浙大数学优辅

数学之美

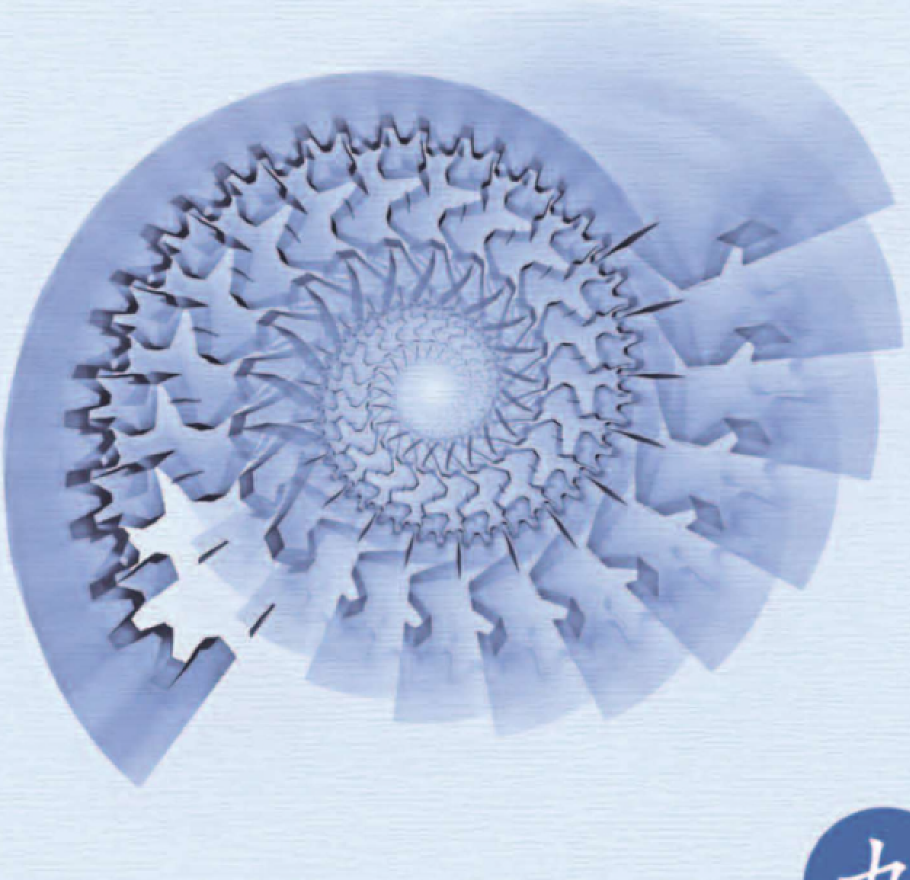
千万册畅销书作者最新力作

在广阔文化背景下同步培优

方法之美·思维之美·应用之美

# 带你发现数学之美

## 黄东坡智慧大讲堂



黄东坡◎著

九年级

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

# 黄东坡智慧大讲堂

## 带你发现数学之美

九年级

黄东坡 著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

黄东坡智慧大讲堂：带你发现数学之美. 九年级/黄东坡著. —杭州：浙江大学出版社，2017.3

ISBN 978-7-308-16528-0

Ⅰ.①黄… Ⅱ.①黄… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 318340 号

**黄东坡智慧大讲堂：带你发现数学之美　九年级**

黄东坡　著

---

**责任编辑**　夏晓冬
**责任校对**　董　文
**封面设计**　林智广告
**出版发行**　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
**排　　版**　杭州林智广告有限公司
**印　　刷**　杭州杭新印务有限公司
**开　　本**　787mm×1092mm　1/16
**印　　张**　15.5
**字　　数**　321 千
**版 印 次**　2017 年 3 月第 1 版　2017 年 3 月第 1 次印刷
**书　　号**　ISBN 978-7-308-16528-0
**定　　价**　52.00 元

---




浙江大学出版社发行中心邮购电话：（0571）88925591；http://zjdxcbs.tmall.com

# 启迪与智慧,数学之美的激发

## 一

2013年9月,十多万网友参加新浪网的一项调查,有70%网友坦言:“在求学期间,曾经被数学伤害过。”

