

编著：张志伟

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{\nu} - \alpha_n\right)$$

奥秘神奇的

# 数学王国

山西出版传媒集团  
山西经济出版社

本书介绍了数学的相关知识，分“数学科学发现”“数学科学应用”“数学学科猜想”三个篇章，通过对数学的起源发展、数学公式定理的介绍、数学在生活中的应用以及未来数学的相关猜想等内容的详细描述，向青少年读者系统地介绍数学知识，使之与课本知识融会贯通，为其更好地学习和掌握枯燥抽象的数学知识提供有益的帮助。全书图文并茂、通俗易懂，并以简洁、鲜明、风趣的标题引发青少年的阅读兴趣。

数学作为人类思维的表达形式，反映了人们积极进取的意志、缜密周详的逻辑推理及对完美境界的追求。它的逻辑和直观、分析和推理、共性和个性，这些互相对立的力量相互作用又综合努力，才构成了数学科学的生命力、可用性和它的崇高价值。

数学源自古希腊语，是研究数量、结构、变化以及空间模型等概念的一门科学。通过抽象思维和逻辑推理，在计数、计算、量度和对物体形状及运动的观察中产生。自从人类出现在地球上那天起，人们便在认识世界、改造世界的同时对数学有了逐渐深刻的了解。



责任编辑：曹恒轩

装帧设计：蔚蓝风行



山西经济出版社

ISBN 978-7-5577-0127-7



9 787557 701277 >

定价：29.80元

图书在版编目(CIP)数据

奥秘神奇的数学王国 / 张志伟编著. — 太原 : 山西经济出版社, 2017.1  
ISBN 978-7-5577-0127-7

I. ①奥… II. ①张… III. ①数学—青少年读物  
IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字 (2017) 第006288号

奥秘神奇的数学王国

AOMISHENQI DE SHUXUEWANGGUO

---

编 著: 张志伟

出版策划: 吕应征

责任编辑: 曹恒轩

装帧设计: 蔚蓝风行

---

出 版 者: 山西出版传媒集团·山西经济出版社

社 址: 太原市建设南路 21 号

邮 编: 030012

电 话: 0351-4922133 (发行中心)

0351-4922085 (总编室)

E-mail: [scb@sxjjcb.com](mailto:scb@sxjjcb.com) (市场部)

[zbs@sxjjcb.com](mailto:zbs@sxjjcb.com) (总编室)

网 址: [www.sxjjcb.com](http://www.sxjjcb.com)

---

经 销 者: 山西出版传媒集团·山西经济出版社

承 印 者: 北京荣华世纪印刷有限公司

---

开 本: 787mm × 1092mm 1/16

印 张: 10

字 数: 150 千字

版 次: 2017 年 1 月 第 1 版

印 次: 2017 年 1 月 第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5577-0127-7

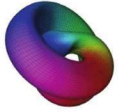
定 价: 29.80 元

---



## 科普总动员





数学源自生活,生活蕴藏智慧。让我们一起来探索奥秘神奇的数学王国吧!



# 前言

## ■ 奥秘神奇的数学王国

辽阔无垠的山川大地,苍茫无际的宇宙星空,人类生活在一个充满神奇变化的大千世界中。异彩纷呈的自然科学现象,古往今来曾引发无数人的惊诧和探索,它们不仅是科学家研究的课题,更是青少年渴望了解的知识。通过了解这些知识,可以开阔视野,激发探索自然科学的兴趣。

本书介绍了数学的相关知识,分“数学科学发现”“数学科学应用”“数学学科猜想”三个篇章,通过对数学的起源发展、数学公式定理的介绍、数学在生活中的应用以及未来数学的相关猜想等内容的详细描述,向青少年读者系统地介绍数学知识,使之与课本知识融会贯通,为其更好地学习和掌握枯燥抽象的数学知识提供有益的帮助。全书图文并茂、通俗易懂,并以简洁、鲜明、风趣的标题引发青少年的阅读兴趣。

