的定义域和对应关系法则是确定函数的两个基本条件. 在判断两个函数是否为同一函数时,要看两个基本条件是否完全相同,完全相同才是相同的函数. 例如,函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$是相同函数. 函数 $y=\ln x^2$ 和 $y=2\ln x$ 是两个不同的函数,因为两者的定义域不同.

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,平面点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$的图形.

例 1.3　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

称为符号函数,定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $W=\{-1,0,1\}$,图形如图 1.4 所示,对任何实数 x 都有

$$x=|x|\operatorname{sgn}x.$$

例 1.4　取整函数 $y=[x]$,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数,简称 x 的整数部分,图形如图 1.5 所示. 定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $W=\mathbf{Z}$.

这种在定义域内不同的范围用不同的式子来表示的函数称为分段函数.

例 1.5　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1+2x & x>0\end{cases}$$

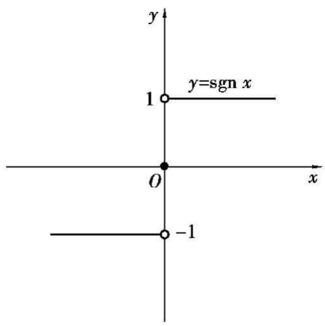

图 1.4

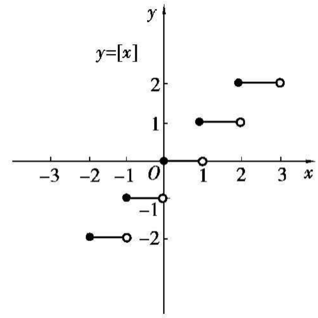

图 1.5

是一个分段函数,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时,对应的函数值 $f(x)=x^2+1$;当 $x\in(0,+\infty)$ 时,对应的函数值 $f(x)=1+2x$,当 $x=0$ 时,函数值为零. 例如,$f(-1)=2$,$f(0)=0$,$f(2)=5$. 该函数的图形如图 1.6 所示.

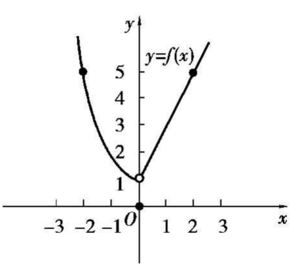

图 1.6

应当指出的是,一个分段函数在定义域的不同范围内虽然有不同的表达式,但它仍然只是一个函数,而不能看成几个不同的函数.

例 1.6 饲养场每天投入 4 元资金用于饲料、人力、设备,估计可使 80 kg 重的生猪体重增加 r kg. 市场价格目前为 8 元/kg,但是预测每天会降低 g 元,问生猪应何时出售利润最大?

分析:投入资金使生猪体重随时间增加,出售单价随时间减少,故存在最佳出售时机,使利润最大.

解 假设 t 天后出售,此时生猪体重为 $w=80+rt$,出售价格为 $p=8-gt$,销售收入为 $R=pw$,资金投入 $C=4t+640$,利润 $Q=R-C=pw-C=(8-gt)(80+rt)-4t-640$.

利润函数是 t 的一个二次函数,当 $r=2$,$g=0.1$ 时,通过求解可得 $t=10$ 时利润最大,最大值为 20 元.

此问题所得到的利润函数就是一个简单的数学模型,首先对模型进行假设,然后建立一个时间与利润的模型,也就是一个函数,之后对模型进行求解得到结论. 实际中,还会对结果进行分析,研究 r, g 变化时对模型结果的影响.

三、有关函数特性的一些概念

(1) 函数的有界性

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果存在正数 M,使得对任意 $x\in I$,有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界. 如果存在数 P_1(或 P_2),对任意 $x\in I$,有

$$f(x)\leqslant P_1\ (\text{或} f(x)\geqslant P_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上有上界(或有下界),P_1(或 P_2)就是 $f(x)$ 在 I 上的一个上界(或下界).

容易证明,函数 $f(x)$ 在 I 上有界的充分必要条件是它在 I 上既有上界又有下界.

例如,正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界. 事实上,存在 $M=$

1,对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$有 $|\sin x|\leqslant 1$ 与 $|\cos x|\leqslant 1$.