没有哪门学科如数学这样,能引发学习者爱与恨的火热情感。

抽象的符号,繁难的计算,枯燥的推理;浩瀚的题海,重复的训练,八股化的考试,数学正日益被“妖魔化”,从而导致许多人对这门学科总体上的逃避。

简洁的语言,精巧的构造,严谨的结构;代数的优雅,几何的神韵,清澈的理性,无数数学大师、科学巨匠因数学之美的牵引,而热爱数学赞美数学。

著名物理学家狄拉克曾说:“上帝创造世界时用了美的数学。”

哲学家、数学家罗素已言:“数学,如果正确地看它,不但拥有真理,而且具有至高的美。”

## 二

数学之美突出地表现为:方法之美、思维之美、应用之美。

数学思想方法是数学知识的高度概括,对数学知识有巨大的凝聚作用,是联系知识的纽带,是实现由知识到能力的桥梁.数学发展的历史始终贯穿着两条主线:数学知识的发展和思想方法的创新。

思维,人类智慧之花最美的花朵。

数学是思维的学科,是锻炼思维的体操.数学存在与发展依据思维,而精湛的思维艺术又常借助数学彰显力量,数学在训练人的思维深度、广度、完整度方面无与伦比,数学能使人们的思维综合为一种科学系统。

数学具有广泛的应用性,数学正昂首阔步地挺进、渗透一切领域。

哥白尼的日心说、牛顿的万有引力定律、爱因斯坦的相对论、无线电波的

发现、DNA 双螺旋结构的打开;图像压缩、信息加密、CT 扫描、谷歌大海捞针、人工智能、云计算、大数据,人类历史上每一项重大事件的背后都看得见数学的身影。

## 三

大美不言,大音无声。

著名画家吴冠中说:“今天的中国文盲不多了,但美盲却很多。”

我们不缺少应试的技巧与高分,但缺乏以美启真的引领,缺少对“美是真理的光辉”的感悟。

与学习同步,与知识能力的发展同步,本书力求在广阔的数学文化背景中,展现数学之美,带你发现数学之美。

清风出袖,明月入怀。

如醉如痴,令人流连学习和探索的数学之路有别样的美景。

愿你在学习中能感受体悟到数学的和谐与秩序、美妙与美好、哲理与诗意.

愿数学之美能带给你启迪与智慧。

黄东坡

2017 年元月于武汉

# 在多彩的世界深情地抒写

在这个春光灿烂和风吹拂的下午,我们十几个黄东坡的铁杆粉丝聚在黄东坡的身边,一起翻阅他正在做校正的《带你发现数学之美》书稿,厚厚的书稿用智慧铺底,字字凝聚着心血,笔笔渗透了对数学文化充满激情的热爱,大家在发自内心的认同和敬佩中一起举杯庆祝黄东坡在著书立说、数学教学及羽毛球运动中齐头并进取得的成就,气氛热烈而欢乐,黄东坡在大家的心里,不只是朋友,已然变成一个偶像,伟岸地挺立着。

十几年来,目睹黄东坡前行的每一步,从"云中漫步"开始,到"绿杨芳草数学路",再写"心行山川,笔耕沃野",我用文字描述我眼睛看见的黄东坡,但是现在我发现,我的文字已经无法描述这位在中国数学教育中占有重要地位的偶像,虽然他每次见到我们仍然满满地铺张着他那乐呵呵的招牌式笑容,激情飞扬地用最美的文字描述在他眼里万千色彩瑰丽奇美的数学,总是"未出庭院三五步,额头已到数学前",每句话都在尽情表达他发自内心对数学的热爱,这种热爱的深刻已经不是我的文字能描摹的了。

