高等职业院校“十三五”规划教材

高等数学 下

GAODENG SHUXUE

2 分册

● 主编　章曙雯

重庆大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下.2分册 / 章曙雯主编.--重庆:重庆大学出版社,2018.2
ISBN 978-7-5689-1010-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①章… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第021292号

高等数学下2分册

主 编 章曙雯
副主编 李顺芬 张 遥
主 审 彭 军
责任编辑:章 可 袁文华 版式设计:章 可
责任校对:刘志刚 责任印制:张 策

*

重庆大学出版社出版发行
出版人:易树平
社址:重庆市沙坪坝区大学城西路21号
邮编:401331
电话:(023) 88617190 88617185(中小学)
传真:(023) 88617186 88617166
网址:http://www.cqup.com.cn
邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)
全国新华书店经销
重庆市正前方彩色印刷有限公司印刷

*

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:7.75 字数:181千
2018年2月第1版 2018年2月第1次印刷
ISBN 978-7-5689-1010-1 定价:25.00元

前言

QIANYAN

本书基于高职教育层次的特点，结合高职学生的数学基础，努力体现高职教育理念，符合高职教育目标，突出基本计算能力和应用能力的训练，在编写思路上，着重以体现数学思想、掌握数学基础知识为基本点，使学生通过学习数学知识，提高解决专业课中所涉及的数学问题的能力，真正做到教师的“教”与学生的“学”结合起来，能够用数学知识解决问题，努力做到为后续课程的学习服务.在编写过程中，对以往的教学内容进行了认真的探讨，参考了有关专著、教材，结合近几年数学教学和改革的经验，以一种新的“工具课”模式出现，使本教材具有较鲜明的特点.具体体现在以下几个方面.

1.在内容体系设计上，本着“必需”和“够用”的原则，淡化了数学理论的证明和复杂公式的推导;在内容安排设置上，以基本概念、基本计算为主，突出培养计算能力和解决问题的能力;在数学过程设立上，贴近学生与教师的实际，采用数形结合方法，尽量用图形和数表直观地描述定义、定理，使之易教好学，具有可操作性.

2.以数学应用为主线，体现了数学教学的应用性.从知识的引入，到思想方法的形成，再到其具体应用，都体现了应用数学这条主线.在引例、解释和应用方面尽量多联系与实际相关的问题，着力体现数学在不同领域中的应用，具体事例既能贴近学生感兴趣的知识，又能很好地启发学生的思维，从而发挥学生自主学习的积极性.

3.根据数学教育的特点，在每章开始，给出学习目标与要求，引导学生知道学什么，告诉学生怎样学.每个知识点后配有同步训练，每个知识模块后设有综合复习题，帮助学生检查学习效果，起到深刻理解和熟练掌握课程内容的作用.

4.在每章后都编入数学花絮，介绍了与本书有关的数学家及相关的数学文化，不但能使学生了解数学家的生平、业绩、治学态度、品德、风采，从而向他们学习，而且把定理、公式与名人逸事联系起来，往往使人印象深刻;同时也为枯燥的学习内容增加点趣味，以达到提高学生学习兴趣和数学素养的目的.

本书由武汉铁路职业技术学院章曙雯任主编，李顺芬、张遥任副主编，彭军负责全书的审稿工作。其编写分工如下:第一章由李顺芬编写，第二章由章曙雯编写，第三章由张遥编写.

由于编者水平有限，书中难免出现错误及不足之处，恳请读者批评指正.

编　者

2017 年 12 月

MULU 目录

第一章　微分方程

【目标与要求】

- 了解:一阶微分方程的简单应用,二阶线性微分方程解的结构;
- 理解:微分方程的有关概念,二阶常系数非齐次线性微分方程的解法;
- 掌握:可降阶的微分方程的解法,二阶常系数齐次线性微分方程的解法;
- 熟练掌握:可分离变量的微分方程和一阶线性微分方程的解法.