定义 2　若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果对任意实数 $p>0$,总存在某个 $x_p\in I$,有

$$f(x_p)>p(\text{或}f(x_p)<-p),$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 无上界(或无下界). 如果对任何的 $M>0$,总存在 $x_M\in I$,使 $|f(x_M)|>M$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

显然,无上界或无下界就无界. 例如,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间(0,1)内是无界的. 事实上,对任意取定的正数 M(不妨设 $M>1$),则存在 $x_M=\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$,有 $\dfrac{1}{x_M}=2M>M$ $\left(\text{或}\left|\dfrac{1}{x_M}\right|=2M>M\right)$. 即函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在(0,1)内无界且无上界. 但是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间(1,2)内是有界的,因为,对任意 $x\in(1,2)$有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$,可取 $M=1$.

(2)函数的单调性

定义 3　若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)(\text{或}f(x_1)\geqslant f(x_2)) \tag{1.1}$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的(或单调减少的). 单调增加或单调减少的函数统称为单调函数.

当式(1.1)为严格的不等式时,称 $f(x)$ 为严格单调函数.

函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是严格单调增加的,在区间 $(-\infty,0]$ 上是严格单调减少的;在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $y=x^2$ 不是单调的(图 1.7). 又如函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是严格单调增加的(图 1.8).

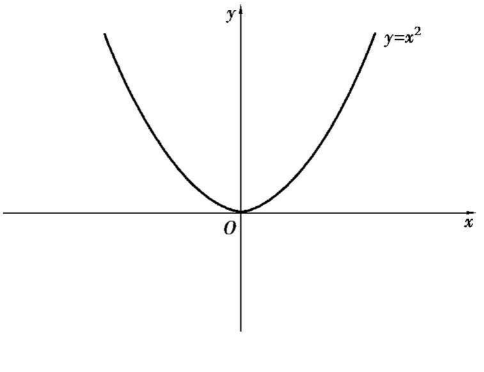

图 1.7

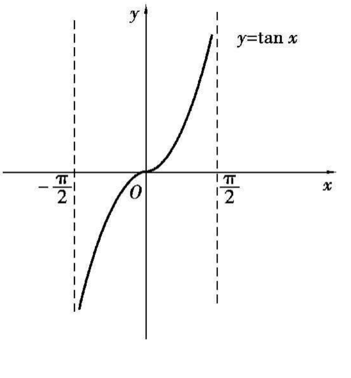

图 1.8

(3)函数的奇偶性

定义 4　设函数 $f(x)$ 的定义域 I 关于原点对称,若 $\forall x\in I$,恒有

$$f(-x)=f(x)\quad(\text{或}f(-x)=-f(x))$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1.9). 奇函数的图形关于原点对称(图 1.10).

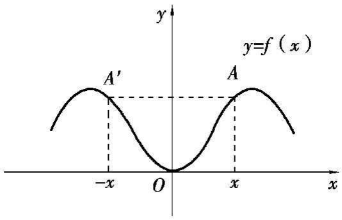

图 1.9

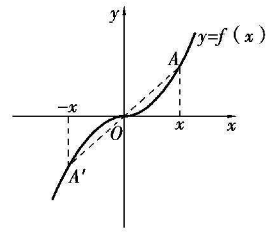

图 1.10

注:常见的 $y=x^2,y=\cos x,y=x^{2n}$是偶函数;$y=x^3,y=\sin x,y=x^{2n-1}$是奇函数,其中 n 是自然数,而 $y=x+\cos x$ 既非奇函数,也非偶函数.

(4)函数的周期性

定义 5　设函数$f(x)$的定义域为 I. 如果存在一个不为零的正数 l,使得对于任意 $x\in I$ 有 $x\pm nl\in I(n\in\mathbf{N})$,且$f(x+l)=f(x)$恒成立,则称$f(x)$为周期函数,$l$ 称为$f(x)$的一个周期. 当 l 是$f(x)$的一个周期时,则 $\pm kl$(k 为自然数)也都是 $f(x)$ 的周期. 通常说一个周期函数的周期是指其最小正周期.

周期函数图形的特点:自变量在定义域内每增加或减少一固定的距离 l 后,图形重复出现. 如图 1.11 所示.

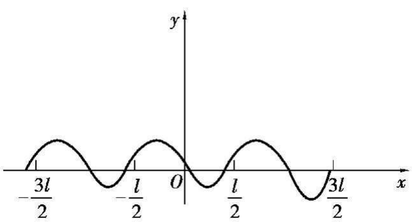

图 1.11

注:$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数,$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是周期数为 π 的周期函数.

