刷百题不如解透一题

顾问：罗增儒 彭翕成
QQ 群“中国数学解题研究会”
A 股上市教育集团学大教育
教研精英联合编写

高中数学解题研究

第2辑

大题细做

齐建民◎主编
宫前长◎副主编

为什么 在疑问与探索中揭示解决一题的心路历程

怎么办 教会学生遇到解题障碍时“应该怎样想”

回头看 注重解题规律的提炼与数学思想的升华

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学解题研究

第 2 辑:大题细做

主　编:齐建民

副主编:宫前长

编　委:张培强　汪　飞　周　坤　杨　飞
陈清华　宫前长　林永强　齐建民
侯有岐　宋春龙　文贵双　梅　磊
王海刚　龙　宇　汪仁林　姚利娟
古积霞　许　丽　刘彦永　杨春波

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题研究. 第2辑,大题细做/齐建民主编.
—杭州:浙江大学出版社,2017.1
ISBN 978-7-308-16518-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①齐… Ⅲ.①中学数学课—高中—题
解—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 304589 号

高中数学解题研究 第2辑:大题细做
主编 齐建民

策　　划 陈海权(QQ:1010892859)
责任编辑 夏晓冬
责任校对 金佩雯 陈 宇
封面设计 杭州林智广告有限公司
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号 邮政编码310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷 浙江省邮电印刷股份有限公司
开　　本 889mm×1194mm 1/16
印　　张 4.25
字　　数 135千
版 印 次 2017年1月第1版 2017年1月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-16518-1
定　　价 9.80元

《高中数学解题研究》顾问题词

与解题研究的同行们共勉：

解题能力是数学教师的一个专业制高点，研究解题是专业攀登的一座发展里程碑。

成为解题专家不仅要自己知道"怎样解题"，而且能指导学生也"学会解题"。

谁也无法教会我们解所有的数学题，重要的是，通过有限道题的学习去领悟那种能解无限道题的数学素养。

数学上负数比零更小，解题中没有想法比想错了更糟。

数学上实数和虚数都是真实的数，奋斗中成功与失败都是生命的歌。

罗增儒

2016.7于西安

古之达人

推而通之

小中见大

一为千万

祝《小题大做》出版

俞成

2016.7.16

刷百题不如解透一题

（拾级而上）

首先特别感谢读者们对《第1辑：小题大做》的支持，销售的火爆程度令我们始料未及，有的读者从预订到收到书足足等了2个月。读者的热情与期待也让我们内心颇为忐忑，唯恐读者失望。幸好，从目前的反馈来看，读者对我们的书还是非常满意的，这也让我们更加坚定信心，大家的支持会让我们做得更好！

从《第1辑：小题大做》选题之初，我们就已决定第2辑叫《大题细做》，一方面是从名字上进行呼应，更重要的是，与“大做”一样，“细做”意味着本书将继续我们的解题教学理念，将我们对数学解题的思考进行到底，以书载道，让更多的学生受益！

此次我们从2014－2016三年的各省市高考题中筛选出15道解答题，主要是函数与导数、解析几何两个模块，这些题目基本都是处于试卷最后位置的两道题，毫无疑问称得上是“难题”。通过对这些“难题”的“细做”，我们希望将“难题”变为“典型题”，使其解法与思维策略具有迁移性。数学家笛卡尔说“我所解决的每一个问题都将成为一个范例，以用于解决其他问题”. 罗增儒教授在第1辑的题词中曾鼓励我们：“谁也无法教会我们解所有的数学题，重要的是，通过有限道题的学习去领悟那种能解无限道题的数学素养。以有限达无限是我们追求的目标！”

《第2辑：大题细做》的目标读者为基础较好的高中学生及教师，定位为教辅读物，写作特色为“拾级而上”，采取叙事性的语言，将解题过程娓娓道来，在疑问与探索中揭示一道题目解决的心路历程，文笔贴近学生，“细做”体现在：

(1) Why——为什么要这样解题？

对解题步骤进行合情、合理的说明，充分暴露思考的过程，教给学生遇到解题障碍时“应该怎样想”，努力说明每一个解题念头都是自然的、合理的；

(2)How——怎么解？

对解题步骤以“慢动作”呈现，尤其是关键步骤、学生容易“卡壳”的步骤，着力用笔展示思维过程、细节处理的技巧，让学生看得真真切切，并且几乎每道题目都展现了不同的解法，体现了不同的思维导向；

(3)Reflection——解后反思

注重解题规律的提炼与数学思想的升华，并对题目的背景与渊源进行挖掘，分析一题但不限于一题，每一篇文章都在示范如何做到“入宝山而不空返”，使读者在阅读后不仅知道“怎样解题”，还能“学会怎样解题”。

与《第 1 辑：小题大做》一样，本书依然由学大教育集团与 QQ 群“中国数学解题研究会”(群号 47224687)的诸位名师联袂完成，感谢学大教育郑州分公司、学大教育江苏分公司、学大教育深圳分公司高中数学教师团队的大力支持，感谢参与本书写作的 QQ 群友宫前长、梅磊、杨春波等老师，在本书写作过程中，共收到百余篇稿件，感谢所有投稿支持我们的朋友们！

特别感谢许永忠、蔡玉书、汪仁林、杨春波、郑良、蒋寿义等老师所做的审稿工作！

为了方便读者阅读，我们将在《高中数学解题研究》读者交流 QQ 群：281322406 中发布书中练习题的详解，欢迎加入与我们一起进行“高中数学解题研究”。高考前，我们将会出版《第 3 辑：数学文化高考专题》，以便让广大师生更好地应对“数学文化的考查”。