数学源自于古希腊语,是研究数量、结构、变化以及空间模型等概念的一门科学。通过抽象思维和逻辑推理的使用,在计数、计算、量度和对物体形状及运动的观察中产生。自从人类出现在地球上那天起,人们便在认识世界、改造世界的同时对数学有了逐渐深刻的了解。早在远古时代,古人就有了数量的概念并有“涉猎计数”与“结绳记事”等种种传说。数量的观念发展起来后,简单的计数方法渐渐不能满足生活的需要,人们便尝试把数以符号的形式记录下来,从而具有了“识数”的才能,位置制记数法、印度—阿拉伯数字系统、中国的算筹记数系统等记数方法逐渐产生。随着人类社会的进步,数的语言也不断发展,向量、矩阵、群、域、函数等概念不断涌现,代数、解析几何、微积分等数学学科分支出现,这一系列的发现以及还在不断发现中的学科内容使数学不断趋于完善。数学的发展还不单是内容上的增加,更重要的是新思想、新观点、新方法的出现。如非欧几何、群论带给数学的远不只是新的内容,而是新思想、新观点的引入,它们对数学发展的推动力无可估量。

数学的发展并未只向广度伸展,同时它还向深度开掘。关于数学学术方面的猜想与假设不断涌现,日益引发数学家们的研究兴趣,包括庞加莱猜想、黎曼猜想、四色猜想、哥德巴赫猜想、费马数猜想、角谷猜想、孪生素数猜想、卡迈克猜想、莱默猜想、欧拉猜想、回归数猜想等,这些猜想有的被验证为正确的,并成为定理;有的被验证为错误的;还有一些正在验证过程中。这些猜想是创造数学思想方法的重要途径,是推动数学理论发展的强大动力,它们强烈地吸引数学家全身心投入,积极开展相关研究,从而推动数学发展。数学猜想一旦被证实,就转化为定理,汇入数学理论体系之中,从而丰富数学理论。

数学家华罗庚曾经说过:宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,日用之繁,无处不用数学。这是对数学与生活关系的精彩描述。如今,数学知识和数学思想在工农业生产和人们日常生活中都有极其广泛的应用。譬如,利用算术及统计学知识去银行办理储蓄业务、查收水电费用;利用平面几何的有关知识设计折扇、推拉式自动伸缩门或者运动场跑道直道与弯道的平滑连接;以及利用黄金分割制造兵器、工艺品,平衡膳食结构;利用斐波那契数列研究植物的进化等,都是数学知识在生活中不可缺少的应用。

数学作为人类思维的表达形式,反映了人们积极进取的意志、缜密周详的逻辑推理及对完美境界的追求。它的逻辑和直观、分析和推理、共性和个性,这些互相对立的力量相互作用又综合努力,才构成了数学科学的生命力、可用性和它的崇高价值。



# 目录

## ■ 奥秘神奇的数学王国

### 第 1 章 数学科学发现

数的起源	2
数系家族成员的壮大	5
阿拉伯数字的诞生	9
最小的自然数和一位数	12
复数的神秘面纱	15
梅森素数	18
代数与代数学	22
函数的发展历程	26
起源于赌博的概率论	29
微积分的发展历程	34
解析几何的诞生	39
六十进制制	42
勾股定理	45
圆周率的发现旅程	47
奇怪的麦比乌斯圈	51
出入相补原理的证明	55
不可思议的非欧几何	58
拓扑学的由来	62
希尔伯特问题	66

### 第 2 章 数学科学应用

黄金分割的妙用	72
---------	----

不同国家的时间划分	76
神奇的斐波那契数列	80
柯克曼女生问题探秘	83
达·芬奇作品中的神秘数学	86
改变世界的十个数学公式	90
玻璃杯问题与蜂窝猜想	95