四、反函数及其图形

定义 6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,值域为 W. 如果对于任一数值 $y\in W$,按照 $y=f(x)$ 的关系,都可确定唯一的一个 $x\in I$ 与之对应,这样就得到一个定义在 W 上的 y 的函数,称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$,其定义域为 W,值域为 I. 相对于反函数 $x=\varphi(y)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

由定义可知,虽然 $y=f(x)$是单值函数,但其反函数却不一定存在. 但如果 $y=f(x)$是在 I 上严格单调的函数,那么就能保证反函数存在. 这是因为,若 $y=f(x)$是严格单调的函数,则任取 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1\neq x_2$时,必有$f(x_1)\neq f(x_2)$. 所以,任取一个数 $y_0\in W$ 时,I 上不可能有两个不同的数值 x_1 与 x_2使 $y_0=f(x_1)$及 $y_0=f(x_2)$同时成立. 也就是说,由 y_0 能唯一确定一个 $x_0\in D$ 与之对应.

例 1.7　函数 $y=x^2$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$. 在$[0,+\infty)$上任取 $y\neq 0$. 按照 $y=x^2$ 有两个 x 值,即 $x=\pm\sqrt{y}$(图 1.12)与之对应. 所以 $y=f(x)=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上不能确定出反函数. 在$[0,+\infty)$上是严格单调增加的. 将 x 限制在$[0,+\infty)$上,则 $y=x^2$ 的反函数是存在的,即 $x=\sqrt{y},y\in(0,+\infty)$.

习惯上用 x 表示自变量,y 表示因变量. 所以也可用 $y=\varphi(x)$或 $y=f^{-1}(x)$来表示 $y=f(x)$的反函数. 这时,函数 $y=f(x)$与反函数 $y=\varphi(x)$的图形关于直线 $y=x$ 是对称的,如图

1.13所示.

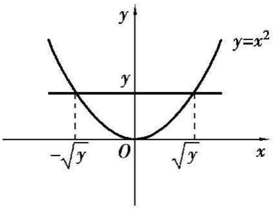

图 1.12

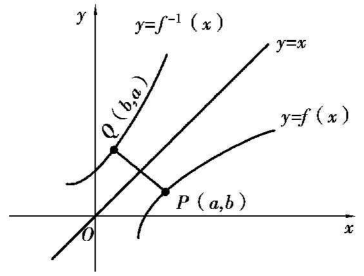

图 1.13

五、初等函数

在中学阶段,已学过以下 5 类函数.

(1)幂函数 $y=x^{a}$(a 为任意实数)

幂函数的定义域要由 a 的值来确定. 当 $a>0$ 时,讨论 $x\geqslant 0$ 的情形,所有的图形都通过点 $(0,0)$ 及点 $(1,1)$. 在 $0<a<1$ 的情况下,图形向上凸起;在 $a>1$ 的情况下,图形向下凸起. 当 $a<0$ 时(讨论 $x>0$ 的情形),所有的图形都通过点 $(1,1)$,且当图形上的点远离原点时,图形分别与 x 轴和 y 轴无限靠近(图 1.14).

(2)指数函数 $y=a^{x}$($a>0$ 且 $a\neq 1$)

对 $\forall x$,均有 $a^{x}>0$,对 $\forall a$($a>0$,$a\neq 1$). 图形通过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时,函数严格单调增加,图形向左逐渐与 x 轴靠近;当 $0<a<1$ 时,函数严格单调减少,图形向右逐渐与 x 轴靠近(图 1.15). 指数函数的应用比较广,例如,倍增时间、半衰期、复利(金融应用)、现值和将来值. 下面就半衰期和复利给出两个例子.

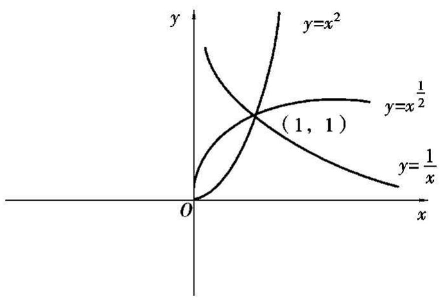

图 1.14

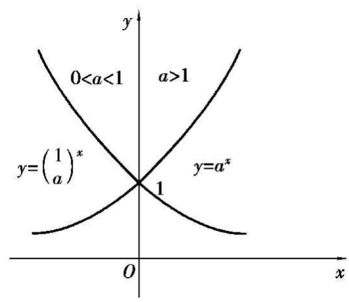

图 1.15

例 1.8　用在空调、家用喷雾剂发胶和剃须霜中的氯氟烃,释放后破坏大气层中的臭氧. 臭氧含量 Q 每年以 0.25% 的连续下降率指数下降. 臭氧的半衰期是多少?(换句话说,以这样的速度,需要多长时间臭氧层消失一半?)