在生产实践和实际生活中,常常需要根据各种变量的关系求出变量的函数关系,而变量之间的某种关系又隐藏在其导数或微分之中,这样就需要列出含有未知函数导数或微分的方程,并解这种方程才能求得未知函数,解决这一问题的方法和途径就是微分方程理论.本章主要介绍关于微分方程的一些基本概念和几种较为简单的常微分方程的解法.

第一节　微分方程的基本概念

例 1　已知一曲线通过点(1,2),且在该曲线上任一点 $P(x,y)$处切线的斜率为 $2x$,求此曲线方程.

解　设所求曲线方程为 $y=f(x)$,根据导数的几何意义,可知 $y=f(x)$应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x. \tag{1-1}$$

另外,未知函数 $y=f(x)$还应满足

$$x=1\text{ 时},y=2. \tag{1-2}$$

对式(1-1)两端积分,得

$$y=\int 2x\,\mathrm{d}x=x^2+C. \tag{1-3}$$

把式(1-2)代入式(1-3),得 $C=1$,故所求曲线方程为

$$y=x^2+1. \tag{1-4}$$

例 2　列车在平直线路上以 20 m/s(相当于 72 km/h)的速度行驶,当制动时列车获得的加速度为 $-0.4\ \mathrm{m/s^2}$,问开始制动后多少时间列车才能停住,列车在这段时间里行驶了多

少路程?

解 把列车制动时的时刻记为 $t=0$,制动后要经过 t s,列车行驶 s m.根据题意,反映制动阶段列车运动规律的函数 $s=s(t)$ 应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4. \tag{1-5}$$

另外,未知函数 $s=s(t)$ 还应满足

$$s(0)=0, v(0)=s'(0)=20. \tag{1-6}$$

将式(1-5)两端对 t 积分,得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-0.4t+C_1, \tag{1-7}$$

再对 t 积分一次,得

$$s=-0.2t^2+C_1 t+C_2, \tag{1-8}$$

其中 C_1,C_2 都是任意常数.

把条件"$v(0)=20$"代入式(1-7),得 $C_1=20$,把条件 $s(0)=0$ 代入式(1-8),得 $C_2=0$.

把 C_1,C_2 的值代入式(1-7)及式(1-8),得

$$v(t)=-0.4t+20, \tag{1-9}$$

$$s(t)=-0.2t^2+20t. \tag{1-10}$$

在式(1-9)中,令 $v(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0$,得到列车从开始制动到完全停住的时间为

$$t=\frac{20}{0.4}=50 \text{ s},$$

再把 $t=50$ 代入式(1-10),得列车在制动后行驶的路程为

$$s=-0.2\times 50^2+20\times 50=500 \text{ m}.$$

上两例中,所建立的变量关系方程中均含有未知函数的导数,这种方程称为微分方程,微分方程的相关概念如下.

定义 1-1 含未知函数的导数(或微分)的方程称为微分方程.微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数,称为微分方程的阶.

例如,方程(1-1)是一阶微分方程,方程(1-5)是二阶微分方程.

又如,方程 $y'''-x^3y''-xy^2=\cos x$ 是三阶微分方程;

方程 $y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)})$ 为 n 阶微分方程.

如果微分方程中的未知函数仅含有一个自变量,这样的微分方程称为常微分方程.

我们仅讨论常微分方程,为方便起见简称为微分方程或方程.

本章主要讨论几种特殊类型的一阶和二阶微分方程.

注意:在微分方程中,并不要求未知函数、未知函数的导数与自变量三者同时显现,但在方程中导数或微分是必须显现的.

定义 1-2 满足微分方程的函数,即把函数及由它得出的相应的各阶导数代入微分方程能使该方程成为恒等式,则此函数称为该微分方程的解.

例如,式(1-3)与式(1-4)都是微分方程(1-1)的解,式(1-8)与式(1-10)都是微分方程

(1-5)的解.