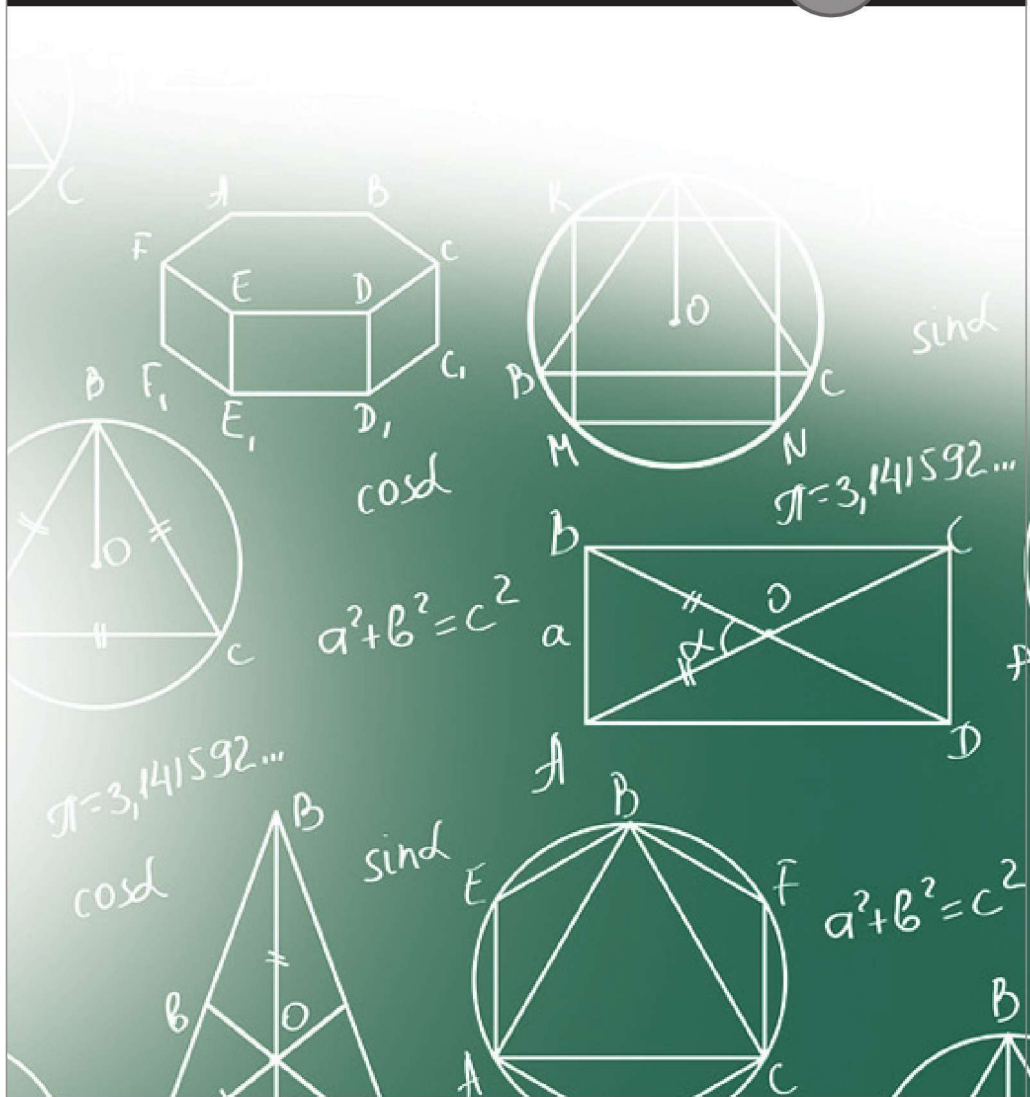
### 第 3 章 数学学科猜想

庞加莱猜想	100
黎曼猜想	104
四色猜想	107
哥德巴赫猜想	112
费马数猜想	116
角谷猜想	120
孪生素数猜想	124
卡迈克猜想	129
莱默猜想	132
欧拉猜想	135
回归数猜想	138
模糊数学	143
信息时代的组合数学	147

# 数学科学发现

□ 奥秘神奇的数学王国

第 **1** 章



# 数的起源

**科普档案** ●学术名称:数觉 ●定义:觉察数之有无与数之多少的能力 ●产生时间:远古时代

在漫长的生活实践中,由于记事和分配生活用品等方面的需要,古人渐渐产生了数量的概念。但这种方法简单却渐渐不能满足生活的需要,文字出现以后,人们便尝试把数以符号的形式记录下来。

人类究竟在何时和怎样才产生出数的概念的?数的产生,是从离我们极其遥远的人类远古时期开始的。

远古时代,人类并没有数的概念。随着人类的进化,人类发达的大脑对客观世界开始有了理性和抽象的认识,对数也有了朦胧意识和“有”“无”“多”“少”的概念。比如在增添或者去掉东西时,人能够觉察到其中有所变化,会意识到是“多了”或是“少了”。这种觉察数之有无与数之多少的能力,被数学史家称为“数觉”。可以相信,早在进化的蒙昧时期,人类就已经具有这种才能了。

在漫长的生活实践中,由于记事和分配生活用品等方面的需要,古人渐渐产生了数量的概念。他们学会了在捕获一头野兽后用一块石子、一根木头来代表;或者用在绳子上打结代表一头大兽,一个小结代表一头小兽,等等,这就是人们常说的“结绳记事”,也是地球上许多相隔很近的古代人类共同做过的事。我国古书《易经》中有“结绳而治”的记载。传说古代波斯王打仗时也常用绳子打结来



