

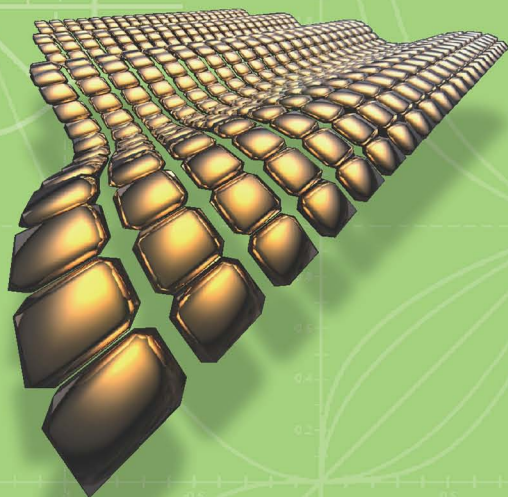
第50届国际数学奥林匹克
中国国家队领队、主教练

朱华伟 主编

AOSHU JIANGYI

奥数讲义

初二分册



SPM 南方出版传媒

全国优秀出版社
全国百佳图书出版单位

广东教育出版社

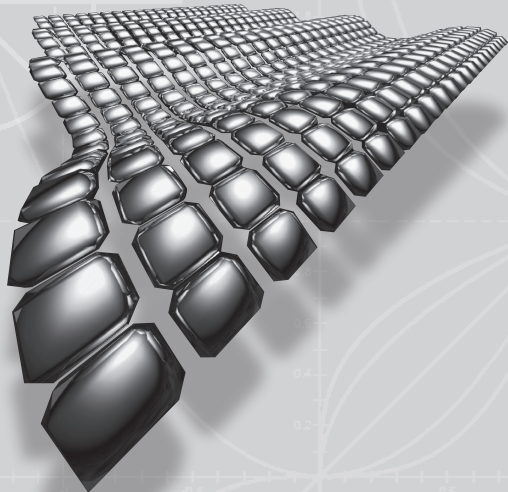
第50届国际数学奥林匹克
中国国家队领队、主教练

朱华伟 主编

AOSHU JIANGYI

奥数讲义

初二分册



SPM 南方出版传媒

全国优秀出版社
全国百佳图书出版单位

广东教育出版社

·广州·

图书在版编目 (CIP) 数据

奥数讲义. 初二分册 / 朱华伟主编. —广州: 广东教育出版社, 2016. 8

ISBN 978 - 7 - 5548 - 1263 - 1

I. ①奥… II. ①朱… III. ①中学数学课 - 初中 - 教学参考资料 IV. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 165335 号

责任编辑: 刘茵 李映婷

责任技编: 杨启承

装帧设计: 何维

广东教育出版社出版发行

(广州市环市东路472号12-15楼)

邮政编码: 510075

网址: <http://www.gjs.cn>

广东新华发行集团股份有限公司经销

广州市番禺区友联彩印厂印刷

(广州市番禺区沙湾陈涌工业区九横路南)

890毫米×1240毫米 32开本 11印张 253 000字

2016年8月第1版 2016年8月第1次印刷

ISBN 978 - 7 - 5548 - 1263 - 1

定价: 32.00元

质量监督电话: 020-87613102 邮箱: gjs-quality@gdpg.com.cn

购书咨询电话: 020-87615809



编委会

主编：朱华伟

编委：朱华伟 王池富 齐世荫

张京明 刘箭飞 朱 晓

前言



数学被誉为“科学的皇后”。在人类文明的历史长河中，中华民族对数学的发展曾做出卓越的贡献。勾股定理、祖冲之圆周率、九章算术等丰硕成果无不闪烁出其耀眼的光芒。新中国成立以来，中国的现代数学有了长足的发展，先后涌现出华罗庚、陈景润等一批著名数学家。数学大师陈省身教授曾预言：“21世纪，中国必将成为数学大国。”从1985年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克以来，中国代表团共30次参赛，其中19次团队总分居第一位（有11次获得6枚金牌），7次团队总分居第二位，各1次团队总分居第四、六、八位，176人次参赛，共获金牌138块、银牌30块、铜牌6块。中国中学生近年来在国际数学奥林匹克中的出色成绩，使人们相信陈省身教授的这一“猜想”将在21世纪得到证明。