由于水平有限，时间仓促，难免会出现一些纰漏甚至错误，请读者批评指正。

齐建民

(学大教育郑州分公司教研总监)

Contents

目 录

问题虽小价值大,简化转化最优化 …………………………… 张培强/ 1

轨迹方程有妙法,今朝重现蒙日圆 ……………………………… 汪飞/ 5

动中有静蕴定值,参数遁形于关系 ……………………………… 周 坤/ 9

动态过程范围生,构造函数是关键 …………………………… 陈清华/13

理顺关系按图索骥,设参构造凸显通法 ……………………… 宫前长/17

椭圆中现相交弦,由此及彼趣旅程 …………………………… 齐建民/21

代数、几何方法多,一图引来知识串 …………………… 宋春龙 文贵双/24

一题一世界,反思境界升 ……………………………………… 杨 飞/28

常规方法遇阻,分而治之显奇 ……………………………… 梅 磊/31

变形有法放缩有度,因式分解显奇效 ……………………… 王海刚/35

改变结构柳暗花明,以图为据放缩有法 …………………… 龙 宇/38

函数数列相伴相生,积分思想高屋建瓴 ……………… 汪仁林 姚利娟/43

看似显然实不然,严谨推理定零点 ………………………… 许 丽/48

分离分类寻零点,对数平均爱偏移 ………………………… 刘彦永/52

隐形的零点,三步带你飞 …………………………………… 杨春波/57

问题虽小价值大，简化转化最优化

［江苏省徐州市第一中学　张培强］

阅读提示：

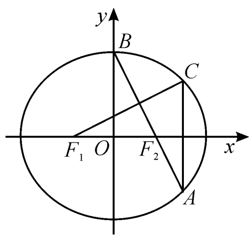
求圆锥曲线的离心率是一类很常见的问题，在各类考试中多以选填题形式出现，题目小巧但考查的内容可不少，从圆锥曲线的定义到三角函数、平面几何知识、计算能力等等，变化多端，不时让学生头疼，那么此类问题有没有通用的、一般性的解题策略呢？2014 年高考江苏卷数学第 17 题比较少见地在解答题中考查离心率的求解，可见本题价值之大，相信张培强老师的精彩分析一定能给你满意的回答！

试题呈现

例（2014 江苏 17）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，F_1，F_2 分别是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，顶点 B 的坐标为$(0,b)$，连接 BF_2 并延长交椭圆于点 A，过点 A 作 x 轴的垂线交椭圆于另一点 C，连接 F_1C.

（1）若点 C 的坐标为$\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$，且 $BF_2=\sqrt{2}$，求椭圆的方程；

（2）若 $F_1C\perp AB$，求椭圆离心率 e 的值.



分析题意

第一问易得椭圆的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. 第二问是求椭圆离心率，题干给出了一般椭圆中的作图，此时，椭圆的扁圆程度还未确定，直到第二问给出了垂直条件，椭圆的形状才定下来. 因此这个垂直条件是关键.

官方标准答案提供的解题方法：循着作图的顺序，联立直线 BF_2 与椭圆的方程求解点 A 的坐标，由对称性得点 C 的坐标，于是可表示直线 F_1C 的斜率，继而得到用 a,b,c 表示的斜率乘积$\dfrac{\frac{b^3}{a^2+c^2}-0}{\frac{2a^2c}{a^2+c^2}-(-c)}\cdot\left(-\frac{b}{c}\right)=-1$，再利用 $b^2=a^2-c^2$ 消去 b，得到 $a^2=5c^2$，从而获得离心率 e 的值.

此解法遵循题目的表述，原样翻译成数学符号，逢相交便联立，遇交点求坐标，没有半点绕弯，是解析几何综合问题的常规求解思路，然而未经转化的解析几何运算通常是繁杂的. 优化思路、简化运算一直是解析几何解题者的追求. 如何优化使用垂直的条件，如何简化运算，甚至避免直线与椭圆的联立，于是乎求简的需求就这样产生了！

多维思考

在解析几何中，将两直线的垂直用斜率乘积为-1来表示是最直接的. 在此之前，就要将所需点的坐标求出来，于是问题解决变成了一系列的运算. 因此，我们优先考虑如何简化其中的运算.

1. 如何简化运算

(1) 利用垂直简化直线 F_1C 的表示

因为直线 BF_2 的表示很简单，所以垂直条件下的 F_1C 的斜率表示起来也很简单. 也就是说，我们可以先使用垂直条件，就不用通过求点 C 的坐标来表示直线 F_1C 的斜率了. 反过来，直线 F_1C 可用来求点 C.

先求点 A 的横坐标：易知直线 BF_2 的方程为 $y=-\frac{b}{c}x+b$，联立 $\begin{cases}y=-\frac{b}{c}x+b,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得，$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)x^2-\frac{2}{c}x=0$，解得 $x_A=\frac{2a^2c}{a^2+c^2}$.

由 $F_1C\perp AB$ 可知，直线 F_1C 的方程为 $y=\frac{c}{b}(x+c)$，联立 $\begin{cases}y=\frac{c}{b}(x+c),\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得，$(b^4+a^2c^2)x^2+2a^2c^3x+a^4(c^2-b^2)=0$，解得 $x_C=\frac{a^2(b^3-c^3)}{b^4+a^2c^2}$.

下面，我们要考虑的是用什么条件得到关于 a，b，c 的等式：垂直已经用过了，观察图形，还有没用到的点、直线吗？只有 AC 了. 而 AC 是过点 A 作的 x 轴的垂线，因此，一定有 $x_A=x_C$，即 $\frac{a^2(b^3-c^3)}{b^4+a^2c^2}=\frac{2a^2c}{a^2+c^2}$，又 $b^2=a^2-c^2$，化简得 $a^2=5c^2$，所以椭圆离心率 e 为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

这样，通过垂直关系的优先使用，改变了作图顺序，使得 A，C 两点的对称最后出现，我们的运算都往中间用力，对点 C 的横坐标“算两次”，从而获得了等式. 因此简化了直线 F_1C 的表示，也省掉了对点 A，C 的纵坐标的求解. 不过美中不足的是多了一次直线与椭圆方程的联立.