解　如果 Q_0 是臭氧的初始含量并且 t 是年数,那么

$$Q=Q_0\mathrm{e}^{-0.0025t}$$

要求 t 的值使得 $Q=Q_0/2$,即 $Q_0/2=Q_0\mathrm{e}^{-0.0025t}$,从而有

$$-\ln 2 = -0.0025t$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.0025} = 400 \ln 2 \approx 277$$

所以 277 年后,大气中的臭氧层减少一半.

某人将金额 P_0 存入一个账户,该账户每年以 r 的利息支付利息. 设 P 表示 t 年后账户的余额.

(1)如果利息是年复合的,那么 $P = P_0(1+r)^t$;

(2)如果利息是连续复合的,那么 $P = P_0 e^{rt}$, $e = 2.71828\cdots$.

这里记 P_0 为初始存款,由于它是 P 在 $t=0$ 时的值. 注意到对于 7% 的利率, $r=0.07$. 如果利率是连续的,那么我们会说得很精准.

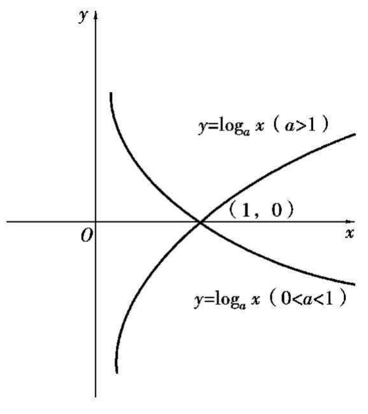

图 1.16

例 1.9 一家银行为每年 8% 的利率做广告. 如果存入 5 000 元,当利息是如下形式时,3 年后账户中的钱是多少?

(1)年复合的;(2)连续复合的.

解 (1)对年复合的, $P = P_0(1+r)^t = 5000 \times (1+8\%)^3 = 6298.56$;

(2)对连续复合的, $P = P_0 e^{rt} = 5000 \times e^{0.08\times 3} = 6356.25$.

可以看出,连续复合的比年复合的收益高.

(3)对数函数 $y = \log_a x (a>0$ 且 $a \neq 1)$

对数函数的定义域为 $x>0$,它的图形与其反函数 $y = a^x$ 对称于直线 $y=x$,通过点(1,0)(图 1.16).

(4)三角函数

正弦函数 $y = \sin x$ 和余弦函数 $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,它们的定义域都是区间 $(-\infty, +\infty)$,值域都是闭区间 $[-1,1]$(图 1.17、图 1.18).

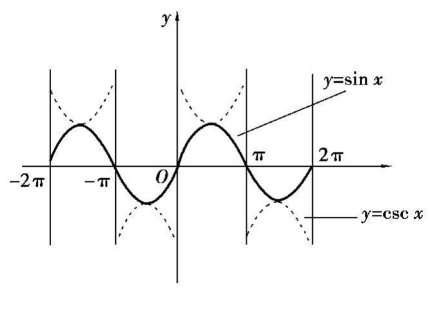

图 1.17

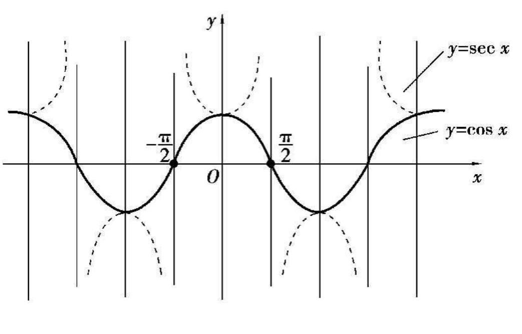

图 1.18

正弦函数是奇函数,余弦函数是偶函数.

正切函数 $y = \tan x$ 的定义域

$$D = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\},$$

余切函数 $y=\cot x$ 的定义域

$$D=\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq n\pi,n\in\mathbf{Z}\},$$

这两个函数的值域都是区间$(-\infty,+\infty)$.