由于计算机的出现，数学已不仅是一门科学，还是一种普适性的技术。从航空到家庭，从宇宙到原子，从大型工程到工商管理，无一不受惠于数学技术。高科学技术本质上是一种数学技术。美国科学院院士格里姆（J. Glimm）说：“数学对经济竞争力至为重要，数学是一种关键的普遍使用的，并授予人能力的技术。”时至今日，数学已兼有科学与技术两种品质，这是其他学科少有的。数学对国家的贡献不仅在于富国，而且还在于强民。数学给予人们的不仅是知识，更重要的是能力，这种能力包括观察实验、收集信息、归纳类比、直觉判断、逻辑推理、建立模型和精确计算。这些能力的培养，将使人终身受益。这些能力的培养，必须从小抓起，从青少年抓起。而数学奥林匹克活动，则是培养这些能力的良好载体。

基于这样的想法，笔者以国内外初中数学奥林匹克为背景，以《全日制义务教育数学课程标准》的新理念、新要求为准绳，根据多年培训数学奥林匹克选手的经验和体会，编写了这套奥数教程，既

为学有余力且对数学感兴趣的初中生提供了一个施展才华和提高数学解题能力的指导，也为参加数学竞赛的初中生提供了一套科学实用的培训教程。本套书的读者对象范围很广，适用于备战初中各种数学竞赛的初中生和老师。

本套书设计新颖，方便老师、学生和家长使用，分初一分册、初二分册、初三分册三册。

本套书每册都以专题的形式编写，每讲的主要栏目有：赛点突破、经典赛题剖析、同步训练。“同步训练”栏目中，题目根据难易程度分为选择题、填空题、解答题，供学生、老师和家长选择使用。全书后附有“同步训练”题目的详解。

问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，必须进行一定量的训练。本套书精选了具有代表性的经典例题，配备了足够的训练题和测试题。在这些题目中既有经典的名题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有笔者根据自己的教学实践编撰的新题。设置这些题目时，笔者专门针对学生学习的实际，突出知识的重点、难点，以期达到提高的目的。

本套书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透，凸现科学精神和人文精神的融合，加强对学生学习兴趣、创新精神、实践能力、应用意识和分析问题及解决问题能力的培养。

数学大师陈省身教授为 2002 年 8 月在北京举行的第 24 届国际数学家大会题词：“数学好玩。”我们深信本套书能让你品味到数学的无穷乐趣。著名数学家陈景润说得好：“数学的世界是变幻无穷的世界，其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到！”

朱华伟
2016 年 6 月



目 录



第 1 讲	一次函数	(1)
第 2 讲	数据的收集与整理	(10)
第 3 讲	全等三角形	(19)
第 4 讲	轴对称与等腰三角形	(28)
第 5 讲	整式的加减	(36)
第 6 讲	整式的乘法	(42)
第 7 讲	乘法公式	(49)
第 8 讲	整式的除法	(56)
第 9 讲	整式的恒等变形	(63)
第 10 讲	因式分解的基本方法	(71)
第 11 讲	配方法和添、拆项法	(77)
第 12 讲	换元法与待定系数法	(83)
第 13 讲	因式分解的应用	(91)
第 14 讲	完全平方数	(98)
第 15 讲	整数的分拆	(107)
第 16 讲	分式的概念和性质	(115)
第 17 讲	分式的运算	(123)
第 18 讲	分式方程及其应用	(134)
第 19 讲	反比例函数	(145)
第 20 讲	直角三角形	(156)
第 21 讲	勾股定理	(162)

第 22 讲	三角形中的不等关系	(170)
第 23 讲	平行四边形	(178)
第 24 讲	矩形、菱形和正方形	(187)
第 25 讲	梯形、三角形和梯形的中位线	(196)
第 26 讲	平移和轴对称	(205)
第 27 讲	图形的剪拼与折叠	(213)
第 28 讲	数据的分析	(222)
第 29 讲	反证法	(231)
第 30 讲	开放性问题	(240)
“同步训练” 解答		(253)



第1讲 一次函数



赛点突破

从用具体的数到用字母表示数,从代数式到方程到函数,充分体现了数学领域解决问题的方法的系统性和多样性.一次函数是正比例的延续和拓展,是最基本的函数,是正式进入学习函数阶段的起点,它是与现实生活有着紧密联系的知识点,备受各类竞赛的青睐.