（2）利用设而不求避开直线与椭圆方程的联立

联立直线与椭圆的方程，可直接求出两者的交点坐标，然而运算较麻烦. 转念想想，我们可以先将交点设出来. 能否“设而不求”呢？

设 $A(x_0,y_0)$，就可以用它来表示其他点，如 $C(x_0,-y_0)$. 继续寻找与点 A 相关的，点 A 在直线 BF_2 上，所以 (x_0,y_0) 满足 $bx_0+cy_0-bc=0$，那么由点 C 在直线 F_1C 上以及 $F_1C\perp AB$ 可得，$cx_0-b(-y_0)+c^2=0$，即 $cx_0+by_0+c^2=0$. 当然，点 A 还在椭圆上，有 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$.

点 A 的坐标满足的关系还挺多！然而，要求离心率，不需要 x_0，y_0，只要获得 a，b，c 的等式即可. 因此要将上面所得三个等式中的 x_0，y_0 消去，即选两个等式解出 x_0，y_0，再代入第三个等式. 那么选哪两个等式会方便计算呢？

当然是联立 $\begin{cases}bx_0+cy_0-bc=0,\\ cx_0+by_0+c^2=0,\end{cases}$ 可解得 $\begin{cases}x_0=\frac{a^2c}{b^2-c^2},\\ y_0=-\frac{2bc^2}{b^2-c^2},\end{cases}$ 代入椭圆方程，得 $\frac{a^2c^2}{(b^2-c^2)^2}+\frac{4c^4}{(b^2-c^2)^2}=1$，又 $b^2=a^2-c^2$，化简得 $a^2=5c^2$，所以椭圆离心率 e 为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

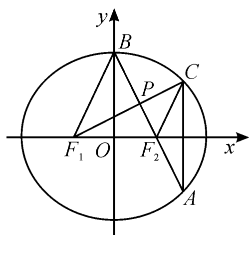
本解法在“设而不求”想法的指引下，先设再求，等到再求时成功避开了直线与椭圆方程的联立.

2. 换个角度

解析法给我们以精确的感觉，图形上的繁复关系总可以通过推演而得到，而几何却给我们以美的视觉享受. 解析几何问题. 首先是几何问题. 从几何的角度看，本题的垂直条件暗示有直角三角形可以使用.

（1）从椭圆的定义出发

设 F_1C 与 AB 交于点 P，则 $\angle F_1PF_2=90°$，出现了一个直角. 而以椭圆的两焦点为顶点的三角形当首推“焦点三角形”. 因此，我们连接 F_2C，显然有 $CF_1+CF_2=2a$. 若 CF_1，CF_2 可以用 a，b，c 来表示，那也就得到了关于 a，b，c 的等式.



我们把目光聚焦在 Rt$\triangle F_1PF_2$ 上. 能否通过这个直角三角形表示出 CF_1，CF_2 呢？因为 Rt$\triangle F_1PF_2$ 的内角 $\angle F_1F_2P=\angle OF_2B$，所以 $PF_2=F_1F_2\cos\angle F_1F_2P=\frac{2c^2}{a}$，$PF_1=F_1F_2\sin\angle F_1F_2P=\frac{2bc}{a}$. 继而，我们只要知道 $\frac{PF_1}{PC}$ 就可以表示 CF_1 了，而 $\frac{PF_2}{PB}$ 是确定的，又 CF_2 与 AF_2 关于 x 轴对称，所以

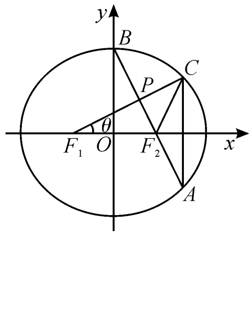
$F_2C \parallel F_1B$，则 $\triangle PF_2C \backsim \triangle PBF_1$，所以 $CF_1 = PF_1 \times \dfrac{BF_2}{PB} = \dfrac{2abc}{a^2-2c^2}$，$CF_2 = BF_1 \times \dfrac{PF_2}{PB} = \dfrac{2ac^2}{a^2-2c^2}$. 所以 $CF_1 + CF_2 = \dfrac{2abc}{a^2-2c^2} + \dfrac{2ac^2}{a^2-2c^2} = 2a$，整理得 $bc = a^2 - 3c^2$，为利用 $b^2 = a^2 - c^2$ 消去 b，把等式平方得 $(a^2-c^2)c^2 = (a^2-3c^2)^2$，同时要注意等价，还应有 $a^2 - 3c^2 > 0$，所以 $\begin{cases} 10e^4 - 7e^2 + 1 = 0, \\ e^2 < \dfrac{1}{3}, \end{cases}$ 解得 $e^2 = \dfrac{1}{5}$，所以椭圆离心率 e 为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

这样，我们从椭圆的定义出发，将已知转化到"焦点三角形"上，获得了等式. 不过，在消去 b 的过程中，若未注意到原式的特征，则会产生两解. 代数变形时留意等价性，会省去检验的烦扰.