□古埃及关于数的壁画

□数字

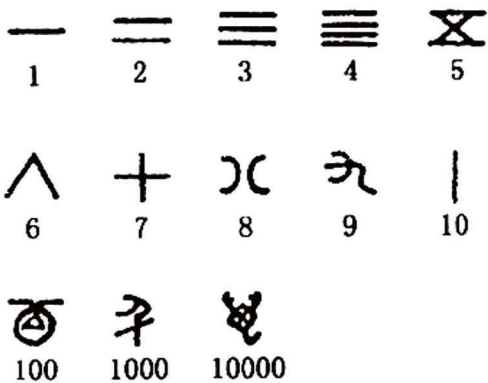
计算天数。用利器在树皮上或兽皮上刻痕，或用小棍摆在地上计数，这些都是古人常用的办法。

数量的观念逐渐发展起来，随着捕获手段的提高，所获的野兽越多，绳子的结也越多，需要的数目越大。这种方法简单却渐渐不能满足生活的需要，文字出现以后，人们便尝试把数以符号的形式记录下来。

数的概念最初不论在哪个地区都是从1、2、3、4……这样的自然数开始的，但是记数的符号却各不相同。

古罗马的数字相当进步，现在许多老式挂钟上还常常使用。实际上，罗马数字的符号一共只有7个：I(代表1)、V(代表5)、X(代表10)、L(代表50)、C(代表100)、D(代表500)、M(代表1000)。这7个符号位置上不论怎样变化，它所代表的数字都是不变的。它们按照下列规律组合起来，就能表示任何数：重复次数，一个罗马数字符号重复几次，就表示这个数的几倍，如，“III”表示“3”、“XXX”表示“30”；右加左减，一个代表大数字的符号右边附一个代表小数字的符号，就表示大数字加小数字，如“VI”表示“6”、“DC”表示“600”，一个代表大数字的符号左边附一个代表小数字的符号，就表示大数字减去小数字的数目，如“IV”表示“4”、“XL”表示“40”、“VD”表示“495”；上加横线，在罗马数字上加一横线，表示这个数字的一千倍。

我国古代也很重视记数符号，最古老的甲骨文和钟鼎中都有记数的符号，不过难写难认，后人没有沿用。到春秋战国时期，生产迅速发展，适应这一需要，我们的祖先创造了一种十分重要的计算方法——筹算。筹算用的算筹是竹制的小棍，也有骨制的。按规定的横竖长短顺序摆好，就可用来记数和进行运算。随着筹算的普及，算筹的摆法也就成为记数的符号了。算筹摆法有横纵两式，都能表示同样的数字。





从算筹数码中没有“10”这个数可以清楚地看出,筹算从一开始就严格遵循十进制。9位以上的数就要进一位。同一个数字放在百位上就是几百,放在万位上就是几万。这样的算法在当时是很先进的。因为在世界的其他地方真正使用十进制时已到了公元6世纪末。但筹算数码中开始没有“零”,遇到零就空位。数字中没有零,是很容易发生错误的。所以后来有人把铜钱摆在空位上,以免弄错。直到公元6世纪,印度人最早用黑点“·”表示零,后来逐渐变成了“0”。而在我国古代文字中,“零”字出现很早,不过那时它不表示空无所有,而只表示“零碎”、“不多”的意思。如“零头”、“零星”、“零丁”。“一百零五”的意思是在一百之外,还有一个零头五。随着阿拉伯数字的引进,“105”恰恰读作“一百零五”,“零”字与“0”恰好对应,“零”也就具有了“0”的含义。

除了十进制以外,在数学萌芽的早期,还出现过五进制、二进制、三进制、七进制、八进制、十进制、十六进制、二十进制、六十进制等多种数字进制法。在长期实际生活的应用中,十进制最终占了上风。

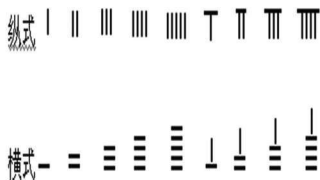
现在世界通用的数码1、2、3、4、5、6、7、8、9、0,人们称之为阿拉伯数字。实际上它们是古代印度人最早使用的。后来阿拉伯人把古希腊的数学融进了自己的数学中去,又把这一简便易写的十进制位值记数法传遍了欧洲,逐渐演变成今天的阿拉伯数字。