黄东坡在他的数学文化的传播中,把理想与现实,数学与跨学科,理论与课堂结合得相得益彰,开创了一个数学传播的新时代,完美表达数学世界的人文关怀.走进黄东坡的数学世界,就能感受到黄东坡在广阔的文化背景下,用肆意挥洒的文字展现的是数学思维之美、方法之美、应用之美,他用这些"举手可近月,前行若无山"的文字带领读者上通数学,下达课堂,把艰涩高冷的数学变成了孩子们的热爱.他的生命因数学而变得有意义,因着数学,他的内心深处始终春暖花开,始终豪情万丈,始终笑容满面;而数学也因为他成为更多孩子的热爱,启迪了更多孩子的心灵.我发现,我和偶像之间,隔着一块厚重的带着密码的门,即使给我钥匙,我也尚未找到开启的密码,但是这不影响我对偶像的敬重和崇

拜,我敬重梵高开启了用画笔表达奔放的感情的时代,我也敬重黄东坡深情地抒写出更容易让孩子们热爱的数学文化。

莫愁前路无知己,天下谁人不识君!

我们期待黄东坡老师赋予深情的更多更好的作品能够来到大家的面前。

魏　红

2017 年于北京

# 目录

CONTENTS

# 1 出乎其外

## 数学文化巡礼

一部代数史就是研究方程、讨论方程的历史.

一元二次方程有求根公式,一般的一元三次方程、一元四次方程等高次方程是否也有类似的求根公式?

1535 年,意大利数学家塔塔利亚最早给出了三次方程的一般解法,不久费拉里又解决了四次方程,解法发表在《大术》中.

方程的可解性,就是这些方程的解可通过方程的系数,经过加、减、乘、除、乘方及开方等运算得出,这种根的表示称为根式解或代数解.

随着三次、四次方程陆续解出,人们把目光落在五次方程的求根公式上,然而近 300 年的探索一无所获.阿贝尔证明了一般五次方程不存在求根公式,解决了这个世纪难题.

多元表征,从不同角度认识问题,是灵活解决问题的基础.

同样,对于 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有下列多种认识方式:

(1)由求根公式可得 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac\geqslant 0)$;

(2)$ax^2+bx=-c$;

(3)$ax^2=-bx-c$;

(4)$ax+\dfrac{c}{x}=-b$.

其中(2)、(3)体现了“降次”代换的思想,(4)则是构造倒数关系,作等值代换.

有些复杂的方程却有简单的根的表达式;有些表面是方程的问题,却需要从等式变形的角度去思考.

正如清末著名学者王国维在《人间词话》中说:“诗人对宇宙人生,须入乎其

内,又须出乎其外,入乎其内,故能写之;出乎其外,故能观之.入乎其内,故有生气;出乎其外,故有高致.”

阿贝尔(1802—1829),挪威数学家.

阿贝尔被视为挪威民族英雄,挪威皇宫内有一尊他的雕像,这是一个大无畏的青年形象,他的脚下踩着两个怪物——分别代表五次方程和椭圆函数.

历史不会忘记这位杰出的数学家,为了纪念阿贝尔诞辰200周年,挪威政府于2002年创立了一项数学奖——阿贝尔奖.

## 数学智慧讲堂

**例1** 已知$a$,$b$是方程$x^2-x-3=0$的两个根,求代数式$2a^3+b^2+3a^2-11a-b+5$的值.

(扬州市中考题)

**分析与解** 若求出$a$,$b$的值代入,则计算复杂.从等式的角度认识方程,利用根的意义,变形降次.

$\because$ $a$、$b$是方程$x^2-x-3=0$的两个根,

$\therefore$ $a^2-a-3=0$,$b^2-b-3=0$.

得$a^2=a+3$,$a^3=a^2+3a=a+3+3a=4a+3$,$b^2=b+3$.

原式$=2(4a+3)+b+3+3(a+3)-11a-b+5$

$=8a+6+3+3a+9-11a+5$

$=23$.

**例2** 研究速算:

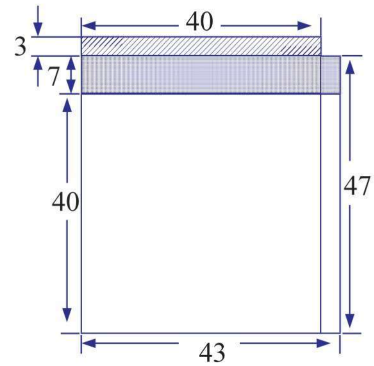
提出问题:$47\times43$,$56\times54$,$79\times71$,…是一些十位数字相同,且个位数字之和是10的两个两位数相乘的算式,是否可以找到一种速算方法?