(2) 从离心率的定义出发

离心率是焦距与长轴长的比值，即 $\dfrac{2c}{2a}$，结合椭圆的定义，也即 $\dfrac{F_1F_2}{CF_1+CF_2}$，因此 $\dfrac{2c}{2a} = \dfrac{F_1F_2}{CF_1+CF_2}$. 在 $\triangle F_1CF_2$ 中，由正弦定理有，$\dfrac{F_1F_2}{CF_1+CF_2} = \dfrac{\sin\angle F_1CF_2}{\sin\angle F_1F_2C + \sin\angle CF_1F_2}$. 下面，我们要将这三个正弦值表示为 a,b,c 的关系. 考虑 $\triangle F_1CF_2$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle F_1PF_2$ 有公共角 $\angle CF_1F_2$，毫无疑问，$\angle CF_1F_2$ 承担着"架桥"的任务.

设 $\angle CF_1F_2 = \theta$，则 $\angle BF_2F_1 = \dfrac{1}{2}\angle AF_2C = \dfrac{\pi}{2} - \theta$，所以 $\angle BF_2C = 2\theta$，则 $\angle F_1CF_2 = \dfrac{\pi}{2} - 2\theta$. 所以 $\dfrac{F_1F_2}{CF_1+CF_2} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\theta} = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \cos\theta - \sin\theta$.



接着，我们再将 θ 联系到椭圆的特征三角形 BOF_2 中去，显然有 $\triangle F_1PF_2 \backsim \triangle BOF_2$，所以 $\cos\theta = \dfrac{b}{a}$，$\sin\theta = \dfrac{c}{a}$，所以 $\dfrac{2c}{2a} = \dfrac{b}{a} - \dfrac{c}{a}$，即 $b = 2c$，所以 $a^2 - c^2 = 4c^2$，即 $a^2 = 5c^2$，故椭圆离心率 e 为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

由此可见，一个垂直条件实现了"特征三角形 BOF_2"与"焦点三角形 F_1CF_2"之间很好的沟通. "边 → 角 → 边"的两度转化自然而然.

见山不是山

离心率的求解在各类考试中以小题居多，作为高考题的第二问独立出现是很罕见的，这说明本题的命题人对该题的考查价值是非常认可的，真是问题虽小，价值巨大.

离心率问题的解决方向是想方设法获得 a,b,c 的关系，常常是将题目所给条件（如本题中的两直线垂直）或图形中的关系（如本题中的对称，相似等）转化.

正确计算是解决解析几何问题的基本功，数形结合是转化解析几何问题的出发点. 若想在目前的高考中所向披靡，两者缺一不可，两手都要硬，我们给出以下建议：

(1) 重视运算能力

运算能力包括基本的计算与算法的选择两个维度. 例如已知直线与椭圆相交的一个交点，求另一个交点，这种是基本的计算，必须熟练掌握. 另外，在进行复杂的运算之前，要有算法选择意识，想清楚计算的过程，选择尽量优化的算法与顺序再动手.

(2) 强化数形结合思想

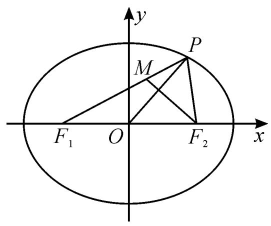
解析几何是用解析的方法解决几何问题，但并不排斥对图形结构的分析，若能运用好数形结合思想，先从图形上将问题转化，再计算则会轻巧很多.

(3) 选定一个方向，做下去

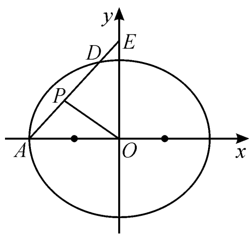
解析几何计算的繁杂是常态！与其"望而却步"，不如"埋头实算"，你要坚信，只要方向正确，题目一定是可以解决的，不要轻易地半途而废. 和任何事情一样，数学解题也是一个充满喜怒哀乐的过程，唯有坚持，才能品尝到成功的喜悦！

练习

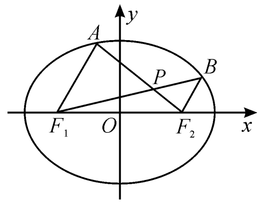
1. 如图，已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点为$F_1$、$F_2$，$P$是椭圆上一点，点$M$在$PF_1$上，且满足$\overrightarrow{F_1M}=2\overrightarrow{MP}$，$PO\perp F_2M$，$O$为坐标原点，求椭圆离心率$e$的取值范围.



2. 如图，在平面直角坐标系xOy中，已知椭圆C：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$，过左顶点$A$作斜率为$k(k\neq 0)$的直线$l$交椭圆$C$于点$D$，交$y$轴于点$E$. 已知$P$为$AD$的中点，是否存在定点$Q$，对于任意的$k(k\neq 0)$都有$OP\perp EQ$？若存在，求出点$Q$的坐标；若不存在，说明理由.



3. 如图，在平面直角坐标系xOy中，椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的左、右焦点分别为F_1，F_2. 设A，B是椭圆上位于x轴上方的两点，且直线AF_1与直线BF_2平行，AF_2与BF_1交于点P. 求证：PF_1+PF_2是定值.



答案：

1. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　**提示：**设$P(x_0,y_0)$，根据已知条件求出x_0，利用点P在椭圆上，故$x_0\in(-a,a)$，解不等式得离心率的取值范围.

2. $(-3,0)$　**提示：**利用k为参数，求出点D，P的坐标，再利用垂直列恒等式.

3. $PF_1+PF_2=\frac{3}{2}\sqrt{2}$　**提示：**设AF_1，BF_2的方程分别为$my=x+1$，$my=x-1$，求出A，B两点的坐标，表示出PF_1+PF_2，利用椭圆的定义证明其为定值.