正切函数和余切函数都是以 π 为周期的周期函数,它们都是奇函数(图 1.19、图 1.20).

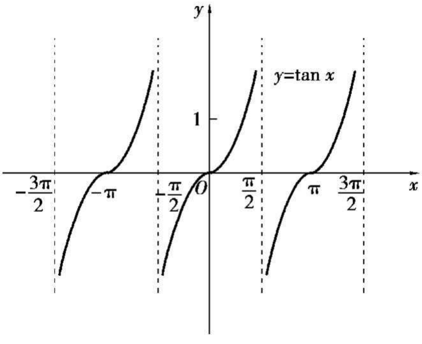

图 1.19

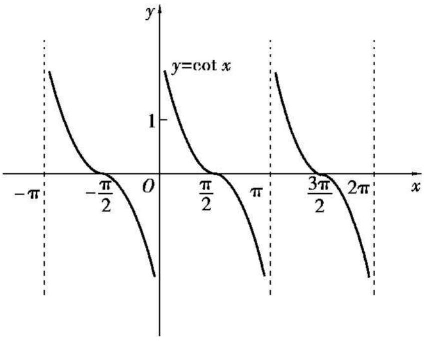

图 1.20

另外,正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$(图 1.17);余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$(图 1.18).

它们都是以 2π 为周期的周期函数,且在开区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内都是无界函数.

(5)反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数. 三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的反函数分别为:

反正弦函数　$y=\arcsin x$(图 1.21)

反余弦函数　$y=\arccos x$(图 1.22)

反正切函数　$y=\arctan x$(图 1.23)

反余切函数　$y=\operatorname{arccot} x$(图 1.24)

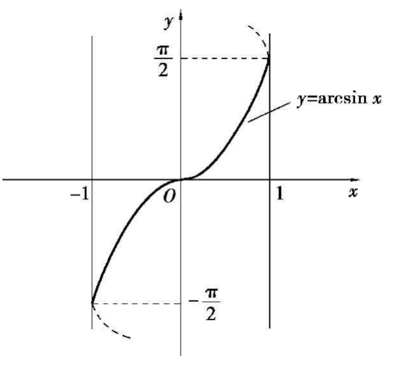

图 1.21

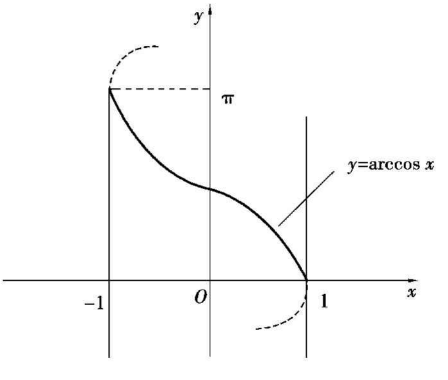

图 1.22

反三角函数的图形都是由相应的三角函数的图形按反函数作图法的一般规则作出.

这 4 个反三角函数都是多值函数. 但是,可以选取这些函数的单值支. 例如,把 arcsin x 的

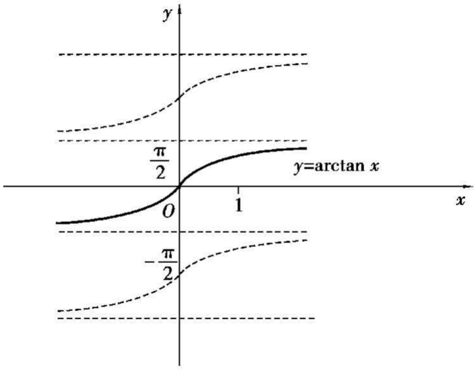

图 1.23

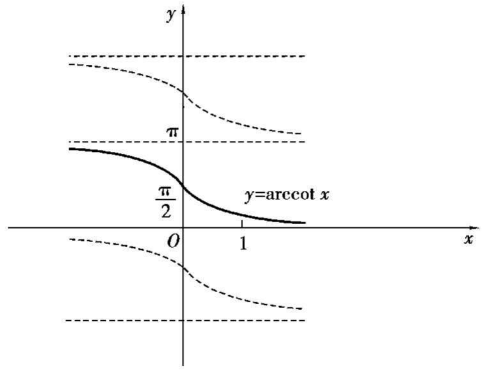

图 1.24

值限制在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上,称为反正弦函数的主值,并记作 arcsin x. 这样,函数 $y=\arcsin x$ 就是定义在闭区间$[-1,1]$上的单值函数,且有

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin x\leqslant \frac{\pi}{2}$$

通常称 $y=\arcsin x$ 为反正弦函数,它在闭区间$[-1,1]$上是严格单调增加的,其图形为图1.21实线部分.