定义 1-3 如果微分方程的解中含有任意常数,且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同,这样的解称为微分方程的通解.在通解中,利用附加条件确定任意常数的取值,所得到的解称为微分方程的特解,而这种附加条件称为初始条件.

例如,式(1-3)是方程(1-1)的通解,式(1-8)是方程(1-5)的通解;式(1-4)是方程(1-1)的特解,式(1-10)是方程(1-5)的特解.

通常,一阶微分方程的初始条件是

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,$$

由此可以确定通解中的一个任意常数.

二阶微分方程的初始条件是

$$y\big|_{x=x_0}=y_0 \text{ 及 } y'\big|_{x=x_0}=y_1,$$

由此可以确定通解中的两个任意常数.

一个微分方程与其初始条件构成的问题,称为初值问题.

一阶微分方程的初值问题为$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y\big|_{x=x_0}=y_0\end{cases}$.

二阶微分方程的初值问题为$\begin{cases}y''=f(x,y,y')\\ y\big|_{x=x_0}=y_0,y'\big|_{x=x_0}=y_1\end{cases}$.

微分方程的特解的图形是一条曲线,称为微分方程的积分曲线.

例 3 验证函数 $y=3\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}$ 是方程 $y''+2y'+y=0$ 的解.

解 由 $y=3\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}$,得

$$y'=-4\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x},y''=5\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x},$$

将 y、y' 及 y'' 代入原方程的左边,得

$$(5\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x})+2(-4\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x})+3\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}=0,$$

即函数 $y=3\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}$ 满足原方程,所以该函数是所给微分方程的解.

例 4 验证函数 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 是微分方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=0$($k$ 为非零常数)的通解,并求满足初始条件 $x\big|_{t=0}=A,x'\big|_{t=0}=0$ 的特解.

解 (1)由 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$,得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k^2C_1\cos kt-k^2C_2\sin kt=-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt),$$

将$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$及 x 的表达式代入微分方程中,得

$$-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)+k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)=0,$$

这是一个恒等式,表明函数 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 满足方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=0$,且含有两个任意常数,因此所给函数是所给方程的通解.

(2)由条件 $x|_{t=0}=A$ 及 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 得 $C_1=A$，
再由条件 $x'|_{t=0}=0$ 及 $x'=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt$ 得 $C_2=0$，
所以满足初始条件 $x|_{t=0}=A$、$x'|_{t=0}=0$ 的特解为 $x=A\cos kt$.

例 5 已知一条曲线上任意一点处的切线斜率等于该点的横坐标的平方，且该曲线过点(1,2)，求此曲线的方程.

解 设所求的曲线的方程为 $y=y(x)$，根据已知条件，有

$$y'=x^2,$$

两边积分，得

$$y=\frac{1}{3}x^3+C,$$

又已知曲线过点(1,2)，代入上式，得 $C=\frac{5}{3}$，于是所求的曲线方程为

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{3}.$$

课堂练习与作业

1.指出下列微分方程的阶数：

(1)$x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y=0$；

(2)$y''+6y'=2x^2-1$；

(3)$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}Q=0$；

(4)$xy''+3yy'-x=0$.

2.验证下列各题中所给的函数是否为所给微分方程的解：

(1)$y''-2y'-y=0$，$y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$；

(2)$y''+y=\mathrm{e}^x$，$y=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$；

(3)$y''+y=0$，$y=3\sin x-4\cos x$.

3.验证 $y=Cx^3$ 是方程 $3y-xy'=0$ 的通解(C 为任意常数)，并求满足初始条件 $y(1)=\frac{1}{3}$的特解.

4.已知一条曲线上任意一点处的切线斜率与切点的横坐标成反比，且曲线过点(1,2)，求该曲线的方程.

5.一质点由原点开始($t=0$)沿直线运动，已知在 t 时刻的加速度为 t^2-1，而在 $t=1$ 时的速度为$\frac{1}{3}$，求位移的大小 x 与时间 t 的函数关系.