轨迹方程有妙法,今朝重现蒙日圆

[学大教育深圳分公司　汪　飞]

阅读提示：

求轨迹方程是解析几何的基本问题,其实质就是求曲线上的任一动点的坐标所满足的等量关系.求轨迹方程的不同方法都是基于对这个实质的理解与追求,从不同角度进行的操作.简单的问题可以用直接法,稍复杂些的问题可以用代入法、交轨法等方法.比较难的求轨迹方程的题目往往体现在动态关系复杂,变量繁多,让人觉得无从下手.这篇文章选取的就是一道很有代表性的高考题,汪飞老师给出了多种解法,从基本解法到巧妙解法的呈现遵循了“拾级而上”的思维升华,其中体现出来的丰富数学思想请同学们细细体会.

试题呈现

例(2014 广东文(理)20)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点为$(\sqrt{5},0)$,离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)若动点 $P(x_0,y_0)$为椭圆 C 外一点,且点 P 到椭圆C 的两条切线相互垂直,求点 P 的轨迹方程.

初探端倪、通法引路

易得椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$,这里重点分析第(2)问的处理方法.从问题类型来看,第二问属于求两条直线交点的轨迹方程问题,常规套路是“交轨法”,即:设出两条直线的方程 → 求出两条直线的交点坐标 → 消去坐标中含有的参数.计划已制订好,那就行动吧!

☞ **解法 1:**

我们让点 P 的坐标最后出现,所以设切线方程为斜截式.

(1)当两切线的斜率均存在时,设一条切线 PA 的方程为 $y=kx+m$,由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 得 $(9k^2+4)x^2+18kmx+9m^2-36=0$,依题意 $\Delta=18^2k^2m^2-4(9k^2+4)(9m^2-36)=0$,化简得到 $m^2=9k^2+4$ ①.

设另一条切线 PB 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+n$,同理可得 $n^2=\frac{9}{k^2}+4$ ②.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ y=-\frac{1}{k}x+n\end{cases}$解得$\begin{cases}x_0=\frac{(n-m)k}{k^2+1},\\ y_0=\frac{nk^2+m}{k^2+1}.\end{cases}$

下面的问题就是如何消去其中的参数 k,m,n,注意到 ①② 中 m,n 都带平方,且 x_0,y_0 的分母均为 k^2+1,所以尝试平方相加:

$$x_0^2+y_0^2=\frac{(n-m)^2k^2+(n^2k^4+2mnk^2+m^2)}{(k^2+1)^2}$$
$$=\frac{(m^2+n^2)k^2+(n^2k^4+m^2)}{(k^2+1)^2}.$$

代入 ①② 得 $x_0^2+y_0^2=\frac{13k^4+26k^2+13}{(k^2+1)^2}=13.$

(2)当两切线均与坐标轴垂直时,则点 P 的坐标为$(\pm3,\pm2)$,也满足 $x_0^2+y_0^2=13$,

故所求点 P 的轨迹方程是 $x^2+y^2=13$.

我们平时要归纳和提炼一些类型题的解题套路,在遇到问题时迅速识别,就能很快找到解题方向,形成如下的思维运行方式:

积累归纳套路 — 识别问题类型 — 代入套路 — 执行

☞ **解法 2:**

如果从一开始就让点 P 的坐标出现,则应设切线方程为点斜式.

当切线的斜率存在时，设一条切线的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，即 $y=kx+(y_0-kx_0)$，

由 $\begin{cases} y=kx+(y_0-kx_0), \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 消去 y 得 $(9k^2+4)x^2+18k(y_0-kx_0)x+9(y_0-kx_0)^2-36=0$.

依题意得 $\Delta=[18k(y_0-kx_0)]^2-4\times(9k^2+4)\times[9(y_0-kx_0)^2-36]=0$，

化简得 $(y_0-kx_0)^2-9k^2-4=0$ ①，

设另一条切线的方程为 $y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)$，

同理得 $\left(y_0+\frac{x_0}{k}\right)^2=\frac{9}{k^2}+4$ ②.

下面只需从①②中消去参数 k 即可.

由①$+k^2\times$②得 $(y_0-kx_0)^2+(ky_0+x_0)^2=13(k^2+1)$，化简得 $x_0^2+y_0^2=13$.

再检验斜率不存在的情况即可得点 P 的轨迹方程.

上述两种解法的共同点是都设出了两切线方程，利用了判别式为零，不同之处是消参的思路，解法1是求出交点的坐标 $\begin{cases} x_0=f(m,n,k), \\ y_0=g(m,n,k), \end{cases}$ 消去参数，解法2是得到两个含有 x_0,y_0 的等式 $\begin{cases} f(x_0,y_0)=0, \\ g(x_0,y_0)=0, \end{cases}$ 消去参数. 解法2更体现了求轨迹方程问题的关键：找到含有 x_0,y_0 的两个等式！

顺势而上、妙法迭出

有了上面两种解法为基础，我们可以乘胜追击，找到一个个新的突破方向.

☞ 解法3：对解法1进行优化

在得到 $m^2=9k^2+4$ 与 $n^2=\frac{9}{k^2}+4$ 后，两条切线方程可以写成 $y=kx\pm\sqrt{9k^2+4}$ 和 $y=-\frac{1}{k}x\pm\sqrt{\frac{9}{k^2}+4}$，两直线方程联立得 $\begin{cases} y-kx=\pm\sqrt{9k^2+4}, \\ ky+x=\pm\sqrt{9+4k^2}, \end{cases}$ 两式平方相加得到 $(y-kx)^2+(ky+x)^2=(9k^2+4)+(9+4k^2)$，即 $(k^2+1)(x^2+y^2)=13(k^2+1)$，所以点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=13$.