**几何建模**

用矩形的面积表示两个正数的乘积,以$47\times43$为例:

(1)画长为 47、宽为 43 的矩形,如图①,将这个 $47 \times 43$ 的矩形从右边切下长 40、宽 3 的一条,拼接到原矩形的上面.

(2)分析:原矩形面积可以有两种不同的表达方式,$47 \times 43$ 的矩形面积,或$(40+7+3) \times 40$ 的矩形与右上角 $3 \times 7$ 的矩形面积之和. 即 $47 \times 43=(40+10) \times 40+3 \times 7=5 \times 4 \times 100+3 \times 7=2021$. 用文字表述 $47 \times 43$ 的速算方法是:十位数字 4 加 1 的和与 4 相乘,再乘以 100,加上个位数字 3 与 7 的积,构成运算结果.



图①

归纳提炼:两个十位数字相同,并且个位数字之和是 10 的两位数相乘的速算方法是(用文字表述):十位数字加 1 的和与十位数字相乘,再乘以 100,加上两个个位数字的积,构成运算结果.

提出问题:怎样图解一元二次方程 $x^2+2x-35=0(x>0)$?

**几何建模:**

(1)变形为 $x(x+2)=35$;

(2)画四个长为$(x+2)$、宽为 $x$ 的矩形,并构造图形,如图②;

(3)由面积法求解.

$\because S_{\text{大正方形}}=(x+x+2)^2$,

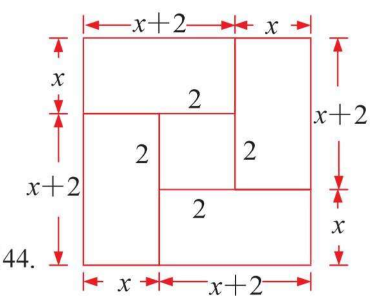
又 $S_{\text{大正方形}}=4x(x+2)+2^2$,

$\therefore (x+x+2)^2=4x(x+2)+2^2$.

而 $x(x+2)=35$,

$\therefore (2x+2)^2=4x(x+2)+2^2=4 \times 35+4=144$.

$\because x>0, \therefore x=5$.



图②

提出问题:求关于 $x$ 的一元二次方程 $x(x+b)=c(x>0, b>0, c>0)$的解.

要求参照上述研究方法,画出示意图,并写出几何建模的步骤.(用钢笔或圆珠笔画图,并标注相关线段的长)

(青岛市中考题)

分析与解　转换思维，通过构图研究速算，研究方程.

**几何建模**

画四个长为$(x+b)$、宽为$x$的矩形，如图③.

则图中的大正方形的面积可以有两种不同的表达方式：$(x+x+b)^2$或四个长为$(x+b)$、宽为$x$的矩形面积之和，再加上中间的边长为$b$的小正方形的面积.

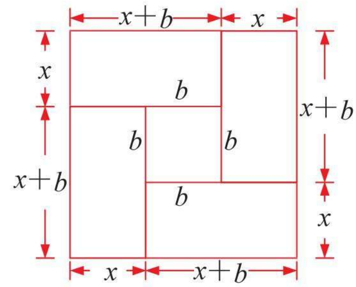
即$(x+x+b)^2=4x(x+b)+b^2$.

$\because x(x+b)=c$，

$\therefore (x+x+b)^2=4c+b^2$，

$\therefore (2x+b)^2=4c+b^2$.

$\because x>0$，$\therefore x=\dfrac{\sqrt{4c+b^2}-b}{2}$.




图③

配方法、因式分解法、公式法是解一元二次方程的常用方法，有些一元二次方程可以通过图解法来解，形象而直观.

几何直观主要是指利用图形描述来分析问题，是在直观感知的基础上所形成的理性思考的结果，是学习者对数学对象的几何属性的整体把握和有效判断的能力.