类似地,其他 3 个反三角函数的主值也简称为反余弦函数、反正切函数和反余切函数,它们都是单值函数.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域为闭区间$[-1,1]$,值域为闭区间$[0,\pi]$,它在$[-1,1]$上严格单调减少,图形为图 1.22 实线部分.

反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为开区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,它在$(-\infty,+\infty)$内严格单调增加,图形为图 1.23 实线部分.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为开区间$(0,\pi)$,它在$(-\infty,+\infty)$内严格单调减少,图形为图 1.24 实线部分.

以上 5 种函数统称为**基本初等函数**.

(6)复合函数和初等函数

由两个或两个以上的函数用“对应关系传递”的方法能生成更多的新函数. 例如,函数

$$y=\sqrt{u} \text{ 与 } u=x+1$$

构成新函数

$$y=\sqrt{x+1}$$

在这里,y 是 u 的函数,u 又是 x 的函数. 于是,通过“媒介”u 得到 y 是 x 的函数. 为了使函数 $y=\sqrt{u}$有意义,必须要求 $u\geqslant 0$,为了使 $u=x+1\geqslant 0$,必须要求 $x\geqslant -1$. 仅对函数 $u=x+1$ 来说,x 可取任意实数. 但是,对构成的新函数 $y=\sqrt{x+1}$来说,必须要求 $x\geqslant -1$.

定义 7　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1. 函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2,E 是 D_2 中使 $u=$

$\varphi(x)\in D_1$ 的 x 全体组成的非空子集，即 $E=\{x\mid\varphi(x)\in D_1, x\in D_2\}\neq\varnothing$. 则在 E 上确定了一个 x 的函数：$y=f[\varphi(x)], x\in E$ 称此函数为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

这时，x 是自变量，y 是因变量，u 是中间变量，E 是复合函数的定义域.

例如，由 $y=\ln u, u=1-x^2$ 复合而成的复合函数是 $y=\ln(1-x^2)$，其中定义域 $E=(-1,1)\subset D_2=(-\infty,+\infty)$.

因此，如果 $u=\varphi(x)$ 的值域或其中一部分落在 $y=f(u)$ 的定义域内，那么，这两个函数便可构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$.

需要指出的是，并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 u 的值域 $[2,+\infty)$ 中没有值落在 y 的定义域 $[-1,1]$ 中.

复合函数的中间变量可以是多于一个的. 例如，$y=f(u), u=\varphi(v), v=\psi(x)$，可以复合成复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$. u 与 v 都是中间变量. 又如，$y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=2x+3$ 复合而成的复合函数为 $y=\sqrt{\ln(2x+3)}, x>-1$，u, v 是中间变量.

有时需将一个较复杂的函数分解成几个简单的函数. 所谓简单函数是指基本初等函数及其四则运算构成的函数.

例 1.10　将下列函数分解成几个简单函数.

(1) $y=2^{\sin x}$；

(2) $y=\sqrt{2+\ln(a^x+3)}$；

(3) $y=\tan^5\sqrt[3]{\lg\arcsin x}$.

解　(1) $y=2^u, u=\sin x$；

(2) $y=\sqrt{u}, u=2+\ln v, v=a^x+3$；

(3) $y=u^5, u=\tan v, v=\sqrt[3]{w}, w=\lg t, t=\arcsin x$.

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算得到的函数称为**初等函数**. 例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$，$y=\dfrac{1+x+e^x}{\sqrt{1-x^2}}$，$y=e^{-x^2}+\dfrac{x}{\sin x}$ 都是初等函数.

六、双曲函数与反双曲函数

在工程技术中常常会遇到双曲函数，其定义为：

双曲正弦函数　$y=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

双曲余弦函数　$y=\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

双曲正切函数　$y=\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

利用 $y=\dfrac{1}{2}e^x$、$y=\dfrac{1}{2}e^{-x}$ 的图形，将纵坐标相减，即可得出 $y=\operatorname{sh}x$ 的图形，将纵坐标相加，即可得出 $y=\operatorname{ch}x$ 的图形（图 1.25）.