数的概念、数码的写法和十进制的形成都是人类长期实践的结果。

### 知识链接

## 筹算

筹算是中国古代使用算筹进行计算的方法。据典籍记录和考古发现,战国初年筹算已出现。它使用中国商代发明的十进制制计数,可以很方便地进行四则运算以及乘方、开方等较复杂运算,并可以对零、负数和分数做出表示与计算。从战国时期一直到明朝被珠算取代之前,筹算不但是中国古代进行日常计算的方法,更是中国古代数学家研究数学时常用的计算器具,是中国古代各种重要数学发明的基础,开创了中国古代以计算为中心的数学体系,区别于古希腊以逻辑推理为中心的数学体系。



# 数系家族成员的壮大

**科普档案** ●学术名称:数系 ●发现学者:阿基米德 ●分类:简单分群数系、有理数系等

回顾数系的历史发展,数系的扩张是在旧的数系之外去构造一个新的代数系,它包含一个与旧代数系同构的子集,这种同构必然保持新旧代数系之间具有完全相同的代数构造。

数,是数学中的基本概念,也是人类文明的重要组成部分。数的概念的每一次扩充都标志着数学的巨大飞跃。一个时代的人们对于数的认识与应用,以及数系理论的完善程度,反映了当时数学发展的水平。今天,我们所应用的数系,已经构造得十分完备和缜密,以至于在科学技术和社会生活的一切领域中,它都成为基本的语言和不可或缺的工具。

人类在进化的蒙昧时期,就具有了一种“识数”的才能,并发明了种种记数方法。随着人类社会的进步,数的语言也在不断发展和完善。数系发展的第一个里程碑出现了——位置制记数法。所谓位置制记数法,就是运用少量的符号,通过它们不同个数的排列,以表示不同的数。引起历史学家、数学史家兴趣的是,在自然环境和社会条件影响下,不同的文明创造了迥然不同的记数方法。如巴比伦的楔形数字系统、埃及象形数字系统、希腊人字母数字系统、玛雅数字系统、印度—阿拉伯数字系统和中国的算筹记数系统。

“0”作为记数法中的空位,在位置制记数的文明中是不可缺少的。早期的巴比伦楔形文字和宋代以前的中国筹算记数法,都是留出空位而没有符号。印度人起初也是用空位表示零,后来记成点号“·”,最后发展为圈号。印度数码在公元8世纪传入阿拉伯国家。13世纪初,意大利的商人斐波那契编著《算经》,把包括零号在内完整的印度数码介绍到了欧洲。印度数码和





□ 见证数字历史的证据

10 进位位置制记数法被欧洲人普遍接受后,在欧洲的科学和文明的进步中扮演了重要的角色。

人类第一个认识的数系,就是常说的“自然数系”。但是,随着人类认识的发展,自然数系的缺陷也就逐渐显露出来。首先,自然数系是一个离散的、而不是稠密的数系,因此,作为量的表征,它只能限于去表示一个单位量的整数倍,而无法表示它的部分。同时,作为运算的手段,在自然数系中只能施行加法和乘法,而不能自由地施行它们的逆运算。这些缺陷,由于分数和负数的出现而得以弥补。有趣的是这些分数也都带有强烈的地域特征。巴比伦的分数是六十进位的,埃及采用的是单分数,阿拉伯的分数更加复杂:单分数、主分数和复合分数。这种繁复的分数表示必然导致分数运算方法的繁杂,所以欧洲分数理论长期停滞不前,直到 15 世纪以后才逐步形成现代的分数的算法。与之形成鲜明对照的是中国古代在分数理论上的卓越贡献。原始的分数概念来源于对量的分割。但是,《九章算术》中的分数是从除法运算引入的。中国古代分数理论的高明之处是它借助于“齐同术”把握住了分数算法的精髓:通分。而分数系是一个稠密的数系,它对于加、乘、除三种运算是封闭的。为了使得减法运算在数系内也通行无阻,负数的出现就是必然的了。盈余与不足、收入与支出、增加与减少是负数概念在生活中的实例。

负数虽然通过阿拉伯人的著作传到了欧洲,但 16 世纪和 17 世纪的大多数数学家并不承认它们是数,或者即使承认了也并不认为它们是方程的根。如丘凯和斯蒂费尔都把负数说成是荒谬的数,是“无稽之零下”。卡丹把负数作为方程的根,但认为它们是不可能的解,仅仅是一些记号;他把负根称作是虚有的。韦达完全不要负数,巴斯卡则认为从 0 减去 4 纯粹是胡说。