代数式整体运算来消参，不必执着于非要求出 x_0,y_0！

☞ 解法4：对解法2进行优化

得到 $(y_0-kx_0)^2-9k^2-4=0$ 后，解法2是把 x_0,y_0 当作主元，再写一式消去 k. 如果换个角度，视 k 为主元，那么该式就是关于 k 的二次方程，它的两个根就是互相垂直的两条切线的斜率，设为 k_1,k_2，则 $k_1k_2=-1$，这样能不能得到只含 x_0,y_0 的等式呢？试一试.

将 $(y_0-kx_0)^2-9k^2-4=0$ 改写为：$(x_0^2-9)k^2-2kx_0y_0+(y_0^2-4)=0$，则 k_1,k_2 是这个方程的两根，则 $k_1,k_2=\frac{y_0^2-4}{x_0^2-9}=-1$，化简得 $x_0^2+y_0^2=13$！

是不是有点出人意料？

其实这样变换视角、直捣黄龙的例子在数学解题里不胜枚举，比如求二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的值域，我们习惯将这个式子看成 y 是 x 的函数，若换个视角改写为 $ax^2+bx+c-y=0$，就可以看成是关于 x 的二次方程，方程有解，故 $\Delta\geqslant0$ 得 $y\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}$，这就是二次函数的值域！

☞ 解法5：利用椭圆的切点弦方程

设 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆 C 外一点，切点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则切点弦 AB 所在直线的方程为 $\frac{xx_0}{9}+\frac{yy_0}{4}=1$，由 $\begin{cases} \frac{xx_0}{9}+\frac{yy_0}{4}=1, \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 消去 y 得 $\left(\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}\right)x^2-2x_0x+9\left(1-\frac{y_0^2}{4}\right)=0$ ①. 因为 $k_{PA}=-\frac{4x_1}{9y_1}$，$k_{PB}=-\frac{4x_2}{9y_2}$，且 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{16x_1x_2}{81y_1y_2}=-1$，又 $\frac{x_1x_0}{9}+\frac{y_1y_0}{4}=1$，$\frac{x_2x_0}{9}+\frac{y_2y_0}{4}=1$，所以 $\frac{x_1x_2}{81}+\frac{y_1y_2}{16}=\frac{x_1x_2}{81}+\frac{1}{y_0^2}\left(1-\frac{x_0x_1}{16}\right)\left(1-\frac{x_0x_2}{16}\right)=0$，即 $\frac{x_0^2+y_0^2}{81}x_1x_2-\frac{x_0}{9}(x_1+x_2)+1=0$ ②，由①式有 $x_1+x_2=\frac{2x_0}{\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}}$，$x_1x_2=\frac{9\left(1-\frac{y_0^2}{4}\right)}{\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}}$，将其代入②式得 $\frac{x_0^2+y_0^2}{9}\left(1-\frac{y_0^2}{4}\right)-\frac{2x_0^2}{9}+\left(\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}\right)=0$，化简整理得点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=13$.

☞ 解法6：利用直线的参数方程求解，可以有效地控制计算量，缩短解题长度，也可以充分利用题目条件

设从点 P 所引的一条切线 PA 的参数方程为 $\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数)，则另一条切线 PB 的参

数方程为$\begin{cases}x=x_0-t\sin\alpha\\y=y_0+t\cos\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），将 PA 的参数方程代入椭圆方程并整理得$(4\cos^2\alpha+9\sin^2\alpha)t^2+(8x_0\cos\alpha+18y_0\sin\alpha)t+4x_0^2+9y_0^2-36=0$，由判别式 $\Delta=0$ 得 $2x_0y_0\cos\alpha\sin\alpha-y_0^2\cos^2\alpha+4\cos^2\alpha-x_0^2\sin^2\alpha+9\sin^2\alpha=0$ ①；同理可得$-2x_0y_0\cos\alpha\sin\alpha-y_0^2\sin^2\alpha+4\sin^2\alpha-x_0^2\cos^2\alpha+9\cos^2\alpha=0$ ②，由①+②并整理得 $x_0^2+y_0^2=13$；所以点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=13$.

☞ **解法 7：利用椭圆的光学性质**

设椭圆的中心为 O，F_1，F_2 分别为椭圆的左、右焦点，$F_1F_2=2\sqrt{5}$，椭圆的两条切线为 PA，PB，点 M，N 分别为点 F_1 关于 PA，点 F_2 关于 PB 的对称点. 由椭圆的光学性质知 F_2，A，M 及 F_1，B，N 分别三点共线，由椭圆定义有 $MF_2=NF_1=2a$. 设 F_1M 交直线 PA 于点 Q，F_2N 交直线 PB 于点 S，分别延长 MF_1，NF_2 交于点 R，则 $OQ=\frac{1}{2}MF_2=\frac{1}{2}NF_1=OS=a=3$，$OR=\frac{1}{2}F_1F_2=c=\sqrt{5}$. 在矩形 $PQRS$ 中，由平面几何知识易知 $OP^2+OR^2=OQ^2+OS^2$，代入数据得 $OP^2=OQ^2+OS^2-OR^2=9+9-5=13$，所以点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=13$.

见山非山、举一反三

数学家波利亚说："没有一道题目是可以解决得十全十美的，总能剩下些工作要做，经过充分的探讨总结，总会有点滴发现，总能改进这个解答，而且在任何情况下，我们都能提高自己对这个解答的理解水平."

做完一道题之后，很多同学可能会忙于去做下一道，殊不知，如果回头看看，或许会有令人惊奇的发现，说不定能发现一座宝藏哦！

我们把本题的条件和结论放在一起看：

椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，而所求轨迹方程为 $x^2+y^2=13=4+9$，这是巧合吗？

非也！

与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相切的两条垂直切线的交点的轨迹方程是 $x^2+y^2=a^2+b^2$，这是一个圆的方程，这一优美结论是由法国数学家蒙日（1746—1818）首先发现的，故被称作"蒙日圆".