1. 一次函数的性质

一次函数 $y = kx + b$ (k, b 是常数, $k \neq 0$) 有两条基本性质:

(1) 它的图像是经过 $(0, b)$, $(-\frac{b}{k}, 0)$ 两点的直线;

(2) 它的系数决定图像的大致位置和“倾斜”度,及单调性(k 决定单调性, b 决定图像经过的象限). 如图 1-1 所示.

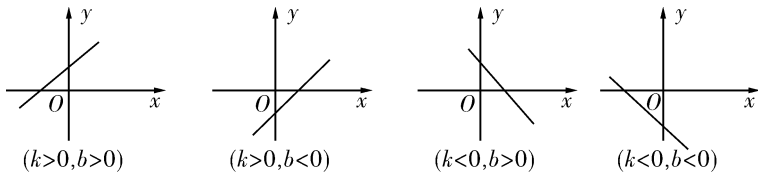


图 1-1

2. 一次函数的图像与整点

通过建立点与一次函数之间的数量关系或几何位置关系,结合数论方面的知识,运用数形结合的思想解决有关整点问题.

3. 一次函数的图像与区域

直角坐标平面内用直线围成的封闭区域问题(如区域的形状判断,区域的面积等),可通过直线方程转化为坐标问题来解决.

4. 一次函数的应用

从给定的材料中抽象出函数关系式. 构建一次函数模型, 结合一次函数的性质来解决问题.



经典赛题剖析

例 1 已知 $\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} = p$ 且 $abc \neq 0$, 那么, 直线 $y = px + p$ 一定经过().

- (A) 第一、二象限 (B) 第二、三象限
(C) 第三、四象限 (D) 第一、四象限

解 由条件可得
$$\begin{cases} b+c=ap, & \text{①} \\ c+a=bp, & \text{②} \\ a+b=cp. & \text{③} \end{cases}$$

①+②+③得 $2(a+b+c) = (a+b+c)p$.

当 $a+b+c=0$ 时, $p=-1, y=-x-1$. 则直线经过第二、三、四象限.

当 $a+b+c \neq 0$ 时, $p=2, y=2x+2$. 则直线经过第一、二、三象限.

综上所述, 直线一定经过第二、三象限.

故选(B).

例 2 $b > a$, 将一次函数 $y = bx + a$ 与 $y = ax + b$ 的图像画在平面直角坐标系内, 则有一组 a, b 的取值, 使得下列 4 个图中的一个为正确的是().

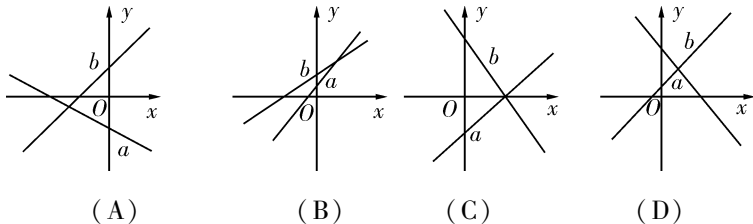


图 1-2

解 设两直线的交点 (x, y) 为方程组

$$\begin{cases} y = bx + a, \\ y = ax + b. \end{cases} \text{的解. 即}(1, a + b).$$

(A) 中交点横坐标是负数, 则(A)不对.

(C) 中交点横坐标是2, $2 \neq 1$, 则(C)不对.

(D) 中交点纵坐标是大于 a 小于 b 的数, 不是 $a + b$, 则(D)不对.

综上所述, 应选(B).

例3 已知函数 $y = (a - 2)x - 3a - 1$, 当自变量 x 的取值范围为 $3 \leq x \leq 5$ 时, y 既能取到大于5的值, 又能取到小于3的值, 则实数 a 的取值范围是_____.

解 ①当 $a > 2$ 时, 一次函数 y 随 x 增大而增大. 由题意得:

$$\begin{cases} (a - 2) \cdot 3 - 3a - 1 < 3, \\ (a - 2) \cdot 5 - 3a - 1 > 5. \end{cases}$$

所以 $a > 8$.

②当 $a < 2$ 时, 一次函数 y 随 x 增大而减小. 由题意得:

$$\begin{cases} (a - 2) \cdot 3 - 3a - 1 > 5, \\ (a - 2) \cdot 5 - 3a - 1 < 3. \end{cases}$$

无解.