负数是人类第一次越过正数域的范围。在数系发展的历史进程中,现实经验有时不仅无用,反而会成为一种阻碍。

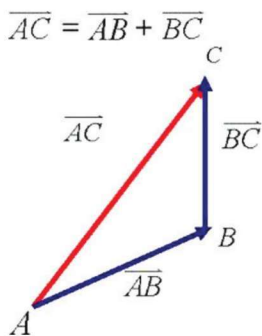
无理数的发现经历了一个漫长的过程。古希腊人把有理数视为是连续衔接的,然而,一条直线上的有理数尽管是“稠密”,但是它却露出了许多“孔隙”,而且这种“孔隙”多得“不可胜数”。15世纪,达·芬奇把它们称为“无理数”,开普勒称它们是“不可名状”的数。这些“无理”而又“不可名状”的数,虽然在后来的运算中渐渐被使用,但是它们究竟是不是实实在在的数,却一直是个困扰人的问题。中国古代数学在处理开方问题时,也不可避免地碰到无理根数。对于这种“开之不尽”的数,《九章算术》直截了当地“以面命之”予以接受,刘徽注释中的“求其微数”,实际上是用10进小数来无限逼近无理数。

17~18世纪微积分的发展几乎吸引了所有数学家的注意力,恰恰是人们对微积分基础的关注,使得实数域的连续性问题再次凸显出来。因为,微积分是建立在极限运算基础上的变量数学,而极限运算,需要一个封闭的数域。无理数正是实数域连续性的关键。法国数学家柯西给出了回答:无理数是有理数序列的极限。然而按照柯西的极限定义,所谓有理数序列的极限,指预先存在一个确定的数,使它与序列中各数的差值,当序列趋于无穷时,可以任意小。1872年,克莱因提出了著名的“埃尔朗根纲领”,维尔斯特拉斯给出了处处连续但处处不可微函数的著名例子。同时,实数的三大派理论:戴德金“分割”理论、康托的“基本序列”理论以及维尔斯特拉斯的“有界单调序列”理论在德国出现。实数的三大派理论本质上是对无理数给出严格定义,从而建立了完备的实数域。实数域的构造成功,使得两千多年来存在于算术与几何之间的鸿沟得以完全填平,无理数不再是“无理的数”了。

复数概念的进化与无理数的认可同时进行。1545年,此时的欧洲人尚未完全理解负数、无理数,然而他们又面临一个新的“怪物”的挑战,当时人们对复数充满怀疑。直到18世纪,数学家们发现,在数学的推理中间步骤中用了复数,结果都被证明是正确的。特别是1799年,高斯关于“代数基本

定理”的证明必须依赖对复数的承认,从而使复数的地位得到了进一步的巩固。1797年,挪威的韦塞尔写了一篇论文“关于方向的分析表示”,试图利用向量来表示复数,遗憾的是这篇文章的重大价值直到1897年译成法文后,才被人们重视。瑞士人阿甘达给出复数的一个稍微不同的几何解释,他注意到负数是正数的一个扩张,它是将方向和大小结合起来得出的。在澄清复数概念的工作中,爱尔兰数学家哈密尔顿是非常重要的。哈密尔顿所关心的是算术的逻辑,并不满足于几何直观。他指出:复数  $a+bi$  不是  $2+3$  意义上的一个真正的和,加号的使用是历史的偶然,而  $bi$  不能加到  $a$  上去。复数  $a+bi$  只不过是实数的有序数对  $(a,b)$ ,并给出了有序数对的四则运算,同时,这些运算满足结合律、交换率和分配率。在这样的观点下,复数被逻辑地建立在实数的基础上。

由于科学技术发展的需要,向量、张量、矩阵、群、环、域等概念不断产生,把数学研究推向新的高峰。到目前为止,数的家庭已发展得十分庞大。



### 知识链接

#### 向量

数学中,既有大小又有方向的量叫作向量,也称矢量。向量可以用有向线段来表示。有向线段的长度表示向量的大小,箭头所指的方向表示向量的方向。向量的大小,也就是向量的长度(或称模),向量  $a$  的模记作  $|a|$ 。向量的模是非负实数,可以比较大小。向量不能比较大小,对于向量来说“大于”和“小于”的概念是没有意义的。例如,“向量  $AB >$  向量  $CD$ ”是没有意义的。