第二节　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x,y,y')=0$ 或 $y'=f(x,y)$，下面我们仅讨论几种特殊类型的一阶微分方程.

一、可分离变量的微分方程

如果一阶微分方程 $F(x,y,y')=0$ 可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$$

的形式，则称该方程为可分离变量的微分方程.

这类微分方程的解法一般可分为如下两步：

①分离变量：

将方程化为

$$\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x,$$

使方程各边都只含一个变量.

②两边积分：

两边同时积分，得

$$\int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x,$$

设$\frac{1}{g(y)}$与 $f(x)$的原函数分别为 $G(y)$与 $F(x)$，则得方程的通解为

$$G(y)=F(x)+C.$$

例 1　求微分方程 $y'=-\frac{y}{x}$的通解.

解　分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\ln|y|=-\ln|x|+C_1,$$

化简得

$$|y|=\mathrm{e}^{C_1}\cdot\left|\frac{1}{x}\right|,$$

即

$$y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\cdot\frac{1}{x},$$

令

$$C_2 = \pm e^{C_1},$$

则

$$y = C_2 \frac{1}{x} \quad (C_2 \neq 0).$$

注意到 $y=0$ 也是方程的解，所以 C_2 实际上也可以取 0，这样，方程的通解为

$$y = C \frac{1}{x} \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

今后对于求解类似例 1 这种情形的微分方程.其过程可作如下简化处理.

分离变量，得

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x}dx,$$

两边积分，得

$$\ln |y| = \ln\left|\frac{1}{x}\right| + \ln |C|,$$

通解为

$$y = C \frac{1}{x} \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

例 2 求解 $x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dy = 0$.

解 此方程看上去不能直接分离变量，但作适当的变形，得

$$\frac{x}{x^2-1}dx + \frac{y}{y^2-1}dy = 0,$$

即

$$\frac{y}{y^2-1}dy = -\frac{x}{x^2-1}dx,$$

所以是可分离变量的微分方程，两边积分，得

$$\ln|y^2-1| = -\ln|x^2-1| + \ln|C|,$$

即

$$(y^2-1)(x^2-1) = C \quad (C \neq 0),$$

但 $x=\pm 1, y=\pm 1$ 也是方程的解，所以 C 实际上也可以取 0，于是方程的通解为

$$(y^2-1)(x^2-1) = C \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

例 3 求微分方程 $x + \frac{dy}{dx} = 1 + y^2 - xy^2$ 的通解.

解 整理得

$$\frac{dy}{dx} = 1 - x + y^2(1-x),$$

即

$$\frac{dy}{dx} = (1-x)(1+y^2),$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=(1-x)\,\mathrm{d}x,$$

两边积分，通解为

$$\arctan y=x-\frac{1}{2}x^2+C \quad (C\text{ 为任意常数}).$$

例 4 求微分方程 $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$ 的通解.

解 方程变形为

$$xy'+y=y\ln(xy),$$

令 $xy=u$，得 $u'=y+xy'$，代入得

$$u'=\frac{u}{x}\ln u \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{x}\ln u,$$

分离分量，得

$$\frac{1}{u\ln u}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边同时积分，得

$$\ln(\ln u)=\ln x+\ln C,$$

于是

$$\ln u=C\cdot x,$$

故原方程的通解为

$$xy=\mathrm{e}^{C\cdot x}.$$

注意：①方程的通解并不一定要求是显函数的表达式；

②以微分形式给出的微分方程，两个变量地位对等.

例 5 已知一曲线上任意点 $P(x,y)$ 处的切线垂直于该点与原点的连线，求该曲线的方程.