**例3　回归出发点**

在解决数学问题时，我们经常要回到基本定义与基本方法思考. 试利用方程的解的定义及解方程组的基本方法解决以下问题：

已知$a$是关于$x$的方程$x^2-(2k+1)x+4=0$及$3x^2-(6k-1)x+8=0$的公共解，则$a=$______，$k=$______.

（《时代学习报》数学文化节试题）

分析与解　解公共根问题的基本策略是：当方程的根有简单形式表示时，利用公共根相等求解；当方程的根不便于求出时，可设出公共根，设而不求，通过消去二次项寻找解题突破口.

由题意得$\begin{cases} a^2-(2k+1)a+4=0 & ①, \\ 3a^2-(6k-1)a+8=0 & ②, \end{cases}$

由①×3－②得$a=1$.

把$a=1$代入①得$k=2$.

解题方法是数学的灵魂，一个有价值的问题的解决常经历以下心路历程：冥思苦想、茅塞顿开、悠然心会、心境澄明.

正如王国维在《人间词话》中所说："古今之成大事业、大学问者，必经过三种之境界：

'昨夜西风凋碧树，独上高楼，望尽天涯路.'此第一境也；

'衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴.'此第二境也；

'众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处.'此第三境也."

问题的解决不也如同上述情境吗？假若你在学习数学的过程中也常历经这样的心境，那么你一定能理解好数学，掌握好数学.

## 数学之美探寻

1. 设 $x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - x - 2013 = 0$ 的两个实数根，则 $x_1^3 + 2014x_2 - 2013 =$ __________.

2. 设方程 $(x-a)(x-b)-x=0$ 的两根为 $c, d$，则方程 $(x-c)(x-d)+x=0$ 的根为(　　)

A. $a, b$　　B. $-a, -b$　　C. $c, d$　　D. $-c, -d$

（黄石市中考题）

3. (1)怎样用矩形面积表示 $(y+3)(y+2)$ 与 $2y+5$ 的大小关系?(其中 $y>0$)

(2)当 $a>2, b>2$ 时，用图表示 $ab$ 与 $a+b$ 的大小关系.(要求：参照例 2 的研究方法，画出示意图，并写出几何建模步骤，并标注相关线段的长)

4. 若关于 $x$ 的方程 $x^2+kx-12=0$ 与方程 $3x^2-8x-3k=0$ 有一个公共根，求实数 $k$ 的所有可能的值.

（四川省竞赛题）

## 参考答案

1. 2014.

2. A.

由$(x-a)(x-b)-x=(x-c)(x-d)=0$得

$(x-c)(x-d)+x=(x-a)(x-b)=0$.

3. 几何建模：

(1)画长为$(y+3)$、宽为$(y+2)$的矩形，按图①的方式分割；

(2)变形$2y+5=(y+3)+(y+2)$；

(3)分析：图①中大矩形的面积可以表示为$(y+3)(y+2)$；

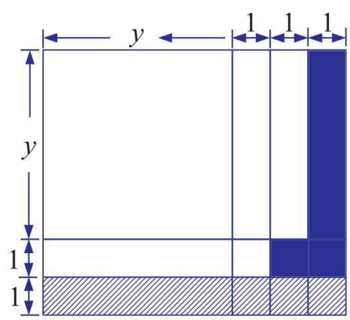
斜线部分的面积可以表示为$(y+3)\times 1$，

填色部分的面积可以表示为$(y+2)\times 1$.

由图形的部分与整体的关系可知：

$(y+3)(y+2)>(y+3)+(y+2)$，

即$(y+3)(y+2)>2y+5$.




图①

(2)根据题意，设$a=2+m$，$b=2+n(m>0, n>0)$.

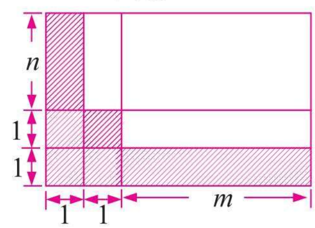
(i)画长为$(2+m)$、宽为$(2+n)$的矩形，并按图②的方式分割.

(ii)变形为$a+b=(2+m)+(2+n)$.

(iii)分析：图中大矩形的面积可以表示为$(2+m)(2+n)$，阴影部分的面积可以表示为$(2+m)+(2+n)$.