③当 $a = 2$ 时, $y = -7$ 是常数, 不满足题中条件.

综上所述, a 的取值范围是 $a > 8$.

例4 如图1-3所示, 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$

与 x 轴, y 轴分别交于点 A, B , 以线段 AB 为直角边在第一象限内作等腰 $\text{Rt} \triangle ABC$, 且 $\angle BAC = 90^\circ$. 如果在第二象限内有一点 $P(a, \frac{1}{2})$, 且 $\triangle ABP$ 的面积与 $\text{Rt} \triangle ABC$ 的面积相等, 求 a 的值.

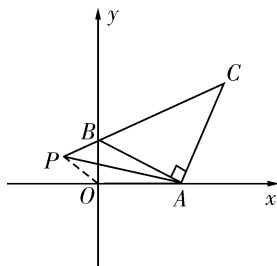


图1-3

解 由已知可得 $A(\sqrt{3}, 0), B(0, 1)$,

$OA = \sqrt{3}, OB = 1$, 故 $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2$.

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$.

连接 OP , 则

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABP} &= S_{\triangle PBO} + S_{\triangle ABO} - S_{\triangle APO} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times |a| + \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \\ &= -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

又因为 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ABC}$.

所以 $-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 2$.

所以 $a = \frac{\sqrt{3} - 8}{2}$.

例 5 直线 $y = 2x + 6$ 与 x 轴, y 轴的交点分别为 A, B , 又 P, Q 两点的坐标分别为 $P(-2, 0), Q(0, k), k < 6$, 以 Q 为圆心, PQ 长为半径作圆, 则:

(1) k 取何值时, $\odot Q$ 与直线 AB 相切?

(2) 说出 k 在什么范围内取值时, $\odot Q$ 与直线 AB 相离? 相交?

解 (1) 由已知, 得 $A(-3, 0), B(0, 6)$.

所以 $BQ = 6 - k, PQ = \sqrt{k^2 + 4}, AB = 3\sqrt{5}$,

作 $QR \perp AB$ 于 R , 则 $\text{Rt} \triangle BQR \sim \text{Rt} \triangle BAO$, 得 $\frac{BQ}{AB} = \frac{QR}{OA}$, 又 $QR = PQ$.

所以 $\frac{BQ}{AB} = \frac{PQ}{OA}$, 即 $\frac{6-k}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{k^2+4}}{3}$,

即 $k^2 + 3k - 4 = 0$.

所以 $k = 1$ 或 -4 .

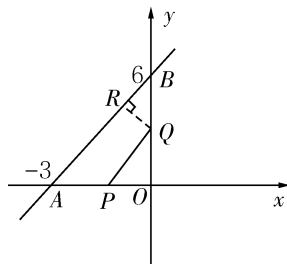


图 1-4

故当 $k = -4$ 或 $k = 1$ 时, $\odot Q$ 与直线 AB 相切.

(2) 当 $-4 < k < 1$ 时, $\odot Q$ 与直线 AB 相离.

(3) 当 $1 < k < 6$ 或 $k < -4$ 时, $\odot Q$ 与直线 AB 相交.

例 6 某家电生产企业根据市场调查分析, 决定调整产品生产方案, 准备每周(按 120 个工时计算)生产空调、彩电、冰箱共 360 台, 且冰箱至少生产 60 台. 已知生产这些家电产品每台所需工时和每台产值如下表:

表 1-1

家电名称	空调	彩 电	冰 箱
工时	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
产值(千元)	4	3	2

问每周应生产空调、彩电、冰箱各多少台, 才能使产值最高? 最高产值多少? (以千元为单位)

解 设每周生产空调 x 台、彩电 y 台、冰箱 z 台, 总产值为 w 千元, 依题意得

$$\begin{cases} x + y + z = 360, & \text{①} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 120, & \text{②} \\ w = 4x + 3y + 2z, & \text{③} \end{cases}$$

$$z \geq 60,$$

由①, ②得

$$x = \frac{z}{2}, y = 360 - \frac{3z}{2}, \text{代入③得}$$

$$w = -\frac{1}{2}z + 1080, \text{又 } k = -\frac{1}{2} < 0, z \geq 60.$$

所以 当 $z = 60$ 时, w 最大, 最大值为 1050.