解 设曲线方程为 $y=f(x)$，如图 1-1 所示.点 $P(x,y)$ 处的切线 PT 的斜率为 y'，OP 连线的斜率为 $\frac{y}{x}$，由切线 PT 与连线 OP 相互垂直的条件得

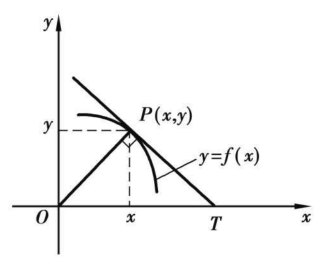

图 1-1

$$y'\cdot\frac{y}{x}=-1,\text{即}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y},$$

这是一个可分离变量的微分方程，整理得

$$y\,\mathrm{d}y=-x\,\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C_1 \quad (C_1\text{ 为任意常数}),$$

化简得通解为 $x^2+y^2=C$（其中 $C=2C_1$ 为任意常数）.

通解的图形为 xOy 平面上一组圆心在原点、半径不同的同心圆.

二、齐次方程

如果一阶微分方程可化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$,则称该方程为齐次方程.

例如,方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{x^2+xy}$$

是齐次方程,因为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{x^2+xy}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\frac{y}{x}}$;

又如,$(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$ 也是齐次方程,因其可化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$.

齐次方程的解法如下:

① 变形:将原方程变形为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$形式;

② 代换:令$\frac{y}{x}=u$,则 $y=ux$,两边对 x 求导,得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$,代入原方程,得 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=f(u)$;

③ 分离变量,得$\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$;

④ 积分:两端积分$\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$求出结果,再用$\frac{y}{x}$回代$u$,即得所给齐次方程的通解.

例 6 求微分方程 $x\mathrm{d}y=(y-x)\mathrm{d}x$ 的通解.

解 将方程化为 $y'=\frac{y}{x}-1$,令 $u=\frac{y}{x}$,则 $y=ux$,$y'=xu'+u$,代入并化简,得

$$xu'=-1,$$

分离变量,得

$$\mathrm{d}u=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分,得

$$u=-\ln|x|+C,$$

将 $u=\frac{y}{x}$回代,得原方程通解为

$$\frac{y}{x}=-\ln|x|+C \text{ 或 } y=-x\ln|x|+Cx.$$

例 7 求微分方程 $xy'=y(1+\ln y-\ln x)$的通解.

解 将方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right),$$

令 $u=\frac{y}{x}$,则

$$y=ux,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u,$$

代入得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=u(1+\ln u),$$

分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分,得

$$\ln|\ln x|=\ln|x|+\ln|C|,\ln u=Cx,$$

即

$$u=\mathrm{e}^{Cx},$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 回代,得原方程通解为 $y=x\mathrm{e}^{Cx}$.

例 8 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x-\sqrt{x^2+y^2}}(y>0)$ 的通解.

解 方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x-\sqrt{x^2+y^2}}{y}=\frac{x}{y}-\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2},$$

令 $u=\frac{x}{y}$,得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$,于是

$$u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=u-\sqrt{1+u^2},$$

分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

两边同时积分,得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=-\int\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

得

$$\ln|u+\sqrt{1+u^2}|=-\ln|y|+\ln|C|,$$

于是

$$u+\sqrt{1+u^2}=\frac{C}{y},$$

故原方程的通解为

$$x+\sqrt{x^2+y^2}=C.$$

当分子简单而分母复杂时,可将 x 看成 y 的函数,变形为齐次方程来求解.

三、一阶线性微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{1-11}$$

的微分方程称为一阶线性微分方程,“线性”是指未知函数 y 和它的导数 y' 都是一次的.

若 $Q(x)=0$,则方程(1-11)为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0, \tag{1-12}$$

称式(1-12)为一阶齐次线性方程.

若 $Q(x)\neq 0$,方程(1-11)称为一阶非齐次线性方程.

例如,$y'-y^2=0$,$yy'+y=x$,$y'-\sin y=0$ 均不是一阶线性微分方程,而 $y'+2xy=0$ 为一阶齐次线性微分方程,$y'+2xy=2x\mathrm{e}^{-x^2}$ 为一阶非齐次线性微分方程.