用上述类似方法可以得到以下结论.

在双曲线中的结论是：与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）相切的两条垂直切线的交点的轨迹方程是 $x^2+y^2=a^2-b^2$，

在抛物线中的结论是：与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 相切的两条垂直切线的交点的轨迹方程是 $x=-\frac{p}{2}$（可以看成是半径无穷大的圆）.

在近年的高考中，像"蒙日圆"、"阿基米德三角形"、"彭色列定理"、"阿波罗尼斯圆"等数学史名题出镜率很高，2016 年 9 月出台的考试大纲修订精神更是首次正式指出数学文化在高考中的重要性，故而此类问题值得同学们特别重视.

本题的 7 种解法精彩纷呈，各有其价值，我们需要指出下面三点.

1. 解决解析几何综合问题一般有三条路线：

（1）利用方程思想，主要是结合韦达定理来求解，如解法 1、解法 2、解法 3、解法 4、解法 6；

（2）设而不求，灵活运用曲线方程来处理，如解法 5；

（3）结合平面几何知识来处理，很多时候平面几何知识运用得好可以大大减少计算量，如解法 7.

2. 对于程度较好的学生，最好多掌握一些"临界知识"，这样可以秒杀很多难题：

所谓"临界知识"就是高考和竞赛接轨的部分，初等数学与高等数学的边缘部分，这有助于了解题目背景，迅速找到解题方向，同学们在高考解答题中使用时需先证明再运用，相当于以引理的形式给出，这样才可以保证该题满分. 比如这个题涉及的"临界知识"有：

（1）与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相切的斜率为 k 的切线方程为 $y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$；

（2）与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相切于点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$；

（3）若点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆外，则$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ 为切点弦方程.

这三个结论的证明留给同学们.

3. 对于求动点 $P(x_0,y_0)$ 的轨迹方程这类问题，务必深刻领悟两点：

（1）所谓求轨迹方程就是求一个只含有 x_0，y_0 的等式 $F(x_0,y_0)=0$，这是我们一切解题行为的核心；

（2）在一些复杂问题中当我们得到两个含有x_0,y_0的等式即$\begin{cases}f(x_0,y_0)=0,\\g(x_0,y_0)=0\end{cases}$后，下面求出$x_0,y_0$消参，或不求出$x_0,y_0$而对两个代数式进行整体运算来消参，都是可以考虑的方向.

练习

1. 已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，过右焦点倾斜角为$45°$的直线被椭圆截得的弦长为$\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

（1）求椭圆E的方程；

（2）若动直线l与椭圆E有且只有一个公共点，过点$M(1,0)$作l的垂线，垂足为Q，求点Q的轨迹方程.

2. 从双曲线$x^2-y^2=1$上一点Q引直线$x+y-2=0$的垂线，垂足为N，求线段QN的中点P的轨迹方程.

3. 已知抛物线C：$y^2=2x$的焦点为F，平行于x轴的两条直线l_1,l_2分别交C于A,B两点，交C的准线于P,Q两点，若$\triangle PQF$的面积等于$\triangle ABF$的面积，求AB中点的轨迹方程.

答案：

1. （1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.（2）$x^2+y^2=2$.

2. $2x^2-2y^2-2x+2y-1=0$.

3. $y^2=x-\frac{3}{2}$

动中有静蕴定值,参数遁形于关系

[学大教育江苏分公司　周 坤]

阅读提示:

解析几何的核心思想是坐标法,就是用坐标来研究曲线的性质,或者说是把一个几何问题代数化.这样看来解析几何的解题过程就可以分为三步:一,建立坐标系并选取合适的基本量(参数)将问题代数化;二,运用代数方法、技巧来解决问题;三,将代数结果回归到几何意义.由于代数方法的主要特点是"算",这就牵涉如何简化计算,涉及一些计算的技巧.这里选取的高考题并不很难,但非常典型,希望有益于大家理解解析几何的本质,同时注意体会在解题过程中,解题目标的导向是如何调控我们的思维的.

试题呈现

例(2015 上海理 21)已知椭圆 $x^2+2y^2=1$,过原点的两条直线 l_1 和 l_2 分别与椭圆交于 A,B 和 C,D 四点,记得到的平行四边形 $ABCD$ 的面积为 S.

(1)设 $A(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,用 A,C 的坐标表示点 C 到直线 l_1 的距离,并证明 $S=2|x_1y_2-x_2y_1|$;

(2)设 l_1 与 l_2 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$,求面积 S 的值.

解法分析

1. 第一问

第一问易知 $S=4S_{\triangle AOC}$,所以只要求出 $S_{\triangle AOC}$ 即可,求三角形面积最容易想到的方法是 $\frac{1}{2}ah$,于是得到下面的解法.

☞ **解法 1:以 OA 为底边**

易得直线 $l_1:y_1x-x_1y=0$,则点 C 到 l_1 的距离 $d=\frac{|y_1x_2-x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$,$|AO|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$,则 $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}|AO|d=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$,于是 $S=4S_{\triangle AOC}=2|x_1y_2-x_2y_1|$.

当然也可以 OC 为底边,过程类似.

☞ **解法 2:以 AC 为底边**

直线 AC 的两点式方程为 $(y_1-y_2)(x-x_2)=(x_1-x_2)(y-y_2)$,即 $(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+x_1y_2-x_2y_1=0$,点 O 到直线 AC 的距离为 $d=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{|AC|}$,则 $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}|AC|d=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$,于是 $S=4S_{\triangle AOC}=2|x_1y_2-x_2y_1|$.