由图形的部分与整体的关系可知：

$(2+m)(2+n)>(2+m)+(2+n)$，即$ab>a+b$.




图②

4. 设$x=x_0$为两个方程的公共根，

则$\begin{cases} x_0^2+kx_0-12=0 & ①, \\ 3x_0^2-8x_0-3k=0 & ②, \end{cases}$

由①$\times 3-$②得$x_0=\dfrac{36-3k}{3k+8}$，代入①并化简得

$9k^3+15k^2+504k-528=0$，

即$(k-1)(9k^2+24k+528)=0$，但$9k^2+24k+528>0$，

故$k=1$.

# 2 配方

## 数学文化巡礼

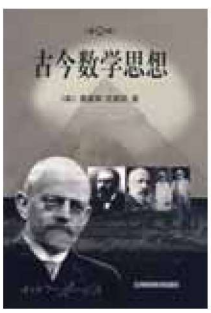
英国数学家理查德·盖伊曾说:“埃尔德什在数学研究上做出了巨大贡献,但我认为他更大的贡献在于他造就了大量的数学天才.”

1959 年,埃尔德什与一个掌握了全部中学课程的名叫拉乔斯·波萨的 12 岁男孩见面,他向波萨提出一个自己 18 岁时的发现,在不大于 $2n$ 的 $n+1$ 个正整数中必有两数互质,让他感到震惊的是,波萨在把汤喝完后就宣布了其巧妙证明:通过配对组合,运用抽屉原理.

把一个式子或一个式子的部分改写成完全平方式或者几个完全平方式的和的形式,这种解题方法叫配方法.

配方法的作用在于提示式子的非负性,是挖掘隐含条件的有力工具;配方法的实质在于改变式子的原有结构,是变形求解的一种手段.

埃尔德什(1913—1996),匈牙利数学家,20 世纪数坛怪侠.埃尔德什以论文多、旅行远而蜚声数学界.人们称他为“数学界的莫扎特”“西方的拉马努金”“布达佩斯的魔术师”.




《古今数学思想》是美国著名数学家M. 克莱因的一部介绍从古代直至 20 世纪初重大数学创造和发展的著作,该书精辟阐述了主要数学分支的创立历程和重大创新,数学思想的产生和发展,是启迪数学家想象力和灵感的思想宝库.

## 数学智慧讲堂

**例 1** 若$\triangle ABC$的三条边长$a,b,c$满足$b+c=10$，$bc=a^2-12a+61$，则$\triangle ABC$的周长为__________.

（“希望杯”邀请赛试题）

**分析与解** 代入消元配方或构造方程求出$a,b,c$的值.

由条件得$b=10-c$，代入另一等式得$(10-c)c=a^2-12a+61$，

整理得$a^2-12a+c^2-10c+61=0$，

配方得$(a-6)^2+(c-5)^2=0$.

$\therefore a-6=0, c-5=0$，得$a=6, c=5$，从而$b=5$.

$\therefore \triangle ABC$的周长为16.

配方法的主要依据是乘法公式，与配方法相关的常见公式有以下几种：

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$；

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$；

$a^2+b^2+c^2\pm ab\pm bc\pm ca=\frac{1}{2}[(a\pm b)^2+(b\pm c)^2+(c\pm a)^2]$；

$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

**例 2** 已知实数$a,b,c$满足$a^2+b^2-4a\leqslant 1$，$b^2+c^2-8b\leqslant -3$，且$c^2+a^2-12c\leqslant -26$，则$(a+b)^c$的值为（　　）

A. 1　　B. 8　　C. 9　　D. 27

（四川省竞赛题）

**分析与解** 不等式可解吗？整理叠加，通过配方由不等导出相等.

由条件得$(a^2+b^2-4a)+(b^2+c^2-8b)+(c^2+a^2-12c)\leqslant -28$，

即$a^2-2a+b^2-4b+c^2-6c+14\leqslant 0$，

配方得$(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2\leqslant 0$.

而$(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2\geqslant 0$，

$\therefore (a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2=0$，得$a=1, b=2, c=3$，从而$(a+b)^c=27$.

故选 D.