例 7 求三直线 $y = 3x$, $y = -\frac{1}{3}x$, $x = 10$ 围成的 $\triangle OAB$ 内的整点个数.

解 ① 计算 $\triangle OAC$ 内及 x 轴上的整点数.

当 $x=1$ 时, $y=3 \times 1=3$, 对应整点个数为 3 个.

当 $x=2$ 时, $y=3 \times 2=6$, 对应整点个数为 6 个.

当 $x=3$ 时, $y=3 \times 3=9$, 对应整点个数为 9 个.

∴ ∴ ∴

当 $x=9$ 时, $y=3 \times 9=27$, 对应整点个数为 27 个.

此时, 对应整点个数共有 $3+6+9+\cdots+27=135$ 个.

② 再计算 $\triangle OCB$ 内整点数.

$x=1$ 时, $y=-\frac{1}{3}$ 对应整点个数为 0.

$x=2$ 时, $y=-\frac{2}{3}$ 对应整点个数为 0.

$x=3$ 时, $y=-1$ 对应整点个数为 0.

$x=4$ 时, $y=-\frac{4}{3}$ 对应整点个数为 1.

$x=5$ 时, $y=-\frac{5}{3}$ 对应整点个数为 1.

$x=6$ 时, $y=-2$ 对应整点个数为 1.

$x=7$ 时, $y=-\frac{7}{3}$ 对应整点个数为 2.

$x=8$ 时, $y=-\frac{8}{3}$ 对应整点个数为 2.

$x=9$ 时, $y=-3$ 对应整点个数为 2.

此时, 对应整点个数共有 $1+1+1+2+2+2=9$ (个).

故所求整点个数为 $135+9=144$ (个).

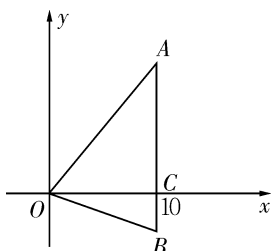


图 1-5



同步训练

一、选择题

1. 若 $abc < 0$, 且 $y = \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ 的图像不过第四象限, 则点 $(a+b, c)$ 所在象限为().

- (A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四

2. 一个一次函数的图像与直线 $y = \frac{5}{4}x + \frac{95}{4}$ 平行, 与 x 轴、 y 轴的交点分别为 A, B , 并且过点 $(-1, -25)$. 则在线段 AB 上(包括端点 A, B), 横、纵坐标都是整数的点有().

- (A) 4 个 (B) 5 个 (C) 6 个 (D) 7 个

3. 某工程车准备将 17 根水泥电线杆从公司拉到 1 千米外的公路旁竖立, 每隔 0.1 千米竖 1 根. 工程车从公司出发到完成任务后返回到公司称为工程车行驶的总路程, 记为 y . 由于工程车载重量有限, 每趟最多只能拉 3 根水泥电线杆, 为使总路程 y 尽可能小, 工程车除第 x 趟 (x 为不大于 6 的自然数) 拉 2 根外, 其余 5 趟均拉 3 根, 则 y 与 x 的函数为().

- (A) $y = 0.2x + 18.5 (1 \leq x \leq 6)$ (B) $y = 0.2x + 18.7 (1 \leq x \leq 6)$
 (C) $y = 0.2x + 22 (1 \leq x \leq 6)$ (D) $y = 0.2x + 22.2 (1 \leq x \leq 6)$

4. 在同一坐标系内, 直线 $l_1: y = (k-2)x + k$ 和 $l_2: y = kx$ 的位置可能为().

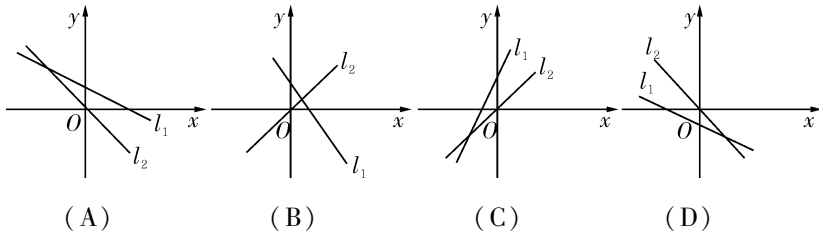


图 1-6

5. 一次函数 $y = kx + b$ 中, y 随 x 的增大而减小, 且 $k \cdot b > 0$, 那么这个函数的图像经过().