注意到 $x_1y_2-x_2y_1$ 是向量的共线公式,自然让人猜想:能不能用向量形式来证明?

☞ **解法 3:向量形式**

设 $\angle AOC=\theta$,则 $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\sin\theta$,又 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|}$,

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})^2}{(|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|)^2}}=\frac{1}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|}\sqrt{(|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|)^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})^2},$$

故 $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|)^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2}$

$=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$.

于是 $S=4S_{\triangle AOC}=2|x_1y_2-x_2y_1|$.

2. 第二问

l_1 与 l_2 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$，也就是 $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-\frac{1}{2}$，即 $x_1x_2+2y_1y_2=0$，而我们要求的是面积，也就是 $2|x_1y_2-x_2y_1|$。式子中有四个变量，如何下手呢？

不要忘了，这四个量还有什么关系？

对，点在椭圆上！

所以应有 $x_1^2+2y_1^2=1$ 和 $x_2^2+2y_2^2=1$。

于是我们重新把问题描述一遍：

已知实数 x_1,y_1,x_2,y_2，满足

$$\begin{cases}x_1^2+2y_1^2=1 & ①,\\ x_2^2+2y_2^2=1 & ②,\\ x_1x_2+2y_1y_2=0 & ③,\end{cases}\quad 求|x_1y_2-x_2y_1|.$$

这样，我们就把原问题经过坐标化转化为一个纯代数问题。

因为要求的是 $|x_1y_2-x_2y_1|$，带有绝对值，而已知条件中多带有平方，所以我们不难想到也应该想到先将待求式平方得 $|x_1y_2-x_2y_1|^2=x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2$。

对比已知条件的结构，要出现 $x_1^2y_2^2$ 这样的结构，只有将 ①×② 得 $x_1^2x_2^2+2x_1^2y_2^2+2x_2^2y_1^2+4y_1^2y_2^2=1$，于是 $x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2=\frac{1}{2}(1-4y_1^2y_2^2-x_1^2x_2^2)$，于是 $|x_1y_2-x_2y_1|^2=x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2=\frac{1}{2}(1-4y_1^2y_2^2-x_1^2x_2^2)-2x_1x_2y_1y_2$。

看到这里你就知道 ③ 式要派上用场了！

因为 $x_1x_2+2y_1y_2=0$，

所以 $\frac{1}{2}(1-4y_1^2y_2^2-x_1^2x_2^2)-2x_1x_2y_1y_2$

$=\frac{1}{2}[1-(4y_1^2y_2^2+x_1^2x_2^2+4x_1x_2y_1y_2)]$

$=\frac{1}{2}[1-(x_1x_2+2y_1y_2)^2]=\frac{1}{2}$。

于是 $|x_1y_2-x_2y_1|^2=\frac{1}{2}$，

则 $S=2|x_1y_2-x_2y_1|=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$。

是不是很自然呢？对代数式 ①②③ 的处理来自于对目标结构的观察！

还有没有别的方法呢？

这个动态过程的起因是直线，那么选择直线的斜率为自变量，来表示 x_1,y_1,x_2,y_2 肯定是可以的，于是得到下面的解法。

设 $l_1:y=kx$，则 $l_2:y=-\frac{1}{2k}x$。设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$。

由 $\begin{cases}y=kx,\\ x^2+2y^2=1\end{cases}$ 得 $x_1^2=\frac{1}{1+2k^2}$，$y_1^2=\frac{k^2}{1+2k^2}$，

同理 $x_2^2=\frac{1}{1+2\left(-\frac{1}{2k}\right)^2}=\frac{2k^2}{2k^2+1}$，$y_2^2=\frac{\left(-\frac{1}{2k}\right)^2}{1+2\left(-\frac{1}{2k}\right)^2}$

$=\frac{1}{2+4k^2}$，考虑到 $x_1x_2+2y_1y_2=0$，

于是 $|x_1y_2-x_2y_1|^2$

$=x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2$

$=x_1^2y_2^2+x_1^2x_2^2+x_2^2y_1^2$

$=\frac{\frac{1}{2}}{(1+2k^2)^2}+\frac{2k^2}{(1+2k^2)^2}+\frac{2k^4}{(1+2k^2)^2}$

$=\frac{\frac{1}{2}(1+4k^2+4k^4)}{(1+2k^2)^2}=\frac{\frac{1}{2}(1+2k^2)^2}{(1+2k^2)^2}=\frac{1}{2}$，

则 $S=2|x_1y_2-x_2y_1|=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$。

当然用这个思路分别求出 x_1,y_1,x_2,y_2，代入 $|x_1y_2-x_2y_1|$ 也是可以的（根据对称性只需考虑 A，C 分别在第一、二象限即可）。

以上的思路都是求出四个变量，能不能简化呢？

可以的！注意到直线均经过原点，所以借助直线方程可以来转换同一点的横纵坐标，可以得到下面的简化解法。

设 $l_1:y=kx$，则 $l_2:y=-\frac{1}{2k}x$。设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$。

由 $\begin{cases}y=kx,\\ x^2+2y^2=1\end{cases}$ 得 $x_1^2=\frac{1}{1+2k^2}$。

同理 $x_2^2=\frac{1}{1+2\left(-\frac{1}{2k}\right)^2}=\frac{2k^2}{2k^2+1}$，

得 $S=2|x_1y_2-x_2y_1|=2\left|\frac{x_1\cdot x_2}{2k}+x_2\cdot kx_1\right|=\frac{2k^2+1}{|k|}\cdot|x_1x_2|=\frac{(2k^2+1)\left|\sqrt{2}k\right|}{|k|\sqrt{1+2k^2}\cdot\sqrt{2k^2+1}}$，

整理得 $S=\sqrt{2}$。