1.一阶齐次线性微分方程的解法

将方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$$

分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,$$

两边积分,得

$$\ln y=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln C,$$

方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \quad (C\text{ 为任意常数}). \tag{1-13}$$

例 9 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x+1}y=0$ 的通解.

解 这是一个齐次线性方程,且 $P(x)=-\frac{2}{x+1}$,算出

$$-\int P(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x=2\ln(x+1),$$

由通解公式即可得到该方程的通解为

$$y=C(x+1)^2.$$

一阶齐次线性微分方程也可以用分离变量法求得通解.

例 10 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^x y=0$ 的通解.

解 此方程为一阶齐次线性方程，且 $P(x)=\mathrm{e}^x$，所以

$$\int P(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x,$$

由通解公式即可得到该方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}.$$

2.一阶非齐次线性微分方程解法

下面我们用常数变易法在齐次线性方程的通解(1-13)的基础上来求非齐次线性方程(1-11)的通解，即把式(1-13)中的 C 看作 x 的函数 $C(x)$.设

$$y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{1-14}$$

是非齐次线性方程(1-11)的解，将式(1-14)代入式(1-11)由此来确定待定函数 $C(x)$.

对式(1-14)求 x 的导数，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-C(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{1-15}$$

将式(1-14)，式(1-15)代入式(1-11)，整理得

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),$$

即

$$C'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x},$$

积分后，得

$$C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C, \tag{1-16}$$

将式(1-16)代入式(1-14)，得

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\quad(C\text{ 为任意常数}), \tag{1-17}$$

这就是非齐次线性方程(1-11)的通解.

将式(1-17)改写为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,$$

由上式可以看出，上式右端第一项恰是对应的齐次线性方程(1-12)的通解，第二项是方程(1-11)的一个特解.由此可知，一阶非齐次线性方程的通解是对应齐次方程的通解与它的一个特解之和.

所以解这类微分方程的步骤如下：

①找出 $P(x)$，$Q(x)$；

②求出 $\int P(x)\mathrm{d}x$ 以及 $\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$ 和 $\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$；

③求出积分 $\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$；

④代入公式 $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$.

例 11 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3$ 的通解.

解 因为 $P(x)=-\frac{2}{x+1}$,$Q(x)=(x+1)^3$,所以

$$-\int P(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x=2\ln(x+1),$$

$$\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{2\ln(x+1)}=(x+1)^2,$$

$$\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int(x+1)^3\mathrm{e}^{-2\ln(x+1)}\mathrm{d}x=\int(x+1)^3\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int(x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x+1)^2,$$

代入式(1-17)得原方程的通解为

$$y=(x+1)^2\left[\frac{1}{2}(x+1)^2+C\right].$$

例 12 求微分方程 $y^2\mathrm{d}x+(xy-1)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 若将 y 看成 x 的函数时,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{1-xy}$既不是一阶线性微分方程,也不是可分离变量的微分方程,但如果把 x 看成 y 的函数,则方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y}x=\frac{1}{y^2},$$

这是以 x 为未知函数的一阶非齐次线性方程.代入式(1-17)得原方程的通解为

$$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-\ln y}\left[\int\frac{1}{y^2}\cdot y\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=\frac{1}{y}\left[\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y+C\right]=\frac{1}{y}[\ln y+C]$$

$$=\frac{C}{y}+\frac{1}{y}\ln y.$$

课堂练习与作业

1.求下列微分方程的通解:

(1)$(1+y)\mathrm{d}x+(x-1)\mathrm{d}y=0$;

(2)$\mathrm{d}y-y\sin^2x\mathrm{d}x=0$;

(3)$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=10^{x+y}$;

(4)$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+x+y^2+xy^2$;

(5)$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2+1}{y(x^2-1)}$;

(6)$\cos x\sin y\mathrm{d}x+\sin x\cos y\mathrm{d}y=0$;

(7)$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}$;

(8)$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\cos\left(\frac{y}{x}\right)$.