- (A) 第一、二、三象限 (B) 第一、二、四象限
(C) 第二、三、四象限 (D) 第一、三、四象限

6. 某人骑车沿直线旅行, 先前进了 a 千米, 休息了一段时间, 又原路返回 b 千米 ($b < a$), 再前进 c 千米, 则此人离起点的距离 s (千米) 与时间 t (小时) 的关系示意图是().

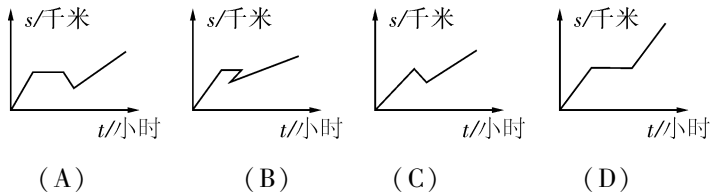


图 1-7

二、填空题

7. 当 $m =$ _____ 时, 函数: $y = (m + 3)x^{2m+1} + 4x - 5$ ($x \neq 0$) 是一个一次函数.

8. 如图 1-8 所示, 直线 $y = -2x + 10$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A, B 两点, 把 $\triangle AOB$ 沿 AB 翻折, 点 O 落在 C 处, 则点 C 的坐标是 _____.

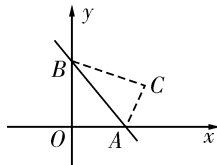


图 1-8

9. 在直角坐标系 xOy 中, x 轴上的动点 $M(x, 0)$ 到定点 $P(5, 5)$, $Q(2, 1)$ 的距离分别为 MP 和 MQ . 当 $MP + MQ$ 取最小值时, 点 M 的横坐标 $x =$ _____.

10. 如图 1-9 所示, 在直角坐标系中, 矩形 $OABC$ 的顶点 B 的坐标为 $(15, 6)$. 直线 $y = \frac{1}{3}x + b$ 恰好将矩形 $OABC$ 分成面积相等的两部分, 那么 $b =$ _____.

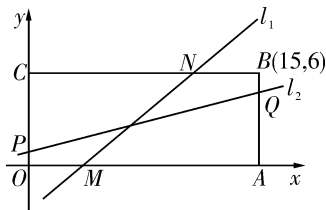


图 1-9

三、解答题

11. 求证:不论 k 为何值,一次函数 $(2k-1)x - (k+3)y - (k-11) = 0$ 的图像恒过一定点.

12. 如图 1-10 所示,工地上有 A 和 B 两个土墩、洼地 E 、池塘 F . 两个土墩的土方数分别是 781 方、1 584 方,洼地 E 需要填土 1 025 方,池塘 F 可填土 1 390 方. 现要求挖掉两个土墩,把这些土先填平洼地 E ,余下的土填入池塘 F . 如何安排运土方案,才能使劳力最省?

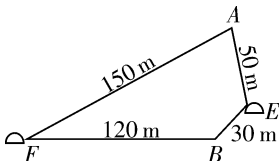


图 1-10

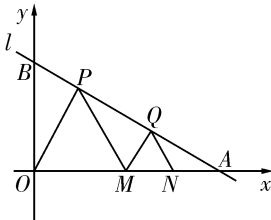


图 1-11

13. 如图 1-11 所示,在直角坐标系 xOy 中,直线 l 经过点 $B(0, \sqrt{3})$,且与 x 轴的正半轴相交于点 A . 点 P, Q 在线段 AB 上,点 M, N 在线段 OA 上,且 $\triangle POM$ 与 $\triangle QMN$ 是相似比为 3:1 的两个等边三角形.

试求:(1) $\frac{AM}{MO}$ 的值;(2) 直线 l 的解析式.

14. A 市和 B 市分别库存某种机器 12 台和 6 台,现决定支援给 C 市 10 台和 D 市 8 台. 已知从 A 市调运一台机器到 C 市和 D 市的运费分别为 400 元和 800 元;从 B 市调运一台机器到 C 市和 D 市的运费分别为 300 元和 500 元.

(1) 设 B 市运往 C 市机器 x 台,求总运费 W 关于 x 的函数关系式.

(2) 若要求总运费不超过 9 000 元,问共有几种调运方案?

(3) 求出总运费最低的调运方案,最低运费